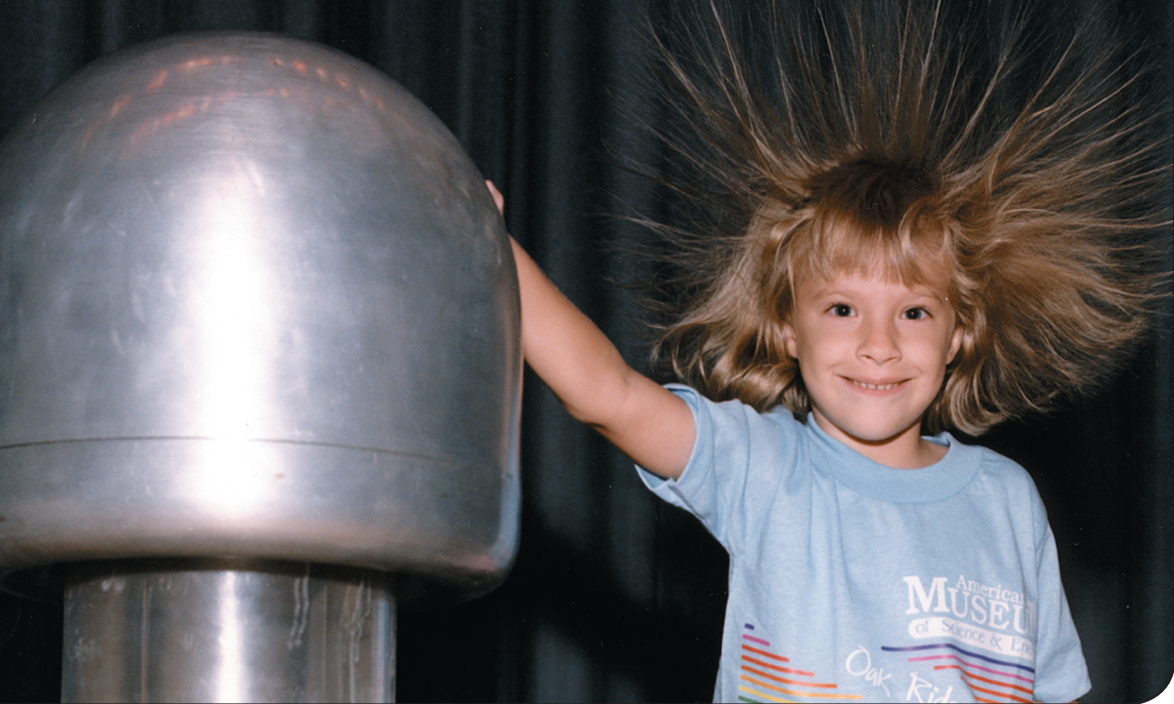




? Το παιδί αυτό αποκτά ηλεκτρικό φορτίο ακουμπώντας τον φορτισμένο μεταλλικό φλοιό. Οι φορτισμένες τρίχες στο κεφάλι του παιδιού απωθούνται και στέκονται όρθια. Τι θα συνέβαινε αν το παιδί καθόταν μέσα σε έναν μεγάλο, φορτισμένο μεταλλικό φλοιό; Θα αποκτούσε (i) φορτίο ίδιου προσήμου με τον φλοιό και οι τρίχες του θα στέκονταν όρθιες· (ii) φορτίο αντίθετου προσήμου από τον φλοιό, και οι τρίχες του θα στέκονταν όρθιες· (iii) μηδενικό φορτίο, και οι τρίχες του θα έπεφταν πάλι κάτω· (iv) οτιδήποτε από τα παραπάνω, ανάλογα με το ποσό του φορτίου στον φλοιό.

22 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Προσβλέπουμε στα...

- 22.1 Πώς μπορεί να καθοριστεί η ποσότητα φορτίου σε κλειστή επιφάνεια εξετάζοντας το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια.
- 22.2 Τι εννοείται με τον όρο ηλεκτρική ροή, και πώς υπολογίζεται.
- 22.3 Πώς ο νόμος του Gauss σχετίζεται με την ηλεκτρική ροή δια μέσου κλειστής επιφάνειας με το φορτίο που εγκλείεται από την επιφάνεια.
- 22.4 Πώς να χρησιμοποιούμε τον νόμο του Gauss για να υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω συμμετρικής κατανομής φορτίου.
- 22.5 Πού βρίσκεται το φορτίο σε έναν φορτισμένο αγωγό.

Ανατρέχουμε στα...

- 21.4-21.6 Ηλεκτρικά πεδία και στις ιδιότητές τους.

Η συζήτηση γύρω από τον νόμο του Gauss στο εδάφιο αυτό βασίζεται και εμπνεύστηκε από τις καινοτόμες ιδέες των Ruth W. Chabay και Bruce A. Sherwood στο βιβλίο «*Electric and Magnetic Interactions*» (John Wiley & Sons, 1994).

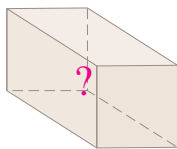
Στη φυσική, ένα σημαντικό εργαλείο για την απλούστευση επίλυσης προβλημάτων είναι οι *ιδιότητες συμμετρίας* των συστημάτων. Πολλά φυσικά συστήματα έχουν συμμετρία: για παράδειγμα, ένα κυλινδρικό σώμα δε φαίνεται διαφορετικό μετά από μία περιστροφή του γύρω από τον άξονά του και μια φορτισμένη μεταλλική σφαίρα φαίνεται η ίδια μετά την περιστροφή της γύρω από οποιονδήποτε άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες ιδέες συμμετρίας μαζί με μια νέα αρχή, που λέγεται *νόμος του Gauss*, για να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς ηλεκτρικών πεδίων. Για παράδειγμα, το ηλεκτρικό πεδίο γραμμικής ή επίπεδης κατανομής φορτίου, το οποίο υπολογίστηκε στο Εδάφ. 21.5 χρησιμοποιώντας μερικές αρκετά επίπονες ολοκληρώσεις, μπορεί να βρεθεί σε λίγα βήματα με την βοήθεια του νόμου του Gauss. Ο νόμος του Gauss όμως είναι κάτι περισσότερο από ένας τρόπος που διευκολύνει ορισμένους υπολογισμούς. Αποτελεί μια θεμελιώδη έκφραση της σχέσης μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων και ηλεκτρικών πεδίων. Μεταξύ άλλων, ο νόμος του Gauss μας βοηθά να κατανοήσουμε πώς κατανέμεται το ηλεκτρικό φορτίο σε αγωγίμα σώματα.

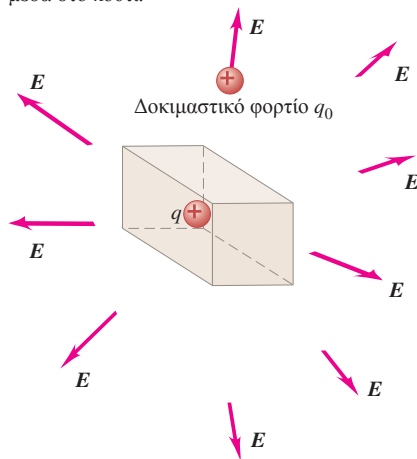
Η κύρια ουσία του νόμου του Gauss είναι η εξής. Όταν δίνεται μια γενική κατανομή φορτίου, περιβάλλουμε την κατανομή με μια φανταστική επιφάνεια, που περικλείει το φορτίο. Στη συνέχεια εξετάζουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε διάφορα σημεία πάνω στη φανταστική επιφάνεια. Ο νόμος του Gauss εκφράζει τη σχέση μεταξύ του πεδίου σε όλα τα σημεία της επιφάνειας και του ολικού φορτίου, που περικλείει η επιφάνεια. Αυτό μπορεί να ακούγεται σαν έμμεσος τρόπος έκφρασης των πραγμάτων, όμως αποδεικνύεται, ότι είναι μια τρομερά χρήσιμη σχέση. Στα επόμενα κεφάλαια θα χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα την εμβάθυνση στον χαρακτήρα των ηλεκτρικών πεδίων που προσφέρει ο νόμος του Gauss.

22.1 Πώς μπορούμε να μετρήσουμε το φορτίο μέσα σε ένα κιβώτιο χωρίς να το ανοίξουμε;

(a) Κιβώτιο που περιέχει άγνωστη ποσότητα φορτίου.



(b) Χρήση δοκιμαστικού φορτίου έξω από το κουτί για να ελέγξουμε την ποσότητα φορτίου μέσα στο κουτί.



22.1 ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ

Στο Κεφ. 21 υποβάλαμε το εξής ερώτημα. «Όταν δοθεί μια κατανομή φορτίου, ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλεί η κατανομή αυτή σε σημείο P ;» Είδαμε ότι η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα μπορούσε να βρεθεί θεωρώντας την κατανομή ως ένα σύνολο σημειακών φορτίων, καθένα από τα οποία δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο E σύμφωνα με την Εξ. (21.7). Το ολικό πεδίο στο σημείο P είναι λοιπόν το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων που δημιουργούνται από όλα τα σημειακά φορτία.

Υπάρχει όμως μια εναλλακτική σχέση μεταξύ της κατανομής των φορτίων και των ηλεκτρικών πεδίων. Για να ανακαλύψουμε τη σχέση αυτή, αντιστρέφουμε το ερώτημα του Κεφ. 21 και ρωτάμε, «Μπορούμε να εξαγάγουμε πληροφορία για τη κατανομή φορτίου σε μια περιοχή, εάν γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε αυτή την περιοχή;»

Ας αναφέρουμε ένα παράδειγμα. Θεωρήστε το κιβώτιο του Σχ. 22.1a, το οποίο μπορεί να περικλείει ή να μην περικλείει ηλεκτρικό φορτίο. Θα θεωρήσουμε, ότι το κιβώτιο είναι κατασκευασμένο από υλικό που δεν επηρεάζει τα ηλεκτρικά πεδία: η θεωρήση αυτή είναι παρόμοια με το αβαρές νήμα και το κεκλιμένο επίπεδο χωρίς τριβή. Ακόμα καλύτερα, θεωρούμε το κιβώτιο ως μια *φανταστική* επιφάνεια που μπορεί να περικλείει ή να μην περικλείει κάποιο φορτίο. Θα αναφερόμαστε στο κιβώτιο ως μια **κλειστή επιφάνεια**, επειδή περικλείει πλήρως έναν όγκο. Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε πόσο φορτίο (εάν υπάρχει) βρίσκεται μέσα στο κιβώτιο;

Γνωρίζοντας ότι μια κατανομή φορτίου δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο και ότι ένα ηλεκτρικό πεδίο ασκεί δύναμη σε ένα δοκιμαστικό φορτίο, πλησιάζουμε στο κιβώτιο ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 . Υπολογίζοντας τη δύναμη F που αισθάνεται το δοκιμαστικό φορτίο σε διαφορετικές θέσεις, κατασκευάζετε μια τρισδιάστατη απεικόνιση του ηλεκτρικού πεδίου $E = F/q_0$ στο χώρο εκτός του κιβωτίου. Στην περίπτωση του Σχ. 22.1b, προκύπτει, ότι η απεικόνιση είναι η ίδια με αυτή που δημιουργείται από θετικό σημειακό φορτίο (Σχ. 21.28a). Η ακριβής τιμή του σημειακού φορτίου που περικλείεται από το κιβώτιο μπορεί να προσδιορισθεί από τις λεπτομέρειες της απεικόνισης του χάρτη του πεδίου.

Για να προσδιορίσουμε το περιεχόμενο του κιβωτίου χρειάζεται στην πραγματικότητα να μετρήσουμε το E μόνο στην *επιφάνεια* του κιβωτίου. Στο Σχ. 22.2a υπάρχει στο εσωτερικό του κιβωτίου μόνο ένα *θετικό* σημειακό φορτίο, και στο Σχ. 22.2b υπάρχουν δύο τέτοια φορτία. Οι μορφές του πεδίου στις επιφάνειες των κιβωτίων διαφέρουν στις λεπτομέρειες, όμως και στις δύο περιπτώσεις το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται από το κιβώτιο προς τα έξω. Τα Σχ. 22.2c και 22.2d αναφέρονται σε περιπτώσεις με ένα και δύο *αρνητικά* σημειακά φορτία, αντίστοιχα, στο εσωτερικό του κιβωτίου. Και πάλι οι λεπτομέρειες του E στην επιφάνεια είναι διαφορετικές, όμως και στις δύο περιπτώσεις το πεδίο κατευθύνεται προς το *εσωτερικό* του κάθε κιβωτίου.

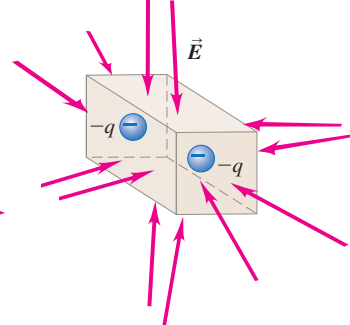
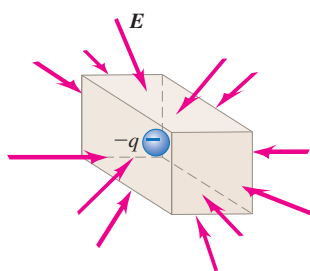
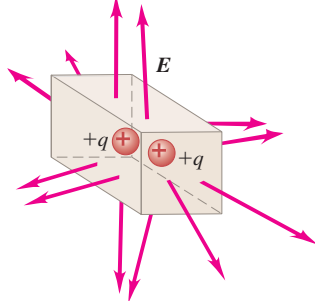
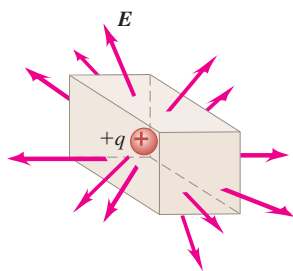
22.2 Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια κιβωτίου που περιέχει (a) μοναδικό θετικό σημειακό φορτίο, (b) δύο θετικά σημειακά φορτία, (c) μοναδικό αρνητικό σημειακό φορτίο, ή (d) δύο αρνητικά σημειακά φορτία.

(a) Θετικό φορτίο στο εσωτερικό κιβωτίου, ροή προς τα έξω

(b) Θετικά φορτία στο εσωτερικό κιβωτίου, ροή προς τα έξω

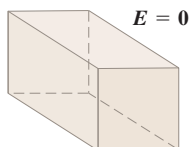
(c) Αρνητικό φορτίο στο εσωτερικό κιβωτίου, ροή προς τα μέσα

(d) Αρνητικά φορτία στο εσωτερικό κιβωτίου, ροή προς τα μέσα

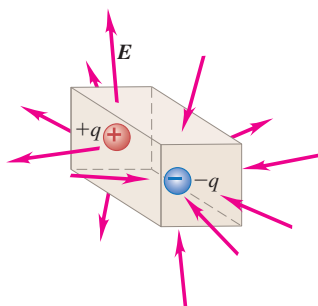


22.3 Τρεις περιπτώσεις, στις οποίες το *ολικό* φορτίο στο εσωτερικό κιβωτίου είναι μηδέν και δεν υπάρχει ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου της επιφάνειας του κιβωτίου. (a) Κενό κιβώτιο με $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. (b) Κιβώτιο με ένα θετικό σημειακό φορτίο και ένα ίσο και αντίθετο φορτίο. (c) Κενό κιβώτιο τοποθετημένο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

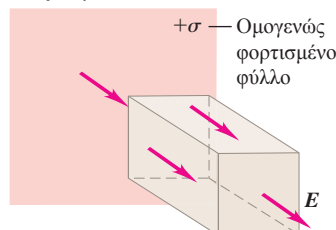
(a) Μηδενικό φορτίο στο εσωτερικό του κιβωτίου, μηδενική ροή



(b) Μηδενικό *ολικό* φορτίο στο εσωτερικό του κιβωτίου, ροή προς το εσωτερικό ίση και αντίθετη προς τη ροή προς το εξωτερικό.



(c) Μηδενικό φορτίο στο εσωτερικό του κιβωτίου, ροή προς το εσωτερικό ίση και αντίθετη προς τη ροή προς το εξωτερικό.



Ηλεκτρική Ροή και Έγκλειστο Φορτίο

Στο Εδάφ. 21.4 αναφερθήκαμε στην αναλογία μεταξύ των διανυσμάτων του ηλεκτρικού πεδίου και των διανυσματικών ταχυτήτων στη ροή ενός ρευστού. Η αναλογία αυτή μπορεί να είναι χρήσιμη, παρά το γεγονός ότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν «ρέει» στην πραγματικότητα. Χρησιμοποιώντας αυτή την αναλογία στα Σχ. 22.2a και 22.2b, στα οποία τα διανύσματα του ηλεκτρικού πεδίου κατευθύνονται από την επιφάνεια προς τα έξω, λέμε ότι υπάρχει μια **ηλεκτρική ροή** προς τα έξω. Στα Σχ. 22.2c και 22.2d τα διανύσματα του $\mathbf{E}$ κατευθύνονται προς την επιφάνεια και η ηλεκτρική ροή προς το εσωτερικό.

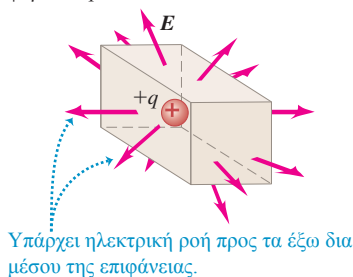
Το Σχ. 22.2 υποδεικνύει μια απλή συσχέτιση: Θετικό φορτίο στο εσωτερικό κιβωτίου αντιστοιχεί σε ηλεκτρική ροή προς το εξωτερικό δια μέσου της επιφάνειας του κιβωτίου και αρνητικό φορτίο σε ηλεκτρική ροή προς το εσωτερικό του κιβωτίου. Τι συμβαίνει όταν *δεν υπάρχει* φορτίο στο εσωτερικό του κιβωτίου; Στο Σχ. 22.3a το κιβώτιο είναι κενό και $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ παντού, οπότε δεν υπάρχει ηλεκτρική ροή από το κιβώτιο προς τα έξω ή προς το εσωτερικό του. Το κιβώτιο του Σχ. 22.3b περικλείει δύο ίσα σημειακά φορτία, ένα θετικό και ένα αρνητικό, με συνέπεια το *ολικό* φορτίο στο εσωτερικό του κιβωτίου να είναι μηδέν. Υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο το οποίο στη μισή επιφάνει του κιβωτίου «ρέει προς το εσωτερικό» αυτού και στην άλλη μισή «ρέει προς το εξωτερικό». Επομένως δεν υπάρχει *ολική* ηλεκτρική ροή προς ή από το κιβώτιο.

Το κιβώτιο του Σχ. 22.3c είναι κενό. Όμως υπάρχει φορτίο *εκτός* του κιβωτίου· το κιβώτιο τοποθετείται με τη μία πλευρά του παράλληλη προς ένα ομογενώς φορτισμένο φύλλο απείρων διαστάσεων το οποίο δημιουργεί ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο κάθετο στο φύλλο (όπως αναφέρθηκε στο Παρ. 21.11 του Εδάφ. 21.5). Στη μία βάση του κιβωτίου το $\mathbf{E}$ κατευθύνεται προς το κιβώτιο· στην απέναντι βάση το $\mathbf{E}$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό του κιβωτίου· στις πλευρικές επιφάνειες το $\mathbf{E}$ είναι παράλληλο προς αυτές και δεν κατευθύνεται ούτε προς το εσωτερικό του κιβωτίου ούτε προς το εξωτερικό του. Όπως και στο Σχ. 22.3b, η ροή προς το εσωτερικό του κιβωτίου στη μία πλευρά του αντισταθμίζεται από τη ροή προς το εξωτερικό του από την άλλη πλευρά. Επομένως, και στις τρεις περιπτώσεις του Σχ. 22.3 δεν υπάρχει *ολική* ροή δια μέσου της επιφάνειας του κιβωτίου και δεν περικλείει το κιβώτιο *ολικό* φορτίο.

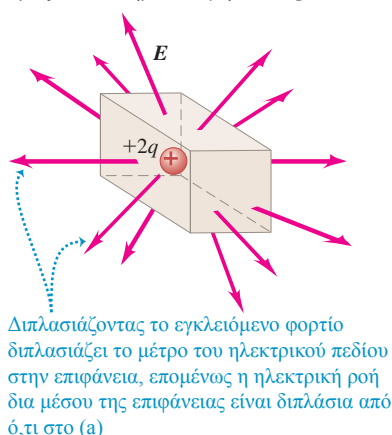
Τα Σχ. 22.2 και 22.3 καταδεικνύουν μια συσχέτιση μεταξύ του *προσήμου* (θετικό, αρνητικό ή μηδέν) του *ολικού* φορτίου που περικλείεται από κλειστή επιφάνεια και της φοράς (προς τα έξω, προς το εσωτερικό ή προς πουθενά) της ολικής ηλεκτρικής ροής δια μέσου της επιφάνειας. Υπάρχει επίσης μια συσχέτιση μεταξύ του *μέτρου* του ολικού φορτίου που βρίσκεται στο εσωτερικό της κλειστής επιφάνειας και του *μεγέθους* της ολικής «ροής»

22.4 Τρία κιβώτια το καθένα από τα οποία περικλείει θετικό σημειακό φορτίο.

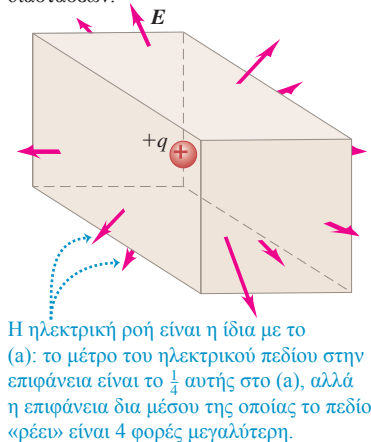
(a) Κιβώτιο που περικλείει θετικό σημειακό φορτίο $+q$



(b) Το ίδιο κιβώτιο με το (a) που περικλείει όμως θετικό σημειακό φορτίο $+2q$



(c) Το ίδιο θετικό σημειακό φορτίο $+q$, που όμως περικλείεται από κιβώτιο διπλάσιων διαστάσεων.



του E δια μέσου ολόκληρης της επιφάνειας. Στα δύο σχήματα, Σχ. 22.4a και Σχ. 22.4b υπάρχει ένα σημειακό φορτίο στο εσωτερικό του κιβωτίου, αλλά στο Σχ. 22.4b το μέτρο του φορτίου είναι διπλάσιο από αυτό του Σχ. 22.4a και, επομένως, το E είναι παντού διπλάσιο σε μέτρο από ό,τι στο Σχ. 22.4a. Αν λάβουμε υπόψη την αναλογία με τη ροή ρευστού, προκύπτει ότι η ολική ροή προς τα έξω του Σχ. 22.4b είναι διπλάσια από αυτή του Σχ. 22.4a. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι η ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου της επιφάνειας είναι ευθέως ανάλογη προς το μέτρο του ολικού φορτίου που περικλείει το κιβώτιο.

Το συμπέρασμα αυτό είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος του κιβωτίου. Το σημειακό φορτίο $+q$ του Σχ. 22.4c περικλείεται από κιβώτιο διπλάσιων γραμμικών διαστάσεων από αυτό του Σχ. 22.4a. Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ενός σημειακού φορτίου μειώνεται με την απόσταση σύμφωνα με τη σχέση $1/r^2$ και, επομένως, η μέση τιμή του μέτρου του πεδίου E σε κάθε επιφάνεια του μεγάλου κιβωτίου του Σχ. 22.4c είναι ακριβώς το $1/4$ της μέσης τιμής του μέτρου του E στην αντίστοιχη πλευρά του Σχ. 22.4a. Όμως κάθε επιφάνεια του μεγάλου κιβωτίου έχει εμβαδόν τετραπλάσιο από το εμβαδόν της αντίστοιχης επιφάνειας του μικρού κιβωτίου. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα, ότι η προς τα έξω ηλεκτρική ροή είναι η *ίδια* για τα δύο κιβώτια, εάν *ορίσουμε* την ηλεκτρική ροή ως εξής: Για κάθε πλευρά του κιβωτίου υπολογίζουμε το γινόμενο της μέσης τιμής της κάθετης συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου E επί το εμβαδόν της πλευράς αυτής· στη συνέχεια προσθέτουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από όλες τις πλευρές του κιβωτίου. Συνέπεια του ορισμού αυτού είναι ότι η ηλεκτρική ροή που οφείλεται σε σημειακό φορτίο στο εσωτερικό κιβωτίου είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος του κιβωτίου και εξαρτάται μόνο από το συνολικό φορτίο μέσα στο κιβώτιο.

Για να συνοψίσουμε, για τις ειδικές περιπτώσεις μιας κλειστής επιφάνειας σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και κατανομής σημειακών φορτίων ή φορτισμένων φύλλων απείρων διαστάσεων καταλήξαμε στα εξής συμπεράσματα:

1. Η φορά της ολικής ροής προς τα έξω ή προς το εσωτερικό δια μέσου μιας κλειστής επιφάνειας εξαρτάται από το πρόσημο του φορτίου που αυτή περικλείει.
2. Φορτία εκτός της επιφάνειας δεν συνεισφέρουν στην ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου της επιφάνειας.
3. Η ολική ηλεκτρική ροή είναι ευθέως ανάλογη προς το ολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια αλλά είναι κατά τα άλλα ανεξάρτητη από το μέγεθος της κλειστής επιφάνειας.

Οι παρατηρήσεις αυτές αποτελούν μια ποιοτική διατύπωση του *νόμου του Gauss*.

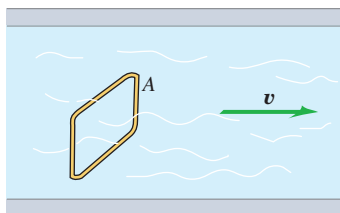
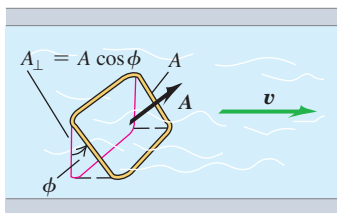
Προκύπτει το ερώτημα εάν οι παρατηρήσεις αυτές ισχύουν και για άλλες μορφές κατανομής ηλεκτρικού φορτίου και κλειστών επιφανειών αυθαίρετου σχήματος. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα δειχθεί, ότι είναι καταφατική. Για να αιτιολογήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό, απαιτείται μια ακριβής μαθηματική διατύπωση του τι εννοούμε με τον όρο ηλεκτρική ροή. Αυτό αναπτύσσεται στο επόμενο εδάφιο.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΕΔΑΦΙΟΥ 22.1 Εάν όλες οι διαστάσεις του κιβωτίου του Σχ. 22.2a αυξηθούν κατά έναν παράγοντα 3, πώς θα αλλάξει η ηλεκτρική ροή δια μέσου του κιβωτίου; (i) Η ροή θα είναι $3^2 = 9$ φορές μεγαλύτερη· (ii) η ροή θα είναι 3 φορές μεγαλύτερη· (iii) η ροή θα παραμείνει αμετάβλητη· (iv) η ροή θα είναι το $1/3$ της αρχικής· (v) η ροή θα είναι το $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ · (vi) οι πληροφορίες δεν επαρκούν για να γνωρίζουμε. ■

22.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΡΟΗΣ

Στο προηγούμενο εδάφιο παρουσιάσαμε την έννοια της *ηλεκτρικής ροής*. Χρησιμοποιήσαμε αυτή την έννοια, για να εισαγάγουμε μια ποιοτική έκφραση του νόμου του Gauss: Η ολική ηλεκτρική ροή μέσω μιας κλειστής επιφάνειας είναι ευθέως ανάλογη του ολικού φορτίου το οποίο περικλείεται από αυτή την επιφάνεια. Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον νόμο, πρέπει να γνωρίζουμε, πώς να *υπολογίζουμε* την ηλεκτρική ροή.

(a) Συρμάτινο ορθογώνιο πλαίσιο μέσα σε ρευστό

(b) Το συρμάτινο ορθογώνιο πλαίσιο στραμμένο κατά γωνία ϕ 

22.5 Η παροχή όγκου του ρευστού δια μέσου του ορθογώνιου συρμάτινου τετραγώνου (a) είναι vA όταν η επιφάνεια του τετραγώνου είναι κάθετη στο v και (b) είναι $vA \cos \phi$ όταν το ορθογώνιο στραφεί κατά γωνία ϕ .

Για να γίνει αυτό, ας κάνουμε και πάλι χρήση της αναλογίας μεταξύ ενός ηλεκτρικού πεδίου E και του πεδίου των διανυσμάτων ταχύτητας v ενός ρευστού που ρέει. (Επίσης, να έχετε υπόψη, ότι αυτή είναι μόνο μια απλή αναλογία· ένα ηλεκτρικό πεδίο δεν κινείται ως ένα ρευστό.)

Ροή: Αναλογία με ροή ρευστού

Το Σχ. 22.5 δείχνει ένα ρευστό, το οποίο κινείται σταθερά από τα αριστερά προς τα δεξιά. Ας εξετάσουμε την παροχή όγκου dV/dt (π.χ. σε κυβικά μέτρα ανά δευτερόλεπτο) δια μέσου του συρμάτινου πλαισίου σχήματος ορθογώνιου και εμβαδού A . Όταν η επιφάνεια είναι κάθετη στην ταχύτητα v (Σχ. 22.5a) και η ταχύτητα είναι η ίδια σε όλα τα σημεία του ρευστού, η παροχή όγκου dV/dt δια μέσου της επιφάνειας είναι ίση προς το γινόμενο του εμβαδού A επί την ταχύτητα v :

$$\frac{dV}{dt} = vA$$

Εάν το ορθογώνιο στραφεί κατά γωνία ϕ (Σχ. 22.5b) ώστε η επιφάνειά του να μην είναι κάθετη στην ταχύτητα v , το εμβαδόν που λαμβάνεται υπόψη είναι η εικόνα που βλέπουμε κοιτάζοντας κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας v . Τα όρια του εμβαδού αυτού τα οποία ορίζονται από την κόκκινη γραμμή του Σχ. 22.5b και η επιφάνεια, η οποία συμβολίζεται με $A_{\perp}$, έχει εμβαδόν ίσο προς την *προβολή* του A σε μία επιφάνεια κάθετη στη κατεύθυνση της v . Δύο από τις πλευρές της ορθογώνιας προβολής έχουν το ίδιο μήκος με το αρχικό ορθογώνιο, αλλά οι άλλες δύο έχουν μικρότερο μήκος κατά τον παράγοντα $\cos \phi$, με αποτέλεσμα το εμβαδόν της προβολής $A_{\perp}$ της επιφάνειας A να είναι ίσο προς $A \cos \phi$. Η παροχή όγκου δια της επιφάνειας A είναι λοιπόν ίση προς

$$\frac{dV}{dt} = vA \cos \phi$$

Αν $\phi = 90^\circ$, $dV/dt = 0$: το επίπεδο που ορίζει το ορθογώνιο συρμάτινο πλαίσιο είναι παράλληλο προς τη ροή και δεν διέρχεται ρευστό από αυτό.

Επίσης, ο όρος $v \cos \phi$ είναι η συνιστώσα του διανύσματος v κάθετη στο επίπεδο της επιφάνειας A . Εάν ονομάσουμε τη συνιστώσα αυτή $v_{\perp}$, μπορούμε να εκφράσουμε τη παροχή όγκου ως

$$\frac{dV}{dt} = v_{\perp} A$$

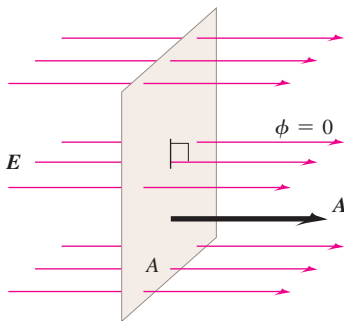
Μπορούμε να διατυπώσουμε τη παροχή όγκου με πιο συμπαγή τρόπο χρησιμοποιώντας το *διανυσματικό εμβαδόν* A , ένα διάνυσμα το οποίου το μέτρο είναι ίσο προς A και η διεύθυνσή του είναι κάθετη στο επίπεδο της επιφάνειας που περιγράφουμε. Το διανυσματικό εμβαδόν A περιγράφει και το μέτρο του εμβαδού της επιφάνειας και το προσανατολισμό της επιφάνειας στο χώρο. Συναρτηήσει του A μπορούμε να εκφράσουμε τη παροχή όγκου δια του ορθογώνιου του Σχ. 22.5b με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

22.6 Επίπεδη επιφάνεια σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Η ηλεκτρική ροή Φ_E που διαπερνά την επιφάνεια ισούται με το εσωτερικό γινόμενο του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ και του διανυσματικού εμβαδού $\mathbf{A}$.

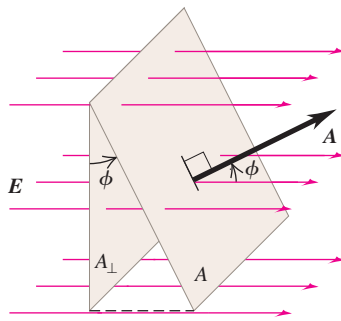
(a) Επιφάνεια κάθετη στο ηλεκτρικό πεδίο:

- Τα $\mathbf{E}$ και $\mathbf{A}$ παράλληλα (γωνία μεταξύ $\mathbf{E}$ και $\mathbf{A}$ είναι $\phi = 0$).
- Η ροή $\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = EA$.



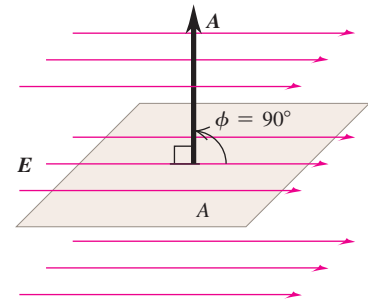
(b) Επιφάνεια υπό κλίση κατά γωνία ϕ ως προς το πεδίο :

- Η γωνία ανάμεσα στα $\mathbf{E}$ και $\mathbf{A}$ είναι ϕ .
- Η ροή $\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = EA \cos \phi$.



(c) Επιφάνεια παράλληλη προς το ηλεκτρικό πεδίο:

- Τα $\mathbf{E}$ και $\mathbf{A}$ είναι κάθετα (γωνία μεταξύ $\mathbf{E}$ και $\mathbf{A}$ είναι $\phi = 90^\circ$).
- Η ροή $\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = EA \cos 90^\circ = 0$.



Ροή Ομογενούς Ηλεκτρικού Πεδίου

Χρησιμοποιώντας την αναλογία μεταξύ ηλεκτρικού πεδίου και ροής ρευστού, ορίζουμε τώρα την ηλεκτρική ροή κατά τον ίδιο τρόπο, όπως ακριβώς ορίσαμε την παροχή όγκου ενός ρευστού: απλά αντικαθιστούμε την ταχύτητα του ρευστού v με το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$. Το σύμβολο που χρησιμοποιούμε για την ηλεκτρική ροή είναι Φ_E (ο δείκτης E υποδεικνύει ότι πρόκειται για ηλεκτρική ροή). Θεωρήστε την επίπεδη επιφάνεια εμβαδού A κάθετη σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ (Σχ. 22.6a). Ορίζουμε την ηλεκτρική ροή δια της επιφάνειας αυτής να είναι ίση προς το γινόμενο του μέτρου του πεδίου E επί το εμβαδόν A :

$$\Phi_E = EA$$

BIO Εφαρμογή Ροή δια μέσου του στόματος καρχαρία Προσκυνητή

Σε αντίθεση με τους επιθετικούς σαρκοβόρους καρχαρίες, όπως είναι οι λευκοί, ο καρχαρίας Προσκυνητής τρέφεται παθητικά με το πλαγκτόν, που βρίσκεται στο νερό που διέρχεται από τα βράγχια του, καθώς αυτός κολυμπάει. Για να επιβιώσει τρώγοντας τόσο μικρούς οργανισμούς, απαιτείται μια τεράστια ροή νερού δια μέσου του τεράστιου στόματος του καρχαρία, που μπορεί να είναι και ένα μέτρο στην οριζόντια κατεύθυνση. Η ροή του νερού – το γινόμενο της ταχύτητας του καρχαρία μέσα στο νερό επί το εμβαδόν του στόματός του – μπορεί να φτάνει τα $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$ (500 λίτρα το δευτερόλεπτο). Ομοίως, η ροή του ηλεκτρικού πεδίου δια μέσου επιφάνειας εξαρτάται από το μέτρο του πεδίου και το εμβαδόν της επιφάνειας (καθώς και από το σχετικό προσανατολισμό του πεδίου και της επιφάνειας).



Γενικότερα, μπορούμε να απεικονίσουμε την Φ_E με γραμμές του πεδίου που διέρχονται διαμέσου της επιφάνειας A . Αυξάνοντας την επιφάνεια, περισσότερες γραμμές του πεδίου $\mathbf{E}$ διαπερνούν την επιφάνεια αυξάνοντας τη ροή· ισχυρότερο πεδίο συνεπάγεται πυκνότερες γραμμές του $\mathbf{E}$ και, επομένως, περισσότερες γραμμές ανά μονάδα επιφάνειας, με συνέπεια να αυξάνεται η ροή.

Εάν η επιφάνεια A είναι επίπεδη αλλά δεν είναι κάθετη στο πεδίο $\mathbf{E}$, τότε διαπερνούν την επιφάνεια λιγότερες δυναμικές γραμμές. Στην περίπτωση αυτή, σημασία έχει το εμβαδόν της επιφάνειας το οποίο αντιλαμβανόμαστε, όταν κοιτάζουμε κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{E}$. Αυτό είναι ίσο προς το $A_\perp$ στο Σχ. 22.6b και το οποίο ισούται με $A \cos \phi$ (να το συγκρίνετε με το Σχ. 22.5b). Γενικεύουμε τον ορισμό μας για την ηλεκτρική ροή για ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και επίπεδη επιφάνεια με τη σχέση

$$\Phi_E = EA \cos \phi \quad (\text{ηλεκτρική ροή για ομογενές πεδίο } \mathbf{E}, \text{ επίπεδη επιφάνεια}) \quad (22.1)$$

Επειδή $E \cos \phi$ είναι η συνιστώσα του διανύσματος $\mathbf{E}$, κάθετη στην επιφάνεια, μπορούμε να διατυπώσουμε την Εξ. (22.1) ως

$$\Phi_E = E_\perp A \quad (\text{ηλεκτρική ροή για ομογενές πεδίο } \mathbf{E}, \text{ επίπεδη επιφάνεια}) \quad (22.2)$$

Χρησιμοποιώντας την έννοια του διανυσματικού εμβαδού $\mathbf{A}$, μπορούμε να εκφράσουμε την ηλεκτρική ροή ως βαθμωτό μέγεθος ίσο με το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{E}$ και $\mathbf{A}$:

$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{ηλεκτρική ροή για ομογενές πεδίο } \mathbf{E}, \text{ επίπεδη επιφάνεια}) \quad (22.3)$$

Οι Εξ. (22.1), (22.2) και (22.3) εκφράζουν την ηλεκτρική ροή για μια *επίπεδη* επιφάνεια και ένα *ομογενές* ηλεκτρικό πεδίο για διαφορετικούς αλλά

ισοδύναμους τρόπους. Η μονάδα ηλεκτρικής ροής στο SI είναι $1 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. Σημειώστε ότι, εάν η επιφάνεια είναι παράλληλη στο πεδίο, τα $\mathbf{E}$ και $\mathbf{A}$ είναι κάθετα και η ροή μηδενική (Σχ. 22.6c).

Μπορούμε να παραστήσουμε την κατεύθυνση μιας διανυσματικής επιφάνειας $\mathbf{A}$ χρησιμοποιώντας το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$, κάθετο στην επιφάνεια: το σύμβολο $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το αρχικό γράμμα της λέξης normal, που σημαίνει «κάθετος». Επομένως

$$\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{n}} \quad (22.4)$$

Μια επιφάνεια έχει δύο πλευρές και, επομένως, δύο δυνατές κατευθύνσεις για τα $\hat{\mathbf{n}}$ και $\mathbf{A}$. Πρέπει πάντοτε να καθορίζουμε, ποια κατεύθυνση επιλέγουμε. Στο Εδάφ. 22.1 συσχέτισαμε το φορτίο στο εσωτερικό μιας κλειστής επιφάνειας με την ηλεκτρική ροή δια μέσου της επιφάνειας. Σε μια κλειστή επιφάνεια επιλέγουμε πάντα το $\hat{\mathbf{n}}$ να κατευθύνεται προς τα έξω και αναφερόμαστε σε ροή προς το εξωτερικό της επιφάνειας. Επομένως, αυτό που αποκαλέσαμε «ηλεκτρική ροή προς τα έξω» στο Εδάφ. 22.1 αντιστοιχεί σε θετική τιμή της Φ_E και αυτό που αποκαλέσαμε «ροή προς το εσωτερικό» αντιστοιχεί σε αρνητική τιμή της Φ_E .

Ροή Μη Ομογενούς Ηλεκτρικού Πεδίου

Τι συμβαίνει, εάν το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ δεν είναι ομογενές αλλά μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο πάνω στην επιφάνεια A ; Ή, τι συμβαίνει εάν η A είναι τμήμα καμπύλης επιφάνειας; Στις περιπτώσεις αυτές χωρίζουμε την επιφάνεια σε πολλά στοιχειώδη εμβαδά dA , καθένα από τα οποία έχει μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ κάθετο σε αυτό και ένα διανυσματικό εμβαδόν $d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} dA$. Υπολογίζουμε την ηλεκτρική ροή δια μέσου καθενός από αυτά τα στοιχειώδη εμβαδά και ολοκληρώνουμε τα αποτελέσματα, για να υπολογίσουμε την ολική ροή:

$$\Phi_E = \int E \cos \phi \, dA = \int E_{\perp} \, dA = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (22.5)$$

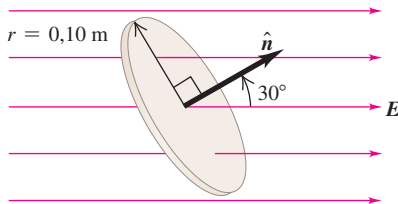
Ονομάζουμε το ολοκλήρωμα αυτό **επιφανειακό ολοκλήρωμα** της συνιστώσας $E_{\perp}$ σε όλη την επιφάνεια, ή το επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$. Σε συγκεκριμένα προβλήματα, η μία μορφή είναι συνήθως πιο πρόσφορη από τις υπόλοιπες. Το Παρ. 22.3 στο τέλος του εδαφίου δείχνει τη χρήση της Εξ. (22.5).

Στην Εξ. (22.5) η ηλεκτρική ροή $\int E_{\perp} dA$ είναι ίση με τη μέση τιμή της κάθετης συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου, πολλαπλασιασμένη επί το εμβαδόν της επιφάνειας. Αυτό συμπίπτει με τον ίδιο ορισμό, στον οποίο οδηγηθήκαμε στο Εδάφ. 22.1, με τη διαφορά, ότι τώρα εκφράζεται περισσότερο μαθηματικά. Στο επόμενο εδάφιο θα διαπιστώσουμε τη συσχέτιση μεταξύ της ολικής ηλεκτρικής ροής δια μέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας, ανεξάρτητα από το σχήμα της, και της ποσότητας φορτίου που περικλείεται από την επιφάνεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ ΔΙΑ ΜΕΣΟΥ ΕΝΟΣ ΔΙΣΚΟΥ

Ένας δίσκος ακτίνας $0,10\text{ m}$ προσανατολίζεται έτσι, ώστε το μοναδιαίο του διάνυσμα $\hat{n}$ να σχηματίζει γωνία 30° με ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E μέτρου $2,0 \times 10^3\text{ N/C}$ (Σχ. 22.7). (Επειδή δεν πρόκειται για κλειστή επιφάνεια, δεν υπάρχει «εσωτερική» ή «εξωτερική». Γι' αυτό πρέπει να καθορίσουμε την κατεύθυνση του $\hat{n}$ στο σχήμα.) (a) Πόση είναι η ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου του δίσκου; (b) Πόση είναι η ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου του δίσκου, εάν στραφεί έτσι ώστε το $\hat{n}$ να είναι κάθετο στο E ; (c) Πόση είναι η ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου του δίσκου, εάν το $\hat{n}$ είναι παράλληλο προς το E ;

22.7 Η ηλεκτρική ροή Φ_E δια μέσου ενός δίσκου εξαρτάται από τη γωνία μεταξύ της καθέτου $\hat{n}$ στο δίσκο και του ηλεκτρικού πεδίου E .



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το πρόβλημα αυτό αφορά μια επίπεδη επιφάνεια σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και, επομένως, εφαρμόζουμε, όσα αναπτύχθηκαν στο εδάφιο αυτό. Υπολογίζουμε την ηλεκτρική ροή από την Εξ. (22.1).

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Το εμβαδόν του δίσκου είναι $A = \pi(0,10\text{ m})^2 = 0,0314\text{ m}^2$ και η γωνία μεταξύ των E και $A = A\hat{n}$ είναι $\phi = 30^\circ$, επομένως από την Εξ. (22.1),

$$\begin{aligned}\Phi_E &= EA \cos \phi = (2,0 \times 10^3\text{ N/C})(0,0314\text{ m}^2)(\cos 30^\circ) \\ &= 54\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

(b) Η κάθετη στο δίσκο είναι τώρα κάθετη στο E και, επομένως, $\phi = 90^\circ$, $\cos \phi = 0$ και $\Phi_E = 0$.

(c) Η κάθετη στο δίσκο είναι τώρα παράλληλη στο E και, επομένως, $\phi = 0$ και $\cos \phi = 1$:

$$\begin{aligned}\Phi_E &= EA \cos \phi = (2,0 \times 10^3\text{ N/C})(0,0314\text{ m}^2)(1) \\ &= 63\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Το αποτέλεσμα στο ερώτημα (b) είναι μικρότερο από αυτό του ερωτήματος (a), το οποίο με τη σειρά του είναι μικρότερο από αυτό στο ερώτημα (c). Αναμένεται αυτή η διαφορά;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.2 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ ΔΙΑ ΜΕΣΟΥ ΕΝΟΣ ΚΥΒΟΥ

Φανταστική κυβική επιφάνεια ακμής L βρίσκεται σε περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου E . Υπολογίστε την ηλεκτρική ροή δια μέσου κάθε έδρας του κύβου και την ολική ροή δια μέσου του κύβου, όταν ο κύβος (a) προσανατολιστεί έτσι ώστε δύο πλευρές να είναι κάθετες στο πεδίο E , όπως φαίνεται στο Σχ. 22.8a· (b) στραφεί κατά γωνία θ ως προς κατακόρυφο άξονα (Σχ. 22.8b).

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Επειδή το πεδίο E είναι ομογενές και κάθε μια από τις έξι πλευρές του κύβου είναι επίπεδη, υπολογίζουμε τη ροή Φ_{Ei} δια μέσου κάθε έδρας χρησιμοποιώντας τις Εξ. (22.3) και (22.4). Η ολική ροή δια μέσου του κύβου είναι το άθροισμα των έξι ροών ξεχωριστά.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Το Σχήμα 22.8a δείχνει τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{n}_1$ μέχρι $\hat{n}_6$ για κάθε έδρα· κάθε μοναδιαίο διάνυσμα κατευθύνεται από την κλειστή επιφάνεια του κύβου προς τα έξω. Η γωνία μεταξύ των E και $\hat{n}_1$ είναι 180° , η γωνία μεταξύ των E και $\hat{n}_2$ είναι 0° , και η γωνία μεταξύ του E και καθενός από τα άλλα τέσσερα μοναδιαία διανύσματα είναι 90° . Κάθε έδρα έχει εμβαδόν L^2 και επομένως οι ροές δια μέσου κάθε επιφάνειας είναι

$$\begin{aligned}\Phi_{E1} &= E \cdot \hat{n}_1 A = EL^2 \cos 180^\circ = -EL^2 \\ \Phi_{E2} &= E \cdot \hat{n}_2 A = EL^2 \cos 0^\circ = +EL^2 \\ \Phi_{E3} &= \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90^\circ = 0\end{aligned}$$

Η ροή είναι αρνητική στην έδρα 1, στην οποία το E κατευθύνεται προς το εσωτερικό του κύβου και θετική στην έδρα 2, στην οποία το E κατευθύνεται προς το εξωτερικό του κύβου. Η ολική ροή δια μέσου του κύβου είναι

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6} \\ &= -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

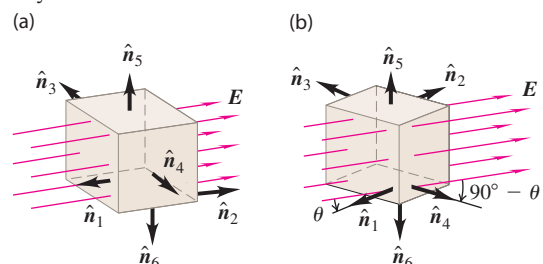
(b) Το πεδίο E σχηματίζει αμβλεία γωνία με τα μοναδιαία διανύσματα 1 και 3, επομένως οι ροές δια μέσου των εδρών 1 και 3 είναι αρνητικές· το E σχηματίζει οξεία γωνία με τα μοναδιαία διανύσματα 2 και 4, επομένως οι ροές δια μέσου των εδρών 2 και 4 είναι θετικές. Υπολογίζουμε κάθε ροή ξεχωριστά

$$\begin{aligned}\Phi_{E1} &= E \cdot \hat{n}_1 A = EL^2 \cos(180^\circ - \theta) = -EL^2 \cos \theta \\ \Phi_{E2} &= E \cdot \hat{n}_2 A = +EL^2 \cos \theta \\ \Phi_{E3} &= E \cdot \hat{n}_3 A = EL^2 \cos(90^\circ + \theta) = -EL^2 \sin \theta \\ \Phi_{E4} &= E \cdot \hat{n}_4 A = EL^2 \cos(90^\circ - \theta) = +EL^2 \sin \theta \\ \Phi_{E5} &= \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90^\circ = 0\end{aligned}$$

Η ολική ροή $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$ δια μέσου της επιφάνειας του κύβου είναι και πάλι μηδέν.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Καταλήξαμε στο ίδιο συμπέρασμα στη συζήτησή μας του Σχ. 22.3c: Η ροή ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου δια μέσου κλειστής επιφάνειας, στο εσωτερικό της οποίας δεν υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο, είναι ίση με το μηδέν.

22.8 Ηλεκτρική ροή ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου E διαμέσου κιβωτίου σχήματος κύβου ακμής L σε δύο προσανατολισμούς.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.3 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ ΔΙΑ ΜΕΣΟΥ ΕΝΟΣ ΚΥΒΟΥ

Σημειακό φορτίο ίσο προς $q = +3,0 \mu\text{C}$ περιβάλλεται από μια φανταστική σφαίρα ακτίνας $r = 0,20 \text{ m}$, της οποίας το κέντρο συμπίπτει με τη θέση του φορτίου (Σχ. 22.9). Να βρεθεί η ηλεκτρική ροή δια μέσου της σφαίρας, η οποία οφείλεται στο φορτίο.

ΛΥΣΗ

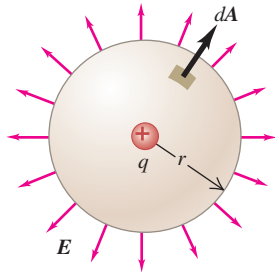
ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Η επιφάνεια δεν είναι επίπεδη και το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι ομογενές, επομένως για να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή (ζητούμενη μεταβλητή) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον γενικό ορισμό, Εξ. (22.5). Επειδή το κέντρο της σφαίρας συμπίπτει με το σημειακό φορτίο, το $\mathbf{E}$ σε κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας κατευθύνεται προς το εξωτερικό της σφαίρας και είναι κάθετο στην επιφάνεια. Η θετική φορά και για το $\mathbf{E}$ και για το $\hat{n}$ είναι προς τα έξω, επομένως $E_{\perp} = E$ και η ροή δια μέσου της στοιχειώδους επιφάνειας dA

είναι $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA$. Αυτό απλοποιεί σημαντικά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της Εξ. (22.5).

ΕΠΙΛΥΣΗ: Πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της Εξ. (22.5), $\Phi_E = \int E dA$. Σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας r το ηλεκτρικό πεδίο έχει το ίδιο μέτρο $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Επομένως το E μπορεί να θεωρηθεί σταθερό στον υπολογισμό και να τεθεί εκτός του ολοκληρώματος, το οποίο γίνεται $\Phi_E = E \int dA = EA$, όπου A είναι το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας: $A = 4\pi r^2$. Συνεπώς, η ολική ροή δια μέσου της σφαίρας είναι

$$\begin{aligned}\Phi_E &= EA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \\ &= \frac{3,0 \times 10^{-6} \text{ C}}{8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2} = 3,4 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Η ακτίνα r της σφαίρας απαλείφεται από το αποτέλεσμα για την Φ_E . Θα είχαμε υπολογίσει την ίδια ροή για μια σφαίρα ακτίνας $2,0 \text{ m}$ ή 200 m . Καταλήξαμε ουσιαστικά στο ίδιο συμπέρασμα στη συζήτησή μας του Σχ. 22.4 στο Εδάφ. 22.1, όπου θεωρήσαμε δύο κλειστές επιφάνειες σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με διαφορετικές διαστάσεις, στο εσωτερικό των οποίων υπήρχε σημειακό φορτίο. Διαπιστώσαμε τότε ότι η ροή του $\mathbf{E}$ είναι ανεξάρτητη από τις διαστάσεις της επιφάνειας: το ίδιο ισχύει και για σφαιρική επιφάνεια. Πράγματι, η ροή δια μέσου μιας οποιασδήποτε επιφάνειας, που περικλείει ένα σημειακό φορτίο, είναι ανεξάρτητη από το σχήμα ή το μέγεθος της επιφάνειας, όπως θα δούμε σύντομα.



22.9 Ηλεκτρική ροή δια μέσου μιας σφαίρας, της οποίας το κέντρο συμπίπτει με τη θέση του φορτίου.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΕΔΑΦΙΟΥ 22.2 Κατατάξτε τις παρακάτω επιφάνειες από τη θετικότερη προς την αρνητικότερη ηλεκτρική ροή: (i) επίπεδη ορθογώνια επιφάνεια με διανυσματικό εμβαδόν $\mathbf{A} = (6,0 \text{ m}^2)\mathbf{i}$ σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = (4,0 \text{ N/C})\mathbf{j}$. (ii) επίπεδη κυκλική επιφάνεια με διανυσματικό εμβαδόν $\mathbf{A} = (3,0 \text{ m}^2)\mathbf{j}$ σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = (4,0 \text{ N/C})\mathbf{i} + (2,0 \text{ N/C})\mathbf{j}$. (iii) επίπεδη τετραγωνική επιφάνεια με διανυσματικό εμβαδόν $\mathbf{A} = (3,0 \text{ m}^2)\mathbf{i} + (7,0 \text{ m}^2)\mathbf{j}$ σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = (4,0 \text{ N/C})\mathbf{i} - (2,0 \text{ N/C})\mathbf{j}$. (iv) επίπεδη ελλειψοειδής επιφάνεια με διανυσματικό εμβαδόν $\mathbf{A} = (3,0 \text{ m}^2)\mathbf{i} - (7,0 \text{ m}^2)\mathbf{j}$ σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = (4,0 \text{ N/C})\mathbf{i} - (2,0 \text{ N/C})\mathbf{j}$.

22.3 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

Ο **νόμος του Gauss** είναι μια εναλλακτική διατύπωση του νόμου του Coulomb. Αν και είναι πλήρως ισοδύναμος με το νόμο του Coulomb, ο νόμος του Gauss περιέχει ένα διαφορετικό τρόπο έκφρασης της σχέσης μεταξύ ηλεκτρικού φορτίου και ηλεκτρικού πεδίου. Διατυπώθηκε από τον Γερμανό Karl Friedrich Gauss (Καρλ Φρίντριχ Γκάους, 1777-1855), έναν από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των αιώνων (Σχ. 22.10).

Σημειακό Φορτίο Μέσα σε Σφαιρική Επιφάνεια

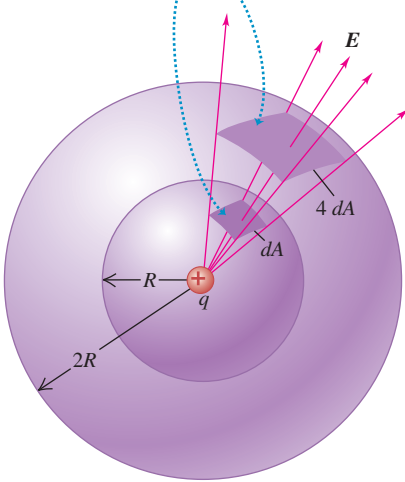
Ο νόμος του Gauss δηλώνει, ότι η ολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια (επιφάνεια που περικλείει έναν καθορισμένο όγκο) είναι ανάλογη προς το ολικό φορτίο που περικλείει η επιφάνεια. Στο Εδάφ. 22.1 αναφερθήκαμε ποιοτικά στη σχέση αυτή· τώρα θα την αναπτύξουμε με επιστημονική αυστηρότητα. Για την ανάπτυξη αυτής της σχέσης, αρχίζουμε με το πεδίο ενός θετικού σημειακού φορτίου q . Οι δυναμικές γραμμές του εκτείνονται ακτινικά προς τα έξω προς όλες τις κατευθύνσεις και είναι ισοδύναμες. Τοποθετούμε το φορτίο αυτό στο κέντρο μιας

22.10 Ο Carl Friedrich Gauss συνέβαλε στην ανάπτυξη πολλών κλάδων των μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένων της διαφορικής γεωμετρίας, της πραγματικής ανάλυσης και της θεωρίας αριθμών. Η καμπύλη σε σχήμα «κώδωνα» αποτελεί μία από τις ανακαλύψεις του. Ο Gauss έκανε κορυφαίες έρευνες για τον γήινο μαγνητισμό και υπολόγισε την τροχιά του πρώτου αστεροειδούς που ανακαλύφθηκε.



22.11 Προβολή ενός στοιχείου επιφάνειας dA μιας σφαίρας ακτίνας R σε μια ομόκεντρη σφαίρα ακτίνας $2R$. Με την προβολή πολλαπλασιάζεται κάθε γραμμική διάσταση επί δύο, έτσι ώστε το στοιχείο επιφάνειας γίνεται $4dA$.

Ο ίδιος αριθμός γραμμών και η ίδια ροή διαπερνούν και τα δύο στοιχεία επιφάνειας.



φανταστικής σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R . Το μέτρο E του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο πάνω στην επιφάνεια δίνεται από την σχέση

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

Σε κάθε σημείο πάνω στην επιφάνεια το διάνυσμα $\mathbf{E}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια και το μέτρο του είναι το ίδιο σε κάθε σημείο, ακριβώς όπως στο Παράδ. 22.3 (Εδάφ. 22.2).

Η ολική ηλεκτρική ροή είναι το γινόμενο του μέτρου του πεδίου επί το ολικό εμβαδόν $A = 4\pi R^2$ της σφαίρας:

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (22.6)$$

Η ροή είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα R της σφαίρας. Εξαρτάται μόνο από το φορτίο q που περικλείεται από τη σφαίρα.

Μπορούμε επίσης να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιώντας τις δυναμικές γραμμές. Θεωρούμε δύο σφαίρες ακτινών R και $2R$ (Σχ. 22.11) με κέντρο το σημειακό φορτίο q . Κάθε δυναμική γραμμή που διέρχεται από τη μικρότερη σφαίρα, διέρχεται επίσης και από τη μεγαλύτερη σφαίρα με αποτέλεσμα η ολική ροή δια μέσου κάθε σφαίρας να είναι η ίδια.

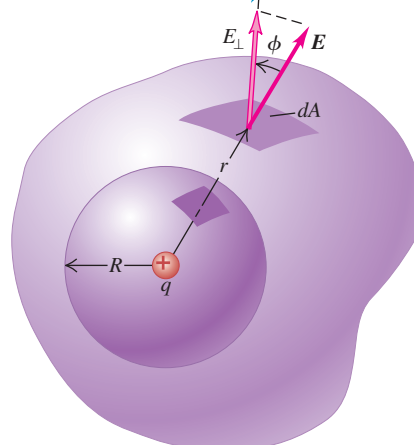
Ότι ισχύει για ολόκληρη τη σφαίρα ισχύει και για ένα μέρος της επιφάνειάς της. Στο Σχ. 22.11 το σκιασμένο στοιχειώδες εμβαδόν dA στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας R προβάλλεται πάνω στην επιφάνεια ακτίνας $2R$ με γραμμές που εκκινούν από το κέντρο και διέρχονται από τα περιφερειακά σημεία του dA . Η προβαλλόμενη επιφάνεια στη μεγάλη σφαίρα είναι προφανώς $4dA$. Επειδή όμως το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου είναι αντιστρόφως ανάλογο του r^2 , το μέτρο του στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας $2R$ έχει το $1/4$ της τιμής που έχει πάνω στην επιφάνεια ακτίνας R . Υπολογίζουμε την ηλεκτρική ροή δια μέσου κάθε τμήματος και ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα για να υπολογίσουμε την ολική ροή. Επομένως, η ηλεκτρική ροή είναι η ίδια για τα δύο εμβαδά και είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα της σφαίρας.

Σημειακό Φορτίο Μέσα σε Μη Σφαιρική Επιφάνεια

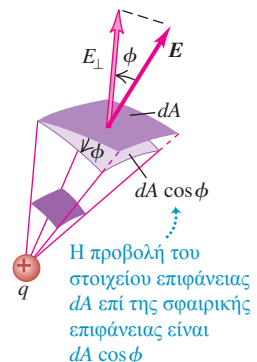
Μπορούμε να επεκτείνουμε αυτή την τεχνική της προβολής σε μη σφαιρικές επιφάνειες. Αντί να θεωρήσουμε μια δευτέρα σφαίρα, περιβάλλουμε τη σφαίρα ακτίνας R με μια επιφάνεια ακανόνιστου σχήματος, όπως στο Σχ. 22.12a. Θεωρούμε ένα στοιχειώδες εμβαδόν dA πάνω στην ακανόνιστη επιφάνεια. Παρατηρούμε ότι η επιφάνεια αυτή είναι *μεγαλύτερη* από την αντίστοιχη στοιχειώδη επιφάνεια σφαίρας στην ίδια απόσταση από το φορτίο q . Εάν η κάθετη στην ακανόνιστη επιφάνεια σχηματίζει γωνία ϕ με μια ακτινική γραμμή από το φορτίο q , δύο πλευρές της επιφάνειας που προβάλλεται

22.12 Υπολογίζοντας την ηλεκτρική ροή δια μέσου μη σφαιρικής επιφάνειας.

(a) Η κάθετη στην επιφάνεια προς τα έξω σχηματίζει γωνία ϕ με την κατεύθυνση του $\mathbf{E}$.



(b)



στη σφαιρική επιφάνεια υφίστανται προοπτική σμίκρυνση πολλαπλασιαζόμενες επί έναν παράγοντα $\cos \phi$ (Σχ. 22.12b). Οι άλλες δύο πλευρές παραμένουν αναλλοίωτες. Έτσι, η ηλεκτρική ροή δια μέσου της στοιχειώδους σφαιρικής επιφάνειας ($E dA$) είναι ισοδύναμη με την ηλεκτρική ροή δια μέσου της ακανόνιστης στοιχειώδους επιφάνειας $E dA \cos \phi$.

Μπορούμε να διαιρέσουμε ολόκληρη την ακανόνιστου σχήματος επιφάνεια σε στοιχειώδη εμβαδά dA , να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή $E dA \cos \phi$ για το καθένα και να αθροίσουμε τα αποτελέσματα ολοκληρώνοντας, όπως στην Εξ. (22.5). Καθένα από τα στοιχειώδη εμβαδά προβάλλεται πάνω σε ένα αντίστοιχο στοιχειώδες εμβαδόν της σφαίρας. Έτσι η *ολική* ηλεκτρική ροή δια μέσου της ακανόνιστης επιφάνειας, που δίνεται από οποιαδήποτε μορφή της Εξ. (22.5), πρέπει να είναι ίση προς την ολική ροή δια μέσου της σφαίρας, η οποία, σύμφωνα με την Εξ. (22.6), είναι ίση προς q/ϵ_0 . Επομένως, για την ακανόνιστη επιφάνεια

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (22.7)$$

Η Εξ. (22.7) ισχύει για *οποιοδήποτε* σχήμα επιφάνειας ή μέγεθος, με την προϋπόθεση, ότι η επιφάνεια, που περικλείει το φορτίο q , είναι *κλειστή*. Ο κύκλος στο σύμβολο ολοκλήρωσης μας υπενθυμίζει, ότι το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε ολόκληρη την *κλειστή* επιφάνεια.

Τα στοιχειώδη εμβαδά dA και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $\hat{n}$ κατευθύνονται πάντοτε προς το *εξωτερικό* του όγκου, που οριοθετείται από την επιφάνεια. Η ηλεκτρική ροή είναι τότε θετική σε περιοχές, όπου το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται προς το εξωτερικό της επιφάνειας και αρνητική, όπου κατευθύνεται προς το εσωτερικό. Επίσης, η συνιστώσα $E_{\perp}$ είναι θετική σε σημεία, όπου το $\mathbf{E}$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό της επιφάνειας και αρνητική, όπου κατευθύνεται προς το εσωτερικό της.

Εάν το σημειακό φορτίο στο Σχ. 22.12 είναι αρνητικό, τότε το πεδίο $\mathbf{E}$ κατευθύνεται ακτινικά προς το *εσωτερικό*: η γωνία ϕ είναι τότε μεγαλύτερη από 90° , το συνημίτονο αυτής είναι αρνητικό και το ολοκλήρωμα στην Εξ. (22.7) είναι αρνητικό. Όμως επειδή το q είναι αρνητικό, η Εξ. (22.7) ισχύει.

Για μια κλειστή επιφάνεια, η οποία δεν περικλείει φορτία, ισχύει

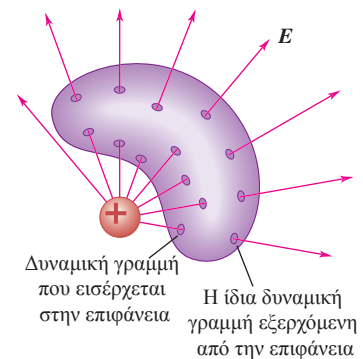
$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Αυτή είναι η μαθηματική έκφραση του γεγονότος ότι, όταν ένας χώρος δεν περικλείει φορτία, οσεςδήποτε δυναμικές γραμμές (προκαλούμενες από φορτία *έξω* από τον χώρο), οι οποίες εισέρχονται από τη μία πλευρά πρέπει να εξέρχονται από την άλλη. (Στο Εδάφ. 22.1 καταλήξαμε στο ίδιο συμπέρασμα θεωρώντας την ειδική περίπτωση ορθογώνιου κιβωτίου σε ομογενές πεδίο). Το Σχ. 22.13 δείχνει αυτή την περίπτωση. *Δυναμικές γραμμές μπορούν να αρχίζουν ή να τελειώνουν σε μια περιοχή του χώρου μόνο όταν υπάρχει φορτίο σε εκείνη την περιοχή.*

Γενική Μορφή του Νόμου του Gauss

Τώρα έρχεται το τελευταίο βήμα για την απόδειξη της γενικής μορφής του νόμου του Gauss. Υποθέτουμε, ότι η επιφάνεια περικλείει όχι μόνο ένα σημειακό φορτίο, αλλά περισσότερα φορτία $q_1, q_2, q_3, \dots$. Το ολικό (συνιστάμενο) ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ σε κάθε σημείο είναι ίσο προς το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων $\mathbf{E}$ των μεμονωμένων φορτίων. Ονομάζουμε $Q_{\text{εγκ}}$ το *ολικό* φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια: $Q_{\text{εγκ}} = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$. Επίσης ονομάζουμε $\mathbf{E}$ το *ολικό* πεδίο στη στοιχειώδη επιφάνεια dA και $E_{\perp}$ την κάθετη συνιστώσα του $\mathbf{E}$ στο επίπεδο του στοιχείου αυτού (δηλαδή κάθετο στο dA). Τότε μπορούμε να γράψουμε μια σχέση όπως την Εξ. (22.7) για καθένα φορτίο και το αντίστοιχό του πεδίο και να προσθέσουμε τα αποτελέσματα. Όταν γίνει αυτό, προκύπτει η γενική διατύπωση του νόμου του Gauss:

22.13 Σημειακό φορτίο έξω από μια κλειστή επιφάνεια. Αν μια δυναμική γραμμή από το εξωτερικό φορτίο εισέρχεται στην επιφάνεια σε κάποιο σημείο, πρέπει να εγκαταλείψει την επιφάνεια σε κάποιο άλλο σημείο.



Νόμος του Gauss: $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{εγκ}}}{\epsilon_0}$ (22.8)

Ηλεκτρική ροή δια μέσου της κλειστής επιφάνειας εμβαδού $A =$ επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\mathbf{E}$

Ολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια

Ηλεκτρική σταθερά

Η ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου κλειστής επιφάνειας είναι ίση προς το ολικό ηλεκτρικό φορτίο στο εσωτερικό της επιφάνειας διαιρεμένο με ϵ_0 .

ΠΡΟΣΟΧΗ Οι επιφάνειες Gauss είναι φανταστικές. Να θυμάστε ότι η κλειστή επιφάνεια Gauss στο νόμο του Gauss είναι φανταστική· δεν απαιτείται κανένα υλικό αντικείμενο στη θέση της επιφάνειας. Συχνά αναφερόμαστε σε μια κλειστή επιφάνεια στο νόμο του Gauss ως **γκαουσιανή επιφάνεια**.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Q_{encl} και τις διάφορες μορφές έκφρασης της ηλεκτρικής ροής, στην Εξ. (22.5), μπορούμε να εκφράσουμε το νόμο του Gauss με τις ακόλουθες ισοδύναμες μορφές:

Διάφορες μορφές του νόμου του Gauss:

Μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$

Συνιστώσα του $\mathbf{E}$ κάθετη στην επιφάνεια

Ολικό φορτίο περικλειόμενο από την επιφάνεια

Ηλεκτρική ροή δια μέσου κλειστής επιφάνειας

Γωνία μεταξύ $\mathbf{E}$ και καθέτου στην επιφάνεια

Στοιχειώδες εμβαδόν επιφάνειας

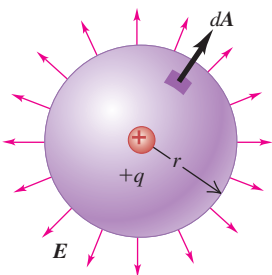
Διανυσματικό στοιχειώδες εμβαδό

Ηλεκτρική σταθερά

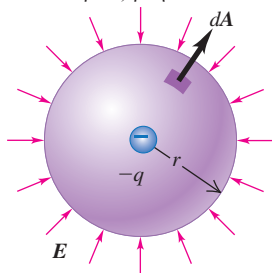
$\Phi_E = \oint E \cos \phi \, dA = \oint E_{\perp} \, dA = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{εγκ}}}{\epsilon_0}$ (22.9)

22.14 Σφαιρικές επιφάνειες Gauss γύρω από (a) θετικό σημειακό φορτίο και (b) αρνητικό σημειακό φορτίο.

(a) Επιφάνεια Gauss γύρω από θετικό φορτίο: θετική (προς τα έξω) ροή



(b) Επιφάνεια Gauss γύρω από αρνητικό φορτίο: αρνητική (προς το εσωτερικό) ροή



Όπως και με την Εξ. (22.5), όλες οι διαφορετικές μορφές του ολοκληρώματος εκφράζουν το ίδιο αποτέλεσμα, την ολική ηλεκτρική ροή, με διαφορετικούς όρους. Σε συγκεκριμένα προβλήματα, η μία μορφή είναι μερικές φορές πιο εύχρηστη από κάποια άλλη.

Ως παράδειγμα, το **Σχ. 22.14a** δείχνει μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας r γύρω από ένα θετικό φορτίο $+q$. Το ηλεκτρικό πεδίο δείχνει προς το εξωτερικό της γκαουσιανής επιφάνειας και επομένως σε κάθε σημείο της επιφάνειας το $\mathbf{E}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $d\mathbf{A}$, δηλαδή $\phi = 0$, και το $E_{\perp}$ είναι ίσο προς το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Επειδή το E είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία της επιφάνειας, μπορούμε να το θέσουμε έξω από το ολοκλήρωμα στην Εξ. (22.9). Τότε, το υπόλοιπο ολοκλήρωμα είναι $\int dA = A = 4\pi r^2$, δηλαδή το εμβαδόν της σφαίρας. Συμπερασματικά, η Εξ. (22.9) γίνεται

$$\Phi_E = \oint E_{\perp} \, dA = \oint \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Το περικλειόμενο φορτίο $Q_{\text{εγκ}}$ είναι απλά το φορτίο $+q$ και επομένως συμφωνεί το αποτέλεσμα με το νόμο του Gauss. Εάν η γκαουσιανή επιφάνεια περικλείει **αρνητικό** σημειακό φορτίο, όπως στο Σχ. 22.14b, τότε το $\mathbf{E}$ δείχνει προς το εσωτερικό της επιφάνειας σε κάθε σημείο σε αντίθετη κατεύθυνση με το $d\mathbf{A}$. Τότε $\phi = 180^\circ$ και το $E_{\perp}$ είναι ίσο προς το αρνητικό μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $E_{\perp} = -E = -| -q | / 4\pi\epsilon_0 r^2 = -q / 4\pi\epsilon_0 r^2$. Η Εξ. (22.9) παίρνει τη μορφή

$$\Phi_E = \oint E_{\perp} \, dA = \oint \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

Και πάλι συμφωνεί η έκφραση αυτή με το νόμο του Gauss, επειδή το περικλειόμενο φορτίο στο Σχ. 22.14b είναι $Q_{\text{εγκ}} = -q$.

Στις Εξ. (22.8) και (22.9), το $Q_{\text{εγκ}}$ είναι ίσο πάντα με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των (θετικών και αρνητικών) φορτίων, που περικλείονται από την επιφάνεια Gauss, και $\mathbf{E}$ είναι το **ολικό** πεδίο σε κάθε σημείο της επιφάνειας. Να σημειωθεί επίσης, ότι το πεδίο αυτό γενικά οφείλεται εν μέρει

σε φορτία μέσα στην επιφάνεια και εν μέρει σε φορτία έξω από την επιφάνεια. Σύμφωνα όμως με το Σχ. 22.13, τα εξωτερικά φορτία δεν συνεισφέρουν στην ολική ροή δια μέσου της επιφάνειας. Έτσι, οι Εξ. (22.8) και (22.9) εξακολουθούν να είναι σωστές, ακόμη και όταν υπάρχουν επιπλέον φορτία έξω από την επιφάνεια, τα οποία συνεισφέρουν στο ηλεκτρικό πεδίο πάνω στην επιφάνεια. Όταν το $Q_{\text{εγκ}} = 0$, η ολική ροή δια μέσου της επιφάνειας Gauss πρέπει να είναι μηδέν, ακόμη και όταν σε μερικές περιοχές μπορεί να υπάρχει θετική ροή και σε άλλες αρνητική ροή (βλ. Σχ. 22.3b).

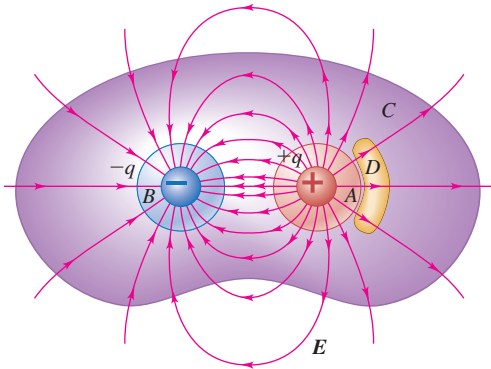
Ο νόμος του Gauss είναι η οριστική απάντηση στο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή του Εδαφ. 22.1: «Αν η μορφή του ηλεκτρικού πεδίου είναι γνωστή σε μια δεδομένη περιοχή, τι μπορούμε να προσδιορίσουμε σχετικά με την κατανομή του φορτίου στην περιοχή αυτή;» Μας δίνει μια σχέση μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια και της κατανομής του φορτίου στο εσωτερικό αυτής της επιφάνειας. Σε μερικές περιπτώσεις όμως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Gauss και για το αντίστροφο πρόβλημα: «Αν είναι γνωστή η κατανομή του φορτίου, τι μπορούμε να προσδιορίσουμε σχετικά με το ηλεκτρικό πεδίο, που δημιουργείται από την κατανομή του φορτίου;» Ο νόμος του Gauss μπορεί μερικές φορές να μην φαίνεται εύχρηστος για να απαντήσει στο ερώτημα αυτό, επειδή ο υπολογισμός του ολοκληρώματος στην Εξ. (22.8) μοιάζει ακατόρθωτο έργο. Μερικές φορές είναι πράγματι ισχύει, ενώ σε άλλες περιπτώσεις ανέλπιστα εύκολο. Ακολουθεί ένα παράδειγμα, το οποίο δεν περιλαμβάνει καθόλου ολοκλήρωση· θα αναπτύξουμε μερικά ακόμα παραδείγματα στο επόμενο εδάφιο.

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.4 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΚΛΕΙΟΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ

Το Σχ. 22.15 δείχνει το πεδίο που δημιουργείται από δύο σημειακά φορτία $+q$ και $-q$ (ηλεκτρικό δίπολο). Βρείτε την ηλεκτρική ροή δια μέσου καθεμιάς από τις κλειστές επιφάνειες A , B , C και D .

ΛΥΣΗ

22.15 Ο ολικός αριθμός των δυναμικών γραμμών, που εξέρχονται από μια κλειστή επιφάνεια, είναι ανάλογος προς το ολικό φορτίο, που αυτή περικλείει.

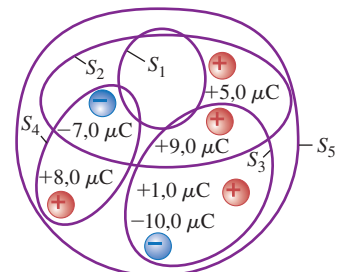


Ο νόμος τους Gauss, Εξ. (22.8), προβλέπει, ότι ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου κλειστής επιφάνειας είναι ίση προς το ολικό εγκλεισμένο φορτίο διαιρεμένο δια του ϵ_0 . Στο Σχ. 22.15, η επιφάνεια A (η κόκκινη επιφάνεια) περικλείει θετικό φορτίο και επομένως $Q_{\text{encl}} = +q$ · η επιφάνεια B (η μπλε επιφάνεια) περικλείει αρνητικό φορτίο και επομένως $Q_{\text{encl}} = -q$. Η επιφάνεια C (η μωβ επιφάνεια) περικλείει και τα δύο φορτία και επομένως $Q_{\text{encl}} = +q + (-q) = 0$ · τέλος η επιφάνεια D (η κίτρινη επιφάνεια) δεν περικλείει φορτίο, άρα $Q_{\text{encl}} = 0$. Επομένως, χωρίς να προβούμε σε ολοκληρώσεις, έχουμε $\Phi_{EA} = +q/\epsilon_0$, $\Phi_{EB} = -q/\epsilon_0$, και $\Phi_{EC} = \Phi_{ED} = 0$. Τα αποτελέσματα αυτά εξαρτώνται μόνο από τα περικλειόμενα φορτία από κάθε γκαουσιανή επιφάνεια και όχι από τα ακριβή σχήματα των επιφανειών.

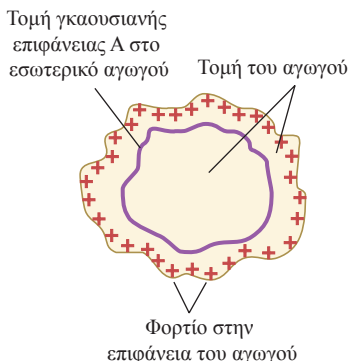
Μπορούμε να συνάγουμε παρόμοια συμπεράσματα εξετάζοντας τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. Όλες οι δυναμικές γραμμές που διαπερνούν την επιφάνεια A κατευθύνονται προς τα έξω, άρα η ροή δια μέσου της A δεν μπορεί παρά να είναι θετική. Ομοίως, η ροή δια μέσου της B δεν μπορεί παρά να είναι αρνητική, καθώς όλες οι δυναμικές γραμμές, που τη διαπερνούν κατευθύνονται προς το εσωτερικό. Για αμφοτέρως τις επιφάνειες C και D , υπάρχουν τόσες δυναμικές γραμμές, που κατευθύνονται προς το εσωτερικό της επιφάνειας, όσες κατευθύνονται προς το εξωτερικό, επομένως η ροή δια μέσου καθεμιάς από αυτές τις επιφάνειες είναι μηδέν.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΕΔΑΦΙΟΥ 22.3 Το Σχ. 22.16 δείχνει έξι σημειακά φορτία που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Πέντε γκαουσιανές επιφάνειες $-S_1$, S_2 , S_3 , S_4 και S_5 · η καθεμία εγκλείει μέρος αυτού του επιπέδου, και το Σχ. 22.16 δείχνει την τομή της κάθε επιφάνειας με το επίπεδο. Κατατάξτε αυτές τις πέντε επιφάνειες ως προς την ηλεκτρική ροή που τις διαπερνά, από την πιο θετική στην πιο αρνητική. ■

22.16 Πέντε γκαουσιανές επιφάνειες και έξι σημειακά φορτία.



22.17 Υπό ηλεκτροστατικές συνθήκες (φορτία σε ηρεμία), οποιαδήποτε περίσσεια φορτίου κείται εξ ολοκλήρου στην επιφάνεια του αγωγού.



22.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ GAUSS

Καταρχήν, ο νόμος του Gauss ισχύει για *οποιαδήποτε* κατανομή φορτίων και για *οποιαδήποτε* κλειστή επιφάνεια. Ο νόμος του Gauss μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε δύο περιπτώσεις. Εάν γνωρίζουμε την κατανομή του φορτίου και εάν αυτή έχει αρκετή συμμετρία, που να μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο νόμο του Gauss, μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο. Ή εάν γνωρίζουμε το πεδίο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss για να υπολογίσουμε την κατανομή του φορτίου, όπως φορτία πάνω σε αγωγίμες επιφάνειες.

Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζουμε παραδείγματα και για τις δύο περιπτώσεις εφαρμογών. Καθώς μελετώνται, ο αναγνώστης καλείται να δώσει έμφαση στο ρόλο των ιδιοτήτων συμμετρίας σε κάθε σύστημα. Θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss, για να υπολογίσουμε τα ηλεκτρικά πεδία τα οποία προκαλούνται από μερικές απλές κατανομές φορτίων· τα αποτελέσματα εμφανίζονται συγκεντρωτικά στον πίνακα στη σύνοψη του κεφαλαίου.

Σε πρακτικά προβλήματα συχνά συναντάμε περιπτώσεις, στις οποίες θέλουμε να γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλείται από μια κατανομή φορτίου σε αγωγό. Οι υπολογισμοί αυτοί απλουστεύονται λόγω της εξής αξιοσημείωτης παρατήρησης: *Όταν περίσσεια φορτίου τοποθετηθεί σε έναν συμπαγή αγωγό και αποκατασταθεί ισορροπία, το φορτίο εγκαθίσταται εξ ολοκλήρου πάνω στην επιφάνεια, όχι στο εσωτερικό του υλικού.* (Με τον όρο *περίσσεια* εννοούμε φορτία πέραν των ιόντων και των ελεύθερων ηλεκτρονίων, που συνθέτουν τον ουδέτερο αγωγό.) Ακολουθεί η απόδειξη. Γνωρίζουμε από τη συζήτηση του Εδαφ. 21.4, ότι σε κάθε ηλεκτροστατική κατάσταση (με όλα τα φορτία σε ηρεμία), το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ σε κάθε σημείο στο εσωτερικό ενός αγωγίμου υλικού είναι μηδέν. Εάν το $\mathbf{E}$ δεν ήταν μηδέν, τα φορτία θα κινούνταν. Ας υποθέσουμε, ότι κατασκευάζουμε μια γκαουσιανή επιφάνεια στο εσωτερικό του αγωγού, όπως η επιφάνεια A στο Σχ. 22.17. Επειδή $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ παντού πάνω στην επιφάνεια αυτή, ο νόμος του Gauss απαιτεί το ολικό φορτίο στο εσωτερικό της να είναι μηδέν. Ας φανταστούμε τώρα, ότι η επιφάνεια συρρικνώνεται, όπως ένα μπαλόνι, μέχρις ότου η περιοχή που περικλείει να γίνει τόσο μικρή, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σημείο P : τότε το φορτίο στο σημείο αυτό πρέπει να είναι μηδέν. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία αυτή οπουδήποτε στο εσωτερικό του αγωγού, οπότε *δεν μπορεί να υπάρξει φορτίο σε οποιοδήποτε σημείο μέσα σε αγωγό· οποιαδήποτε περίσσεια φορτίου σε στατική κατάσταση σε στερεό αγωγό πρέπει να κείται στην επιφάνειά του.* (Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για *στερεό συμπαγή* αγωγό. Στο επόμενο εδάφιο θα συζητήσουμε τι συμβαίνει, όταν υπάρχουν κοιλότητες στο εσωτερικό του.) Θα χρησιμοποιήσουμε συχνά το συμπέρασμα αυτό στα παραδείγματα που ακολουθούν.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 22.1

ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ των σχετικών εννοιών: Ο νόμος του Gauss είναι περισσότερο χρήσιμος στις περιπτώσεις όπου η κατανομή του φορτίου έχει σφαιρική, κυλινδρική ή επίπεδη συμμετρία. Στις περιπτώσεις αυτές η συμμετρία καθορίζει την κατεύθυνση του $\mathbf{E}$. Τότε, ο νόμος του Gauss δίνει το μέτρο του $\mathbf{E}$, αν μας έχει δοθεί η κατανομή φορτίου, και αντίστροφα. Σε κάθε περίπτωση, αρχίζουμε με το ερώτημα: Τι συμμετρία υπάρχει;

ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ του προβλήματος χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα βήματα:

1. Καταγράψτε τα γνωστά και άγνωστα μεγέθη και ταυτοποιήστε τη ζητούμενη μεταβλητή.
2. Επιλέξτε την κατάλληλη κλειστή, φανταστική γκαουσιανή επιφάνεια. Για σφαιρική συμμετρία, χρησιμοποιήστε ομόκεντρη σφαιρική επιφάνεια. Για κυλινδρική συμμετρία, χρησιμοποιήστε ομοαξονική κυλινδρική επιφάνεια με επίπεδα άκρα, κάθετα στον άξονα συμμετρίας (όπως μια κονσέρβα τοματοπελτέ). Για επίπεδη συμμετρία, χρησιμοποιήστε κυλιν-

δρική επιφάνεια (όπως μια κονσέρβα τόνου) με τα επίπεδα άκρα παράλληλα στο επίπεδο.

ΕΠΙΛΥΣΗ του προβλήματος ως εξής:

1. Καθορίστε το κατάλληλο μέγεθος και τη θέση της γκαουσιανής επιφάνειας. Για την εκτίμηση του μέτρου του πεδίου σε συγκεκριμένο σημείο, η επιφάνεια πρέπει να περιλαμβάνει το σημείο αυτό. Μπορεί να βοηθήσει το να τοποθετήσετε τη μία βάση μιας επιφάνειας «κονσέρβας» μέσα σε έναν αγωγό, όπου το $\mathbf{E}$ και άρα το Φ είναι μηδέν, ή να τοποθετήσετε και τις δύο βάσεις της στην ίδια απόσταση από φορτισμένο επίπεδο.
2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint \mathbf{E}_{\perp} dA$ στην Εξ. (22.9). Στην εξίσωση αυτή, το $\mathbf{E}_{\perp}$ είναι η κάθετη συνιστώσα του *ολικού* ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο της γκαουσιανής επιφάνειας. Μια καλά επιλεγμένη γκαουσιανή επιφάνεια πιθανότατα θα κάνει την ολοκλήρωση τετριμμένη ή μη απαραίτητη. Αν η επιφάνεια αποτελείται από πολλές επιμέρους επιφάνειες

συνεχίζεται

νεις, όπως η παράπλευρη επιφάνεια και οι βάσεις ενός κυλίνδρου, τότε το ολοκλήρωμα $\oint E_{\perp} dA$ πάνω σε όλη την κλειστή επιφάνεια είναι ίσο προς το άθροισμα των ολοκληρωμάτων $\int E_{\perp} dA$ πάνω σε όλες τις ξεχωριστές επιφάνειες. Έχετε υπόψιν τα σημεία 3-6 καθώς εργάζεστε.

- Εάν το $\mathbf{E}$ είναι *κάθετο* σε κάθε σημείο μιας επιφάνειας με εμβαδόν A , εάν κατευθύνεται προς τα έξω από το εσωτερικό της επιφάνειας και εάν επίσης έχει το ίδιο μέτρο σε κάθε σημείο της επιφάνειας, τότε $E_{\perp} = E = \text{σταθερό}$ και το $\int E_{\perp} dA$ πάνω σε όλη την επιφάνεια είναι ίσο προς EA . (Εάν το $\mathbf{E}$ κατευθύνεται προς το εσωτερικό, τότε $E_{\perp} = -E$ και $\int E_{\perp} dA = -EA$). Αυτό ισχύει λογικά για μέρος ή για ολόκληρη την γκαουσιανή επιφάνεια που επιλέξατε. Εάν το $\mathbf{E}$ είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια σε κάθε της σημείο, τότε $E_{\perp} = 0$ και το ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια αυτή είναι μηδέν. Αυτό μπορεί να ισχύει για κάποια μέρη κυλινδρικής γκαουσιανής επιφάνειας. Εάν το $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ σε κάθε σημείο της επιφάνειας, τότε το ολοκλήρωμα είναι μηδέν.

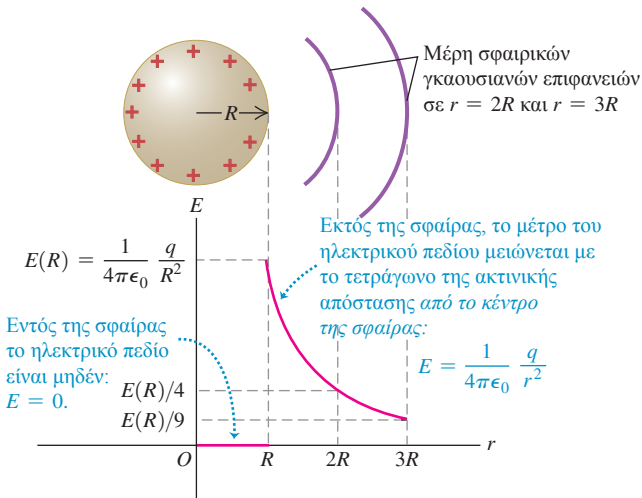
- Ακόμα και όταν δεν υπάρχει φορτίο μέσα σε μια γκαουσιανή επιφάνεια, το πεδίο σε κάθε σημείο της επιφάνειας δεν είναι κατανάγκη μηδέν. Στην περίπτωση αυτή, όμως, η ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου της επιφάνειας είναι πάντα μηδέν.
- Το ολοκλήρωμα της ροής $\oint E_{\perp} dA$ μπορεί να προσεγγιστεί ως η διαφορά μεταξύ των αριθμών των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών που εξέρχονται και εισέρχονται στη γκαουσιανή επιφάνεια. Με αυτήν την έννοια, η ροή δίνει το πρόσημο του εγκλεισμένου φορτίου, αλλά είναι μόνον ανάλογη μ' αυτό: μηδενική ροή αναλογεί σε μηδενικό εγκλεισμένο φορτίο.
- Μετά τον υπολογισμό του $\oint E_{\perp} dA$, χρησιμοποιήστε την Εξ. (22.9) για να υπολογίσετε τη ζητούμενη μεταβλητή.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ της απάντησής σας: Εάν το αποτέλεσμα σας είναι μια *συνάρτηση* που περιγράφει την εξάρτηση του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου από τη θέση, βεβαιωθείτε, ότι αυτό έχει φυσικό νόημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.5 ΠΕΔΙΟ ΜΙΑΣ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΗΣ ΑΓΩΓΙΜΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Τοποθετούμε συνολικό θετικό φορτίο q σε μια συμπαγή αγωγίμη σφαίρα ακτίνας R (Σχ. 22.18). Να υπολογιστεί το $\mathbf{E}$ σε οποιοδήποτε σημείο μέσα ή έξω από τη σφαίρα.

22.18 Υπολογίζοντας το ηλεκτρικό πεδίο μιας αγωγίμης σφαίρας με θετικό φορτίο q . Έξω από τη σφαίρα, το πεδίο είναι το ίδιο, ως εάν όλο το φορτίο να ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο της σφαίρας.



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Όπως αναφέραμε προηγουμένως στο εδάφιο αυτό, ολόκληρο το φορτίο πρέπει να κείται στην επιφάνεια της σφαίρας. Το φορτίο είναι ελεύθερο να κινηθεί στον αγωγό, χωρίς να υπάρχει προτιμώμενη θέση στην επιφάνεια: το φορτίο επομένως κατανέμεται *ομοιόμορφα* πάνω στην επιφάνεια, και το σύστημα έχει σφαιρική συμμετρία. Για να εκμεταλλευτούμε αυτή τη συμμετρία, θεωρούμε ως γκαουσιανή επιφάνεια μια σφαίρα ακτίνας r με κέντρο την αγωγίμη σφαίρα. Μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο μέσα ή έξω από τον αγωγό θεωρώντας $r < R$ ή $r > R$, αντίστοιχα. Και στις δύο περιπτώσεις, το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το $\mathbf{E}$ βρίσκεται πάνω στη γκαουσιανή επιφάνεια.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Η σφαιρική συμμετρία συνεπάγεται ότι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να είναι ακτινική· αυτό ισχύει διότι δεν υπάρχει προτιμώμενη κατεύθυνση παράλληλη στην επιφάνεια, επομένως το $\mathbf{E}$ δεν μπορεί να έχει συνιστώσα παράλληλη στην επιφάνεια. Επίσης δεν υπάρχει προτιμώμενος προσανατολισμός της σφαίρας, επομένως το μέτρο του πεδίου E μπορεί να εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από το κέντρο και πρέπει να έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία στη επιφάνεια της γκαουσιανής.

Για $r > R$ ολόκληρος ο αγωγός βρίσκεται εντός της γκαουσιανής επιφάνειας, άρα το εγκλεισμένο φορτίο είναι q . Το εμβαδόν της γκαουσιανής επιφάνειας είναι $4\pi r^2$, και το $\mathbf{E}$ είναι ομογενές πάνω στην επιφάνεια και κάθετο σ' αυτή σε κάθε σημείο. Το ολοκλήρωμα ροής $\oint E_{\perp} dA$ είναι τότε απλά $E(4\pi r^2)$, και η Εξ. (22.8) δίνει

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{και}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{έξω από φορτισμένη αγωγίμη σφαίρα})$$

Η έκφραση αυτή είναι η ίδια με αυτή για σημειακό φορτίο: έξω από τη φορτισμένη σφαίρα, το πεδίο της είναι το ίδιο με αυτό που θα δημιουργούταν αν το φορτίο ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο της. Ακριβώς έξω από τη σφαίρα, όπου $r = R$,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \quad (\text{στην επιφάνεια φορτισμένης αγωγίμης σφαίρας})$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Η ροή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Να θυμάστε, ότι έχουμε επιλέξει το φορτίο q να είναι *θετικό*. Εάν το φορτίο είναι αρνητικό, το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται ακτινικά προς το κέντρο, αντί ακτινικά προς τα έξω, και η ηλεκτρική ροή δια μέσου της γκαουσιανής επιφάνειας είναι αρνητική. Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου πάνω και στο εξωτερικό της σφαίρας δίνεται από την ίδια σχέση, όπως και προηγουμένως, με τη διαφορά ότι το q εκφράζει το *μέτρο* (απόλυτη τιμή) του φορτίου. ▮

Για $r < R$ έχουμε και πάλι $E(4\pi r^2) = Q_{\text{εγκ}}/\epsilon_0$. Τώρα όμως η γκαουσιανή επιφάνειά μας (η οποία βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του αγωγού) δεν περικλείει κανένα φορτίο, επομένως

συνεχίζεται

$Q_{\text{εγκ}} = 0$. Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι επομένως μηδέν.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Γνωρίζουμε ήδη, ότι $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ στο εσωτερικό αγωγού (σφαιρικού ή μη), όταν τα φορτία είναι σε ηρεμία. Το Σχ. 22.18 δείχνει το E ως συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο της σφαίρας. Να σημειωθεί επίσης, ότι στο όριο καθώς $R \rightarrow 0$, η σφαίρα γίνεται σημειακό φορτίο· υπάρχει τότε μόνο ο προς τα έξω χώρος και το πεδίο δίνεται από τη σχέση $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στο νόμο του Coulomb από το νόμο του Gauss. (Στο Εδάφ. 22.3 αποδείχθηκε ο νόμος του Gauss από το νόμο του Coulomb· οι δύο νόμοι είναι ισοδύναμοι.)

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο για

έναν αγωγίμο σφαιρικό *φλοιό* (έναν σφαιρικό αγωγό με μια ομόκεντρη σφαιρική κοιλότητα στο κέντρο), εάν δεν υπάρχουν φορτία στο εσωτερικό της κοιλότητας. Θεωρούμε μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα r μικρότερη από την ακτίνα της κοιλότητας. Εάν *υπήρχε* πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας, θα έπρεπε να παρουσιάζει σφαιρική (ακτινική) συμμετρία όπως πριν, και επομένως $E = Q_{\text{εγκ}}/4\pi\epsilon_0 r^2$. Αλλά αυτή τη φορά $Q_{\text{εγκ}} = 0$ και $E = 0$ στο εσωτερικό της σφαιρικής κοιλότητας.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ίδια τεχνική για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου στον ενδιάμεσο χώρο μεταξύ μιας φορτισμένης σφαίρας και μιας ομόκεντρης κοίλης αγωγίμης σφαίρας, που την περιβάλλει;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.6 ΠΕΔΙΟ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

Ηλεκτρικό φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος ενός σύρματος πολύ μεγάλου μήκους. Το φορτίο ανά μονάδα μήκους είναι λ (θεωρούμενο θετικό). Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Βρήκαμε στο Παράδ. 21.10 (Εδάφ. 21.5) ότι το πεδίο $\mathbf{E}$ ομογενώς φορτισμένου, άπειρου σύρματος κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω εάν το λ είναι θετικό και ακτινικά προς τα μέσα εάν το λ είναι αρνητικό, και ότι το μέτρο του πεδίου E εξαρτάται μόνο από την ακτινική απόσταση από το σύρμα. Αυτό μας υποδεικνύει να χρησιμοποιήσουμε *κυλινδρική* γκαουσιανή επιφάνεια, ακτίνας r και τυχαίου μήκους l , ομοαξονική με το σύρμα και με τις βάσεις της κάθετες στο σύρμα (Σχ. 22.19).

ΕΠΙΛΥΣΗ: Η ροή δια μέσου των βάσεων της γκαουσιανής μας επιφάνειας είναι μηδενική, διότι το ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στις βάσεις αυτές, και επομένως $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. Στο κυλινδρικό μέρος της επιφάνειάς μας έχουμε $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = E_{\perp} = E$ παντού. (Εάν το λ ήταν αρνητικό, θα είχαμε $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = E_{\perp} = -E$ παντού.) Το εμβαδόν κυλινδρικής επιφάνειας είναι $2\pi r l$, επομένως η ροή δια μέσου της επιφάνειας –και επομένως η ολική ροή Φ_E δια μέσου της γκαουσιανής επιφάνειας– είναι $EA = 2\pi r l E$. Το ολικό εγκλειόμενο φορτίο είναι $Q_{\text{εγκ}} = \lambda l$, και άρα από το νόμο του Gauss, Εξ. (22.8),

$$\Phi_E = 2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \text{και}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (\text{πεδίο γραμμικού φορτίου άπειρου μήκους})$$

Στο Παράδ. 21.10 καταλήξαμε στο ίδιο αυτό αποτέλεσμα με πολύ περισσότερη προσπάθεια.

Εάν το λ είναι *αρνητικό*, το $\mathbf{E}$ κατευθύνεται ακτινικά προς τα μέσα, και στην παραπάνω έκφραση για το E θα πρέπει να θεωρήσουμε το λ ως την απόλυτη τιμή του φορτίου ανά μονάδα μήκους.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Είδαμε στο Παράδ. 21.10, ότι *ολόκληρο* το φορτίο του σύρματος συμβάλλει στο πεδίο σε κάθε σημείο, και όμως λαμβάνουμε υπόψη μόνο το μέρος του φορτίου $Q_{\text{εγκ}} = \lambda l$ εντός της γκαουσιανής επιφάνειας όταν εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss. Δεν υπάρχει καμία ασυνέπεια εδώ· χρειάζεται ολόκληρο το φορτίο για να δώσει στο πεδίο τις ιδιότητες, που μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε το Φ_E τόσο εύκολα, και ο νόμος του Gauss ισχύει πάντα μόνο για το εγκλειόμενο φορτίο. Εάν το σύρμα είναι μικρού μήκους, η συμμετρία του σύρματος άπειρου μήκους εξαφανίζεται, και το E δεν είναι ομοιόμορφο πάνω σε ομοαξονική, κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια. Ο νόμος του Gauss τότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε το Φ · θα πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα με το δύσκολο τρόπο, όπως στο Παράδ. 21.10.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γκαουσιανή επιφάνεια του Σχ. 22.19 για να δείξουμε, ότι το πεδίο εκτός ενός ομογενώς φορτισμένου κυλίνδρου μεγάλου μήκους είναι το ίδιο όπως στην περίπτωση, όπου ολόκληρο το φορτίο θα ήταν συγκεντρωμένο σε μια γραμμή κατά μήκος του άξονά του (βλ. Πρ. 22.41). Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο μεταξύ ενός φορτισμένου κυλίνδρου και ενός ομοαξονικού κοίλου αγωγίμου κυλίνδρου, που τον περιβάλλει (βλ. Πρ. 22.39).

22.19 Ομοαξονική κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια η οποία χρησιμοποιείται για να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο έξω από ένα φορτισμένο σύρμα άπειρου μήκους.

