Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα και τη σφραγίδα του εκδότη

ISBN SET: 960-516-026-9
ISBN Β΄ ΤΟΜΟΣ: 960-516-028-5

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ANIKOUΛA
Δημ. Γούναρη 44 τηλ. 2310-235.297, Fax 2310-265.126
Εγνατία 148 τηλ. 2310-239.537 - 546 21 Θεσσαλονίκη
Εγνατία 156 τηλ. 2310-861.917, Fax 2310-265.126, εντός Πανεπιστημίου Μακεδονίας
e-mail: anikoula@otenet.gr

Αφιερώνεται
στους αληθινούς εραστές
της Μαθηματικής Γνώσης

Πρόλογος

Σκοπός του παρόντος συγγράμματος είναι να αναδείξει τη συμβολή των καθαρών μαθηματικών στην ανάπτυξη και λειτουργία οποιουδήποτε οικονομικού συστήματος. Σε κάθε βήμα των μαθηματικών μεθόδων που περιγράφονται, αντικατοπτρίζεται η σημασία τους στην επίλυση των προβλημάτων της οικονομικής θεωρίας. Ο προσδιορισμός και η μελέτη του συνόλου των σχέσεων αλληλεξάρτησης των διαφόρων οικονομικών μεγεθών, όπως κόστος, έσοδα, τιμές, παραγωγή, κατανάλωση, επένδυση κ.ά., αποτελεί βασική επιδίωξη κάθε οικονομικής ανάλυσης.

Για την εφαρμογή της μαθηματικής ανάλυσης στη μελέτη και επίλυση οικονομικών προβλημάτων δεν είναι πάντα αναγκαίο να γνωρίζουμε την ακριβή μορφή των μαθηματικών σχέσεων που συνδέουν τις οικονομικές μεταβλητές. Δηλαδή, η απόδειξη μιας πληθώρας οικονομικών προτάσεων βασίζεται μόνο στην πληροφορία, ότι οι τιμές ενός οικονομικού μεγέθους εξαρτώνται από τις τιμές ενός άλλου οικονομικού μεγέθους και η συναρτησιακή αυτή σχέση εκφράζεται με μια παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Η μαθηματική ανάλυση των οικονομικών σχέσεων μπορεί να πάρει τη μορφή **ποιοτικής, παραμετρικής** και **ποσοτικής ανάλυσης**.

Η **ποιοτική ανάλυση** (qualitative analysis) αναφέρεται στον προσδιορισμό της κατεύθυνσης μεταβολής μιας ή περισσότερων οικονομικών μεταβλητών σε σχέση με τη μεταβολή μιας ή περισσότερων άλλων οικονομικών μεταβλητών. Στην περίπτωση παραγωγίσιμων οικονομικών συναρτήσεων, η κατεύθυνση μεταβολής εκφράζεται πλήρως με το πρόσημο της παραγώγου ή των μερικών παραγώγων.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε, ότι τα προβλήματα ποιοτικής οικονομικής ανάλυσης, από τη φύση τους είναι προβλήματα συνδυαστικής ανάλυσης και βρίσκουν την πιο αποτελεσματική τους αντιμετώπιση στα πλαίσια της θεωρίας των προσημασμένων γραφημάτων (signed graphs).

Η **παραμετρική ανάλυση** (parametric analysis) αναφέρεται σε μια οικογένεια οικονομικών σχέσεων ή συναρτήσεων που έχουν την ίδια μορφή έτσι ώστε κάθε μέλος της οικογένειας αυτής προκύπτει, όταν δώσουμε συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους. Με την παραμετρική ανάλυση προσδιορίζονται διαστήματα μεταβολής των παραμέτρων, έτσι ώστε να ενσωματώνονται οι πραγματικές οικονομικές συνθήκες που διαμορφώνουν τις τιμές των μεταβλητών του διαστήματος. Εκφράζονται ακόμη τυχόν τυπικά ακρότατα ή σημεία καμπής των συναρτήσεων αυτών σα συναρτήσεις των τιμών των παραμέτρων.

Τέλος, η **ποσοτική ανάλυση** (quantitative analysis) μελετά τις ποσοτικοποιημένες σχέσεις που προκύπτουν, όταν οι παράμετροι πάρουν συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Έτσι με την ανάλυση αυτή προσδιορίζονται συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές των οικονομικών μεταβλητών, που είναι οι βασικές για την επίλυση προβλημάτων οικονομικής επιλογής και πιο γενικά για τη διαδικασία λήψης οικονομικών αποφάσεων.

Το είδος, η έκταση και η μορφή της μαθηματικής ανάλυσης που χρησιμοποιείται εξαρτάται κυρίως από τη φύση των οικονομικών σχέσεων και μεταβλητών που μελετώνται. Έτσι η μελέτη οικονομικών μεταβλητών που δεν συνδέονται με συναρτησιακές σχέσεις μπορεί να γίνει πιο αποτελεσματικά στα πλαίσια μιας περιοχής των μοντέρνων μαθηματικών που ονομάζεται θεωρία γραφημάτων. Όταν όμως οι οικονομικές μεταβλητές εκφράζονται με συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών, τότε η πιο κατάλληλη μαθηματική ανάλυση για τη μελέτη των οικονομικών αυτών σχέσεων είναι οι τεχνικές του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού.

Επομένως, η χρησιμοποίηση της μαθηματικής ανάλυσης στην καλύτερη κατανόηση και επίλυση οικονομικών προβλημάτων είναι θέμα αναγκαιότητας και όχι επιλογής.

Αναφορικά με τη δομή του βιβλίου αυτού, θα ήθελα να επισημάνω ότι αναφέρεται σε διαφορετικούς τύπους αναγνωστών.

Τα πρώτα κεφάλαια στοχεύουν πρωταρχικά σε αναγνώστες χωρίς μαθηματικό υπόβαθρο, το οποίο θα αποκτηθεί πιθανόν μεταγενέστερα με κατάλληλη σειρά μαθημάτων. Τέτοιου είδους αναγνώστες θα πρέπει να συνηθίσουν στην εφαρμογή των στοιχειωδών μεθόδων, πριν προχωρήσουν σε πιο δυναμικές διαδικασίες που περιγράφονται στα τελευταία κεφάλαια.

Ο πιο ενημερωμένος αναγνώστης μπορεί να χρησιμοποιήσει τα πρώτα κεφάλαια για επανάληψη και να προχωρήσει αμέσως στην επόμενη εργασία. Ο έμπειρος μαθηματικός οικονομολόγος μπορεί να θεωρήσει το βιβλίο σαν εργαλείο αναφοράς και έρευνας νέων μεθόδων επίλυσης οικονομικών προβλημάτων.

Σε κάθε κεφάλαιο επισυνάπτεται ικανός αριθμός ασκήσεων, που θα εξοικειώσουν τον αναγνώστη με τα μαθηματικά εργαλεία και τις εφαρμογές τους σε διακριτά οικονομικά προβλήματα. Η μέθοδος θεραπείας τους θα καταδείξει την προσπάθεια μιας συστηματικής ανάπτυξης της μαθηματικής οικονομικής θεωρίας, αλλά οι ουσιώδεις δομές μιας τέτοιας θεωρίας θα βρεθούν είτε στο κείμενο είτε στις ασκήσεις.

Σεπτέμβριος 2005 Α. Αλεξανδράκης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

14.1. Ορισμός του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Η έννοια του **ολοκληρώματος** έχει δύο διαφορετικά χαρακτηριστικά, και δύο αντίστοιχες διακριτές εφαρμογές. Από τη μια πλευρά, ένα ολοκλήρωμα είναι η οριακή τιμή μιας ορισμένης αθροιστικής παράστασης, η οποία συχνά εμφανίζεται στην μαθηματική ανάλυση και η οποία αντιστοιχεί, με διαγραμματικούς όρους, σε μια περιοχή που περικλείεται από μια επίπεδη καμπύλη ή καμπύλες. Τότε το ολοκλήρωμα καλείται **"ορισμένο ολοκλήρωμα"**. Από την άλλη πλευρά, ένα ολοκλήρωμα είναι το αποτέλεσμα της αντιστροφής της διαδικασίας διαφόρισης. Η παράγωγος μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής είναι από μόνη της μια συνάρτηση κάποιας μεταβλητής. Το αντίστροφο πρόβλημα είναι να αποκτήσουμε, από μια δοσμένη συνάρτηση, μια δεύτερη συνάρτηση, η οποία έχει την πρώτη σαν παράγωγό της. Η δεύτερη συνάρτηση, καλείται **"αόριστο" ολοκλήρωμα** της πρώτης.

Υποθέτουμε ότι η $y = f(x)$ είναι μια μονό-τιμη συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής, για όλες τις τιμές του *x* στο δοσμένο διάστημα $[x = a,\ x = b]$. Το διάστημα του *x*, μήκους $(b - a)$, διαιρείται με όποιον τρόπο θέλουμε σε ***n*** τμήματα με μέσα των σημείων διαιρέσεως:

$$a = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} = b \,.$$

Σχηματίζουμε το άθροισμα:

$$f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2)+f(x_3)(x_4-x_3)+...+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})+f(x_n)(x_{n+1}-x_n)$$

όπου κάθε όρος αποκτάται από ένα διαφορετικό τμήμα και αποτελείται από το μήκος του τμήματος επί την τιμή της συνάρτησης στο χαμηλότερο (ή το αριστερότερο) σημείο του τμήματος. Για ευκολία, γράφουμε:

$$\sum_{r=1}^{n} f(x_r)(x_{r+1}-x_r),$$

όπου ο γραφόμενος όρος, είναι τυπικός r-όρος του αθροίσματος και το σύμβολο $\sum_{r=1}^{n}$ δηλώνει ότι όλοι αυτοί οι όροι, από τον πρώτο $(r=1)$ μέχρι τον ***n*-οστό** $(r=n)$ πρέπει να προστεθούν μαζί. Ο αριθμός ***n*** των τμημάτων στα οποία διαιρείται το δοσμένο διάστημα, αυξάνεται με οποιοδήποτε τρόπο, έτσι ώστε κάθε τμήμα να γίνεται μικρότερο. Τότε το άθροισμα αυξάνεται και πλησιάζει μια ορισμένη οριακή τιμή. Η οριακή τιμή που προσεγγίζεται καθώς το $n \to \infty$, καλείται **ορισμένο ολοκλήρωμα (definite integral)** της συνάρτησης μεταξύ του κατώτατου ορίου ***α*** και του ανώτατου ορίου ***b*** και γράφουμε συμβολικά $\int_a^b f(x)dx$. Έτσι:

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} f(x_r)(x_{r+1}-x_r)$.

Η διαδικασία εύρεσης του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης καλείται **ολοκλήρωση (integration).** Από τον ορισμό, φαίνεται ότι, η τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος είναι **απλά ένας αριθμός**, ο οποίος μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός και ο οποίος εξαρτάται μόνο από τον τύπο της συνάρτησης και από τις τιμές των ορίων (***α*** και ***b***) που παίρνουμε.

Αθροίσματα διαφορετικά από αυτό που αναφέραμε παραπάνω, έχουν ακριβώς την ίδια οριακή τιμή, το ορισμένο ολοκλήρωμα, καθώς το $n \to \infty$. Τέτοια αθροίσματα σχηματίζονται παίρνοντας, για κάθε τμήμα, το μήκος του τμήματος επί την τιμή της συνάρτησης στο ανώτερο (από δεξιά) σημείο του τμήματος, ή σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο του τμήματος. Πράγματι, πάλι ισχύει:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} f\left(x_r^{'}\right)\left(x_{r+1}-x_r\right),$$

όπου το $x_r^{'}$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ x_r και x_{r+1}.

Το ολοκλήρωμα από το $x=a$ στο $x=b$ διαιρείται σε ένα αριθμό τμημάτων, εκ των οποίων το *Δx* είναι ένα τυπικό τμήμα με το *x*, ένα σημείο που περιλαμβάνεται σε αυτό.

Τότε:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum f(x)\Delta x,$$

όπου κάθε τμήμα, μήκους *Δx*, πολλαπλασιάζεται με την τιμή της συνάρτησης $f(x)$, σε ένα σημείο του τμήματος, το όλο σύνολο των γινομένων αθροίζεται και βρίσκουμε το όριο του αθροίσματος, καθώς ο αριθμός των τμημάτων στα οποία το δοθέν πεδίο (a,b) διαιρείται, αυξάνεται άπειρα.

Οι ακόλουθες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτουν από τον ορισμό:

Αν $f(x)$ και $\varphi(x)$ είναι μονό-τιμες συναρτήσεις συνεχείς υπεράνω των σχετικών διαστημάτων, τότε:

(1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(2) $\int_a^b \{-f(x)\}\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

(3) $\int_a^b \kappa f(x)\,dx = \kappa\int_a^b f(x)\,dx \quad (\kappa = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha})$

(4) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(5) $\int_a^b \{f(x)+\varphi(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Θα αποδείξουμε την τελευταία ιδιότητα (5):

Έχουμε

$$\sum_{r=1}^{n}\left\{f\left(x_r\right)+\varphi\left(x_r\right)\right\}\left(x_{r+1}-x_r\right)=\sum_{r=1}^{n}\left\{f\left(x_r\right)\left(x_{r+1}-x_r\right)+\varphi\left(x_r\right)\left(x_{r+1}-x_r\right)\right\}=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}f\left(x_r\right)\left(x_{r+1}-x_r\right)+\sum_{r=1}^{n}\varphi\left(x_r\right)\left(x_{r+1}-x_r\right),$$

δηλαδή,

$$\int_a^b\left\{f\left(x\right)+\varphi\left(x\right)\right\}dx=\int_a^b f\left(x\right)dx+\int_a^b\varphi\left(x\right)dx$$

παίρνοντας το όριο, καθώς $n\to\infty$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα, ότι, το όριο του αθροίσματος είναι το άθροισμα των ξεχωριστών ορίων. Το προηγούμενο αποτέλεσμα επεκτείνεται στην ολοκλήρωση μιας διαφοράς συναρτήσεων $\left(f\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right)$, και φανερά, στην ολοκλήρωση αθροίσματος ή διαφορών οποιουδήποτε αριθμού ξεχωριστών συναρτήσεων.

Παράδειγμα

Αν η $f\left(x\right)$ είναι συνεχής, το άθροισμα $\sum_{r=1}^{n}f\left(\frac{x_r+x_{r+1}}{2}\right)\left(x_{r+1}-x_r\right)$, έχει το $\int_a^b f\left(x\right)dx$ σαν οριακή τιμή, καθώς $n\to\infty$. Δείξτε ότι:

$$\int_a^b xdx=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right).$$

Λύση

Έχουμε:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{x_r+x_{r+1}}{2}\left(x_{r+1}-x_r\right)=\sum_{r=1}^{n}\frac{x_{r+1}^2-x_r^2}{2}\qquad\text{και}$$

$$\int_a^b xdx=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{x_{r+1}^2-x_r^2}{2}=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$$

f

$f \; x \; x$

$f \; x \; dx$

$f \; x$ $a \; b$

$f(x)=x^2$ $[a,b]=[0,1]$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

$f(t)=t^2$ $[a,b]=[0,1]$

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 t^2\,dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(z)dz=\ldots=\int_a^b f(v)dv$$

Γενικά $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_v\in[\alpha,\beta]$

$$\int_{Q_1}^{Q_2} f(x)dx \quad \int_{Q_2}^{Q_3} f(x)dx \quad \ldots \quad \int_{vQ_1}^{Q} f(x)dx \quad \int_{vQ}^{Q} f(x)dx \quad 0$$

$f \; x \; f \; x \; f \; x$

$$\int_\alpha^\beta f_1\;x \quad f_2\;x \qquad f\;x\;dx \quad \int_\alpha^\beta f_1\;x\;dx \quad \int_\alpha^\beta f_2\;x\;dx \qquad \int_\alpha^\beta f\;x\;dx$$

(5) (Ιδιότητα της γραμμικότητας)

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[\kappa_1 f_1(x)+\ldots+\kappa_v f_v(x)\right]dx = \int_{\alpha}^{\beta}\kappa_1 f_1(x)\,dx+\ldots+\int_{\alpha}^{\beta}\kappa_v f_v(x)dx =$$

$$k_1\int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)dx+\ldots+k_v\int_{\alpha}^{\beta} f_v(x)dx =$$

$$=\sum_{i=1}^{v}\kappa_i\int_{\alpha}^{\beta} f_i(x)dx \qquad (7)$$

(6) (Ιδιότητα της μονοτονικότητας). Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\le g(x)\ \ \forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \qquad (8)$$

(7) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\ge 0\ \forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \ge 0 \qquad (9)$$

(8) Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int f(x)dx = \int_{\xi}^{x} f(t)dt \qquad (10)$$

όπου ξ τυχαίο αλλά ορισμένο σημείο του $[\alpha,\beta]$, το x είναι η μεταβλητή στο $[\alpha,\beta]$.

(9) Αν η συνάρτηση g και η παράγωγός της g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ με $g([\alpha,\beta])\subset[\alpha,\beta]$ και η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f\left(t\right)dt \qquad (11)$$

(10) Αν η f συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$, $f\left(x\right)\geq 0$, $\forall x\in\left[\alpha,\beta\right]$ και υπάρχει το $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx$ τότε υπάρχει το $\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f\left(x\right)}dx$.

(11) Ισχύει ότι:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta}\left|f\left(x\right)\right|dx, \quad (\text{αφού } \pm f\left(x\right)\leq\left|f\left(x\right)\right|).$$

(12) Αν *m* και *M* είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο $\left[\alpha,\beta\right]$ τότε:

$$\left(\beta-\alpha\right)m \leq \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx \leq \left(\beta-\alpha\right)M \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx \leq M.$$

(13) **(Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού)**
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$, τότε υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx = \left(\beta-\alpha\right)f\left(\xi\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx = f\left(\xi\right)$$

Απόδειξη: Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]\Rightarrow$ η f ολοκληρώσιμη στο $\left[\alpha,\beta\right]\Rightarrow$ υπάρχει παράγουσά της *F(x)*, δηλαδή $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$, $\forall x\in\left[\alpha,\beta\right]$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για την F έχουμε, ότι υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε

$$F\left(\beta\right)-F\left(\alpha\right)=F'\left(\xi\right)\left(\beta-\alpha\right)\Leftrightarrow F\left(\beta\right)-F\left(\alpha\right)=f\left(\xi\right)\left(\beta-\alpha\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\alpha-\beta).$$

(14) **(Σχέση ορισμένου και αορίστου ολοκληρώματος)**
Αν η συνάρτηση $f(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής (άρα ολοκληρώσιμη), τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt,\ x\in[\alpha,\beta]$$

είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα $F' = f$.

(15) **(Τύπος του Taylor)**
Υποθέτουμε ότι η ν-οστή παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε για κάθε x και x_o του $[\alpha,\beta]$ ισχύει:

$$f(x) = f(x_o) + (x-x_o)f'(x_o) + \ldots + \frac{(x-x_o)^{v-1}}{(v-1)!} f^{(v-1)}(x_o) + R_v$$

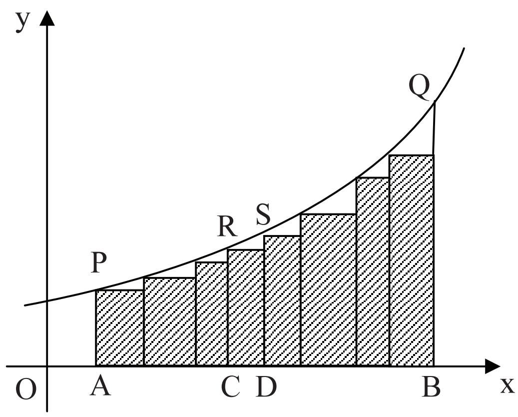
όπου το υπόλοιπο R_v δίνεται από τον τύπο:

$$R_v = \frac{1}{v!}\int_{x_o}^{x} (x-t)^{v-1} f^{(v)}(t)\,dt .$$

14.2. Τα ορισμένα ολοκληρώματα σαν εμβαδά χωρίων

Η διαγραμματική παράσταση ενός ορισμένου ολοκληρώματος, καθιστά την έννοια πιο φανερή, και ταυτόχρονα, οδηγεί σε σημαντικές εφαρμογές. Υποθέτουμε, πρώτα, ότι $b > a$ και ότι η συνεχής συνάρτηση $f(x)$ δέχεται μόνο θετικές τιμές μεταξύ $x = a$ και $x = b$. Ακόμη, για ευκολία, η συνάρτηση θεωρείται μονότιμα αύξουσα. Η συνάρτηση παριστάνεται τότε σαν μια συνεχής καμπύλη που βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα Ox και αυξάνει προς τα δεξιά μεταξύ των ευθειών AP (στο $x = a$) και BQ (στο

$x = b$) όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 1. Έστω CD ένα τυπικό μέλος $\left(x_r, x_{r+1}\right)$ των ***n*** τμημάτων στα οποία διαιρούμε το διάστημα AB (*n*=8 στο Σχήμα 1). Η συνεισφορά αυτού του τμήματος στο άθροισμα $\sum_{r=1}^{n} f\left(x_r\right)\left(x_{r+1} - x_r\right)$ είναι CD επί CR, η κάθετη της καμπύλης στο C, δηλαδή το εμβαδόν του ορθογωνίου με το CD σαν βάση και το CR σαν ύψος. Άρα, το όλο άθροισμα, είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων, που είναι γραμμοσκιασμένα στο Σχήμα 1, μια περιοχή που βρίσκεται πλήρως κάτω από την καμπύλη μεταξύ των P και Q.



Σχήμα 1

Καθώς ο αριθμός των τμημάτων αυξάνεται, και το κάθε τμήμα γίνεται μικρότερο, η γραμμοσκιασμένη περιοχή, εμπεριέχοντας έναν αυξανόμενο αριθμό ορθογωνίων που γίνονται σταθερά πιο λεπτά, πρέπει να αυξάνεται και να προσεγγίζει μια οριακή τιμή, την οποία μπορούμε να ταυτίσουμε με την περιοχή κάτω από την καμπύλη, υπεράνω του *Ox* και μεταξύ των ευθειών AP και BQ. Άρα το παραπάνω άθροισμα έχει αυτή την περιοχή σαν όριο και:

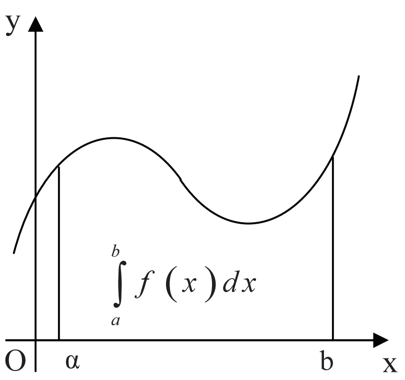
$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \textit{περιοχή}\ \mathrm{AB}QP \text{ κάτω από την καμπύλη } y = f\left(x\right).$$

Φανερά, το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν αρχίσουμε από κάποιο άλλο άθροισμα, που χρησιμοποιείται για τον ορισμό του ολοκληρώματος. Το άθροισμα $\sum_{r=1}^{n} f\left(x_r\right)\left(x_{r+1}-x_r\right)$ παριστάνεται από ένα άθροισμα ορθογωνίων περιοχών, ένα τυπικό ορθογώνιο με βάση το CD και ύψος το DS. Έχουμε τώρα μια μη-κανονική περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη και καθώς ο αριθμός των τμημάτων αυξάνεται, η περιοχή μειώνεται και προσεγγίζει μια οριακή τιμή, η οποία είναι το εμβαδόν του ABQP κάτω από την καμπύλη. Ακόμη, το άθροισμα $\sum_{r=1}^{n} f\left(x_r^{'}\right)\left(x_{r+1}-x_r\right)$, όπου $x_r^{'}$ είναι οποιαδήποτε τιμή μεταξύ x_r και x_{r+1}, είναι το άθροισμα των ορθογώνιων περιοχών. (Μια τυπική ορθογώνια περιοχή έχει βάση το CD και ύψος ίσο με κάποια κάθετη της καμπύλης πάνω από την CD). Αυτή, η περιοχή, πάλι προσεγγίζει την περιοχή ABQP κάτω από την καμπύλη, καθώς ο αριθμός των τμημάτων αυξάνεται. Το όριο είναι πάντοτε το ορισμένο ολοκλήρωμα και φαίνεται από το εμβαδόν του χωρίου ABQP κάτω από την καμπύλη.

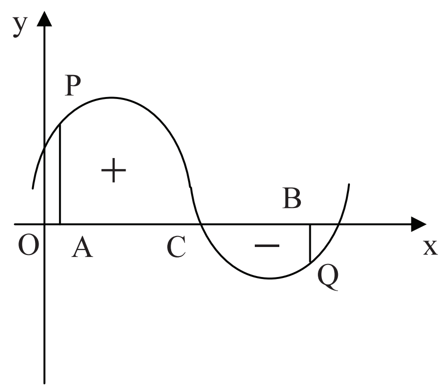
Το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται, όταν η συνάρτηση, δεν είναι μονότονα αύξουσα μεταξύ των $x=a$ και $x=b$. Το ολοκλήρωμα μπορεί πάντοτε να παρασταθεί σαν το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη $y=f\left(x\right)$, πάνω από τον άξονα *Ox* και μεταξύ των κατακόρυφων ευθειών $x=a$ και $x=b$. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 2 παρακάτω. Όταν η συνάρτηση $f\left(x\right)$ δέχεται **αρνητικές τιμές** μεταξύ των $x=a$ και $x=b$ $\left(b>a\right)$, κάνουμε υποθετικές διακρίσεις μεταξύ θετικών και αρνητικών περιοχών.

Αν η $f\left(x_r\right)$ είναι αρνητική, τότε η συνεισφορά του τμήματος $\left(x_r, x_{r+1}\right)$ στο άθροισμα $\sum_{r=1}^{n} f\left(x_r\right)\left(x_{r+1}-x_r\right)$ είναι αρνητική και φαίνεται από το ορθογώνιο **κάτω** από τον άξονα *Ox*. Όταν πάρουμε το όριο, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f\left(x\right)dx$ αντιπροσωπεύεται πάλι από μια περιοχή μεταξύ της καμπύλης $y=f\left(x\right)$, τον άξονα *Ox* και των κατακόρυφων ευθειών $x=a$ και $x=b$, προβλέποντας ότι, κάθε τμήμα της περιοχής που βρίσκεται πάνω από τον άξονα Ox λαμβάνεται σαν θετικό, και όποια τμήματα βρίσκονται κάτω από τον άξονα Ox σαν αρνητικά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Το ολοκλήρωμα ή το εμβαδόν θα είναι τότε αρνητικά ή θετικά. Τώρα, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ δεν είναι το άθροισμα, αλλά η διαφορά, των αριθμητικών εμβαδών PAC και QBC του Σχήματος 3. Αν το αριθμητικό άθροισμα ζητείται, οι περιοχές PAC και QBC πρέπει να ληφθούν ξεχωριστά, σαν:

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{και} \quad -\int_c^b f(x)\,dx \;, \qquad \text{όπου } OC=c$$



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Έτσι, αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι θετική στο διάστημα (a,b) και η καμπύλη είναι πάνω από τον άξονα Ox, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι θετικό και μετράται από τον εμβαδόν μιας περιοχής κάτω από την καμπύλη. Αν η συνάρτηση είναι αρνητική, στο διάστημα και η καμπύλη βρίσκεται κάτω από τον άξονα Ox, τότε το ολοκλήρωμα είναι αρνητικό, και αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του χωρίου κάτω από τον άξονα Ox και πάνω από την καμπύλη. Αν η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο μέσα στο διάστημα, και η καμπύλη διασχίζει τον άξονα *Ox*, τότε το ολοκλήρωμα μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό, και παριστάνεται από το αλγεβρικό άθροισμα μιας θετικής περιοχής (πάνω από τον *Ox*) και μιας αρνητικής περιοχής (κάτω από τον *Ox*).

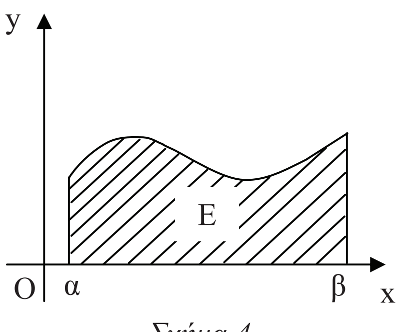
Μια επιπλέον συνθήκη στη θεώρηση του προσήμου μιας περιοχής χρειάζεται, για να ερμηνεύσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ σαν μια περιοχή στην περίπτωση που $a > b$. Καθένας από τους όρους $(x_{r+1} - x_r)$ που εμφανίζονται σε οποιαδήποτε από τα αθροίσματα που ορίζουν το ολοκλήρωμα, είναι τώρα αρνητικός, αντί για θετικός, και τα αντίστοιχα ορθογώνια χωρία περιγράφονται από τα δεξιά προς τα αριστερά, αντί για την γνωστή μας διεύθυνση. Απλά, χρειαζόμαστε τη συνθήκη, ότι, μια περιοχή που περιγράφεται από δεξιά προς τα αριστερά είναι αριθμητικά ίση, αλλά αντίθετη στο πρόσημο, με την όμοια περιοχή που περιγράφεται από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Σε όλες τις περιπτώσεις, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ μετράται από το εμβαδόν του χωρίου, μεταξύ της καμπύλης $y = f(x)$, του άξονα *Ox* και των κατακόρυφων ευθειών $x = a$ και $x = b$. Διάφορα εμβαδά πρέπει να θεωρηθούν ότι έχουν πρόσημα σύμφωνα με τις συνθήκες και αναφέραμε. Το συνολικό εμβαδόν, είναι το αλγεβρικό (και όχι το αριθμητικό) άθροισμα των ξεχωριστών τμημάτων, και μπορεί να είναι θετικό ή μπορεί να είναι αρνητικό.

Γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος

Α) Εμβαδό επίπεδου χωρίου

Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αρχικά, δεχόμαστε ότι $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$. Θεωρούμε το διάγραμμα της f. Ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της f, την ευθεία $x=a$, την ευθεία $x=\beta$ και τον άξονα $x'Ox$, συμβολίζουμε με (Ε) το εμβαδόν αυτό.



Σχήμα 4

Το εμβαδόν επιπέδου χωρίου που περικλείεται από μια καμπύλη προσεγγίζεται με το εμβαδόν που περικλείει μια εγγεγραμμένη σ΄ αυτήν πολυγωνική γραμμή.

1η περίπτωση: Αν η f είναι γραμμική, έστω $f(x)=\kappa x+\lambda$, τότε το χωρίο Ε είναι ένα τραπέζιο του οποίου γνωρίζουμε το εμβαδόν:

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\cdot(\beta-\alpha)$$

Εξάλλου

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}(\kappa x+\lambda)\,dx=\left[\frac{\kappa x^2}{2}+\lambda x\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{\kappa\beta^2}{2}+\lambda\beta-\frac{\kappa\alpha^2}{2}-\lambda\alpha=$$

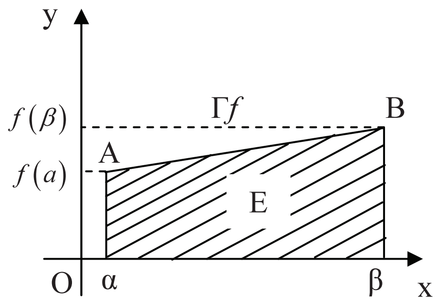
$$=\frac{\kappa}{2}\left(\beta^2-a^2\right)+\lambda\left(\beta-\alpha\right)=\frac{\kappa\left(\beta+\alpha\right)+2\lambda}{2}\left(\beta-\alpha\right)=$$

$$=\frac{\left(\kappa\alpha+\lambda\right)+\left(\kappa\beta+\lambda\right)}{2}\left(\beta-\alpha\right)=\frac{f\left(\alpha\right)+f\left(\beta\right)}{2}\left(\beta-\alpha\right)$$

Άρα το εμβαδό του χωρίου Ε:

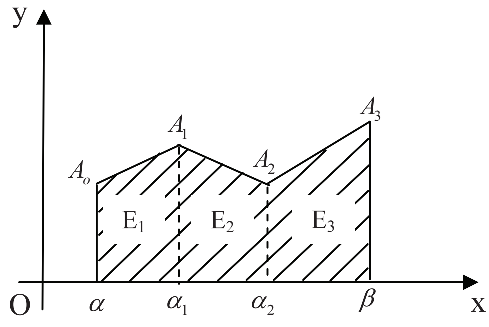
$$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx$$

Συμβολικά:



Σχήμα 5

2η περίπτωση. Αν η f έχει σαν διάγραμμα μια πολυγωνική γραμμή, τότε το:



Σχήμα 6