

Ακολουθίες και Σειρές

1. Ακολουθίες - γενικά

Στην καθημερινή γλώσσα, ο όρος «ακολουθία» σημαίνει μια διαδοχή πραγμάτων με καθορισμένη σειρά – για παράδειγμα, χρονολογική σειρά, σειρά μεγέθους ή λογική σειρά. Στα μαθηματικά, ο όρος "ακολουθία" χρησιμοποιείται συνήθως για να υποδηλώσει μια διαδοχή αριθμών των οποίων η σειρά καθορίζεται από έναν κανόνα ή από μια συνάρτηση. Σε αυτή την ενότητα, θα αναπτύξουμε μερικές από τις βασικές ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των ακολουθιών αριθμών.

2. Ορισμός μιας ακολουθίας

Μια **άπειρη ακολουθία**, ή πιο απλά μια **ακολουθία**, είναι μια ατελείωτη (άπειρη) διαδοχή αριθμών, που ονομάζονται **όροι**. Στις ακολουθίες οι όροι έχουν συγκεκριμένη σειρά, δηλαδή, υπάρχει ένας πρώτος όρος a_1 , ένας δεύτερος όρος a_2 , ένας τρίτος όρος a_3 και ούτω καθεξής.

Μια τέτοια ακολουθία θα γραφόταν ως ακολούθως:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

Όπου οι τρεις τελείες χρησιμοποιούνται για να υποδείξουν ότι η ακολουθία συνεχίζεται επ' αόριστον. Μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα είναι:

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, \dots, \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \\ 1, 3, 5, 7, \dots, \quad 2, -2, 2, -2, \dots \end{array}$$

Κάθε μία από αυτές τις ακολουθίες έχει ένα συγκεκριμένο μοτίβο που διευκολύνει τη δημιουργία πρόσθετων όρων εάν υποθέσουμε ότι αυτοί οι όροι ακολουθούν το ίδιο μοτίβο με τους εμφανιζόμενους όρους. Τέτοια μοτίβα μπορεί να εξαπατούν σε πρώτη ανάγνωση της ακολουθίας, οπότε είναι καλύτερο να έχουμε έναν κανόνα ή έναν τύπο για τη δημιουργία των όρων. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι να αναζητήσετε μια συνάρτηση που συσχετίζει κάθε όρο της ακολουθίας με την αριθμητική τιμή του όρου του. Για παράδειγμα, στην ακολουθία:

$$1, 3, 9, 27, 81, \dots$$

κάθε όρος είναι τριπλάσιος από τον προηγούμενο όρο, δηλαδή, ο νιοστός όρος της ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $3n, n \in \mathbb{N}$. Το δηλώνουμε αυτό γράφοντας την ακολουθία ως:

$$1, 3, 9, 27, \dots, 3n, \dots$$

Τη συνάρτηση $f(n) = 3n$ την ονομάζουμε **γενικό όρο** αυτής της ακολουθίας. Ο γενικός όρος μας βοηθά να υπολογίσουμε, αν θέλουμε, έναν συγκεκριμένο όρο στην ακολουθία, χρειάζεται μόνο να αντικαταστήσουμε τη θέση του όρου στον τύπο για τον γενικό όρο. Για παράδειγμα, ο 37ος όρος στην παραπάνω ακολουθία είναι ο $f(37) = 3 \cdot 37 = 111$.

► **Παράδειγμα 2.1.** Να βρείτε έναν γενικό όρο, με βάση τους πρώτους όρους που δίνονται, για τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\alpha) \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \quad \beta) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad \gamma) \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots \quad \delta) 1, 3, 5, 7, \dots$$

Για την περίπτωση α) παρατηρούμε ότι ο παρανομαστής κάθε κλάσματος είναι μεγαλύτερος κατά μια μονάδα από τον αριθμητή, επομένως η ακολουθία θα είναι:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$\text{και } f(n) = \frac{n}{n+1}.$$

Για την περίπτωση β) παρατηρούμε ότι ο παρανομαστής κάθε κλάσματος είναι δύναμη του δύο, επομένως η ακολουθία θα είναι:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

$$\text{και } f(n) = \frac{1}{2^n}.$$

Για την περίπτωση γ) παρατηρούμε ότι κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο αν προσθέσουμε τον αριθμό +2, επομένως, η ακολουθία θα είναι:

$$1, 3, 5, 7, \dots, n+2, \dots$$

$$\text{και } f(n) = n+2.$$

Όταν σε μια ακολουθία:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

είναι γνωστός ο γενικός όρος, τότε δεν είναι απαραίτητο να γράψουμε τους πρώτους όρους και συνηθίζεται να γράφουμε τον γενικό όρο μέσα σε άγκιστρα, δηλαδή

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ή απλά } \{a_n\}$$

Για παράδειγμα, την ακολουθία του α) ερωτήματος του προηγούμενου παραδείγματος θα μπορούσαμε να την γράψουμε ως $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Να σημειώσουμε εδώ ότι δεν είναι απαραίτητο σε μια ακολουθία ο δείκτης της (δηλαδή το n) να ξεκινά από την τιμή 1, σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να ξεκινά από το μηδέν ή από οποιονδήποτε άλλον φυσικό αριθμό. Δείτε για παράδειγμα την ακολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$$

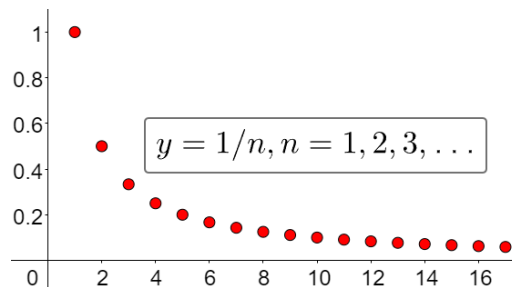
Θα μπορούσαμε να την περιγράψουμε με δυο τρόπους, είτε ως $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ στην οποία ο δείκτης αρχίζει από το μηδέν, είτε ως $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ στην οποία ο δείκτης αρχίζει από το ένα.

Ερχόμαστε λοιπόν στον παρακάτω ορισμό της ακολουθίας:

Ορισμός 2.1. **Ακολουθία** ονομάζουμε μια συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών.

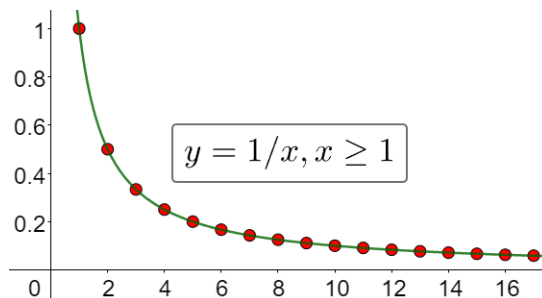
3. Γραφική παράσταση μιας ακολουθίας

Αφού οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις, έχει νόημα να μιλάμε για την γραφική τους παράσταση. Ας δούμε για παράδειγμα την ακολουθία $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, τότε η γραφική της παράσταση είναι τα σημεία $(x, y) \equiv \left(n, \frac{1}{n}\right), n = 1, 2, 3, \dots$, βλέπε σχήμα 1.



Σχήμα 1

Προσοχή στη διαφορά της παραπάνω γραφικής παράστασης από την γραφική παράσταση της αντίστοιχης συνάρτησης, δηλαδή της $y = \frac{1}{x}, x \geq 1$, η οποία είναι μια συνεχόμενη καμπύλη όπως στο σχήμα 2.

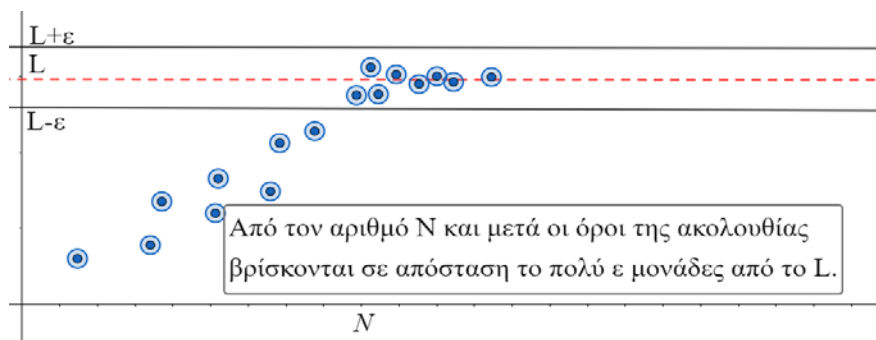


Σχήμα 2

4. Σύγκλιση και όριο ακολουθίας

Δεδομένου ότι οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις, μπορούμε να αναζητήσουμε τα όριά τους. Ωστόσο, επειδή μια ακολουθία $\{a_n\}$ ορίζεται μόνο για φυσικούς αριθμούς n , το μόνο όριο που έχει νόημα είναι το όριο για $n \rightarrow +\infty$. Το όριο μια ακολουθίας $\{a_n\}$ έχει σκοπό να περιγράψει την συμπεριφορά της ακολουθίας στο $+\infty$. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, θα πούμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ έχει όριο τον αριθμό L αν οι όροι της ακολουθίας, τελικά, πλησιάζουν τον αριθμό L . Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι

για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει ένας αριθμός N στην ακολουθία μετά το οποίο όλοι οι όροι της βρίσκονται μεταξύ των γραμμών $y = L + \varepsilon$ και $y = L - \varepsilon$, βλέπε σχήμα 3.



Σχήμα 3

Με βάση τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

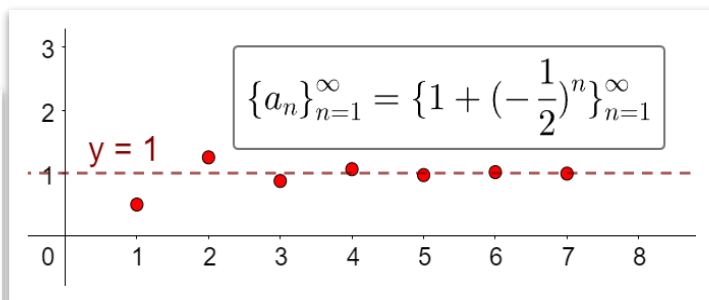
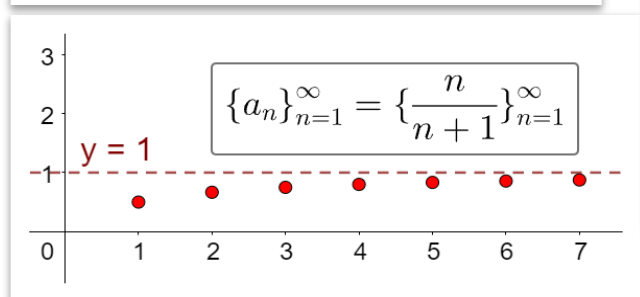
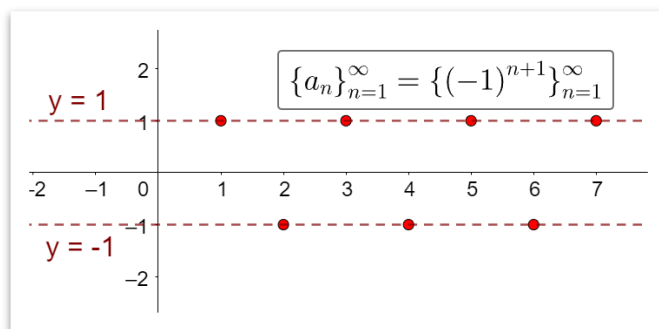
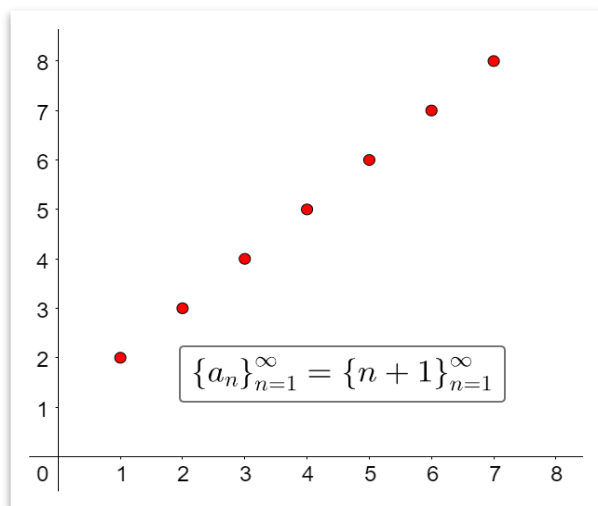
Ορισμός 4.1. Μια ακολουθία $\{a_n\}$ λέμε ότι **συγκλίνει στο όριο** $L \in \mathbb{R}$ εάν για δεδομένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε $|a_n - L| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq N$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ ή } a_n \rightarrow L.$$

Μια ακολουθία που δεν συγκλίνει σε κάποιο πεπερασμένο όριο λέγεται ότι **αποκλίνει**.

Στο σχήμα 4 βλέπουμε ότι οι δύο πρώτες ακολουθίες αποκλίνουν ενώ η τρίτη και η τέταρτη συγκλίνουν στον αριθμό 1, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ and } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] = 1$$



Σχήμα 4

Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο δηλώνουμε χωρίς απόδειξη, δείχνει ότι οι γνωστές ιδιότητες των ορίων ισχύουν και στις ακολουθίες. Αυτό το θεώρημα εξασφαλίζει ότι οι αλγεβρικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για όρια της μορφής $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για όρια της μορφής $\lim_{n \rightarrow +\infty}$.

Πρόταση 4.1. Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ συγκλίνουν στα όρια L_1 και L_2 , αντίστοιχα, και c είναι μια σταθερά. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c \cdot L_1$
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L_1 + L_2$
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L_1 - L_2$
- e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L_1 \cdot L_2$
- f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0)$

Παρατήρηση 4.1. Εάν ο γενικός όρος μιας ακολουθίας είναι μια συνάρτηση του n , δηλαδή $f(n)$, και $f(x)$ είναι η αντίστοιχη συνάρτηση που ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα $[1, +\infty)$, τότε οι τιμές της $f(n)$ μπορούν να θεωρηθούν ως τιμές από ένα «δείγμα» που λαμβάνουμε από την $f(x)$ για θετικές ακέραιες τιμές του x . Επομένως ισχύει:

$$\text{αν } f(x) \rightarrow L \text{ για } x \rightarrow +\infty, \text{ τότε } f(n) \rightarrow L \text{ για } n \rightarrow +\infty$$

Παρόλα αυτά, το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή αν $f(n) \rightarrow L$ για $n \rightarrow +\infty$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει $f(x) \rightarrow L$ για $x \rightarrow +\infty$.

Πρόταση 4.2. Μια ακολουθία συγκλίνει σε ένα όριο L αν και μόνο αν οι ακολουθίες των άρτιων και των περιττών όρων της συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό L .

► **Παράδειγμα 4.1.** Παρατηρούμε ότι η παρακάτω ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \dots$$

συγκλίνει στο μηδέν, αφού οι άρτιοι όροι της

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \dots$$

συγκλίνουν στο μηδέν και οι περιττοί όροι της

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$$

συγκλίνουν, επίσης, στο μηδέν. ◀

► **Παράδειγμα 4.2.** Παρατηρούμε ότι η παρακάτω ακολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots$$

δεν συγκλίνει, αφού οι άρτιοι όροι της

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

συγκλίνουν στο μηδέν και οι περιττοί όροι της

$$1, 1, 1, \dots$$

συγκλίνουν σε διαφορετικό αριθμό, στο ένα. ◀

Λογμένες Ασκήσεις

► **Άσκηση 4.1.** Να βρείτε το όριο των παρακάτω ακολουθιών:

- i. $\left\{ \frac{n}{3n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
- ii. $\left\{ (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
- iii. $\left\{ (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
- iv. $\{8 - 2n\}_{n=1}^{+\infty}$

Λύση.

i. Εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που ακολουθούμε στα όρια συναρτήσεων και διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή με το n έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$$

ii. Αυτή η ακολουθία είναι η ίδια με εκείνη του μέρους i., εκτός από τον παράγοντα $(-1)^{n+1}$, ο οποίος ανάλογα με το n μας δίνει $+1$ ή -1 . Έτσι, οι όροι αυτής της ακολουθίας ταλαντεύονται μεταξύ θετικών και αρνητικών τιμών, με τους περιττούς όρους να είναι πανομοιότυποι με εκείνους του μέρους i. και τους άρτιους όρους να είναι οι αρνητικοί εκείνων του μέρους i.. Δεδομένου ότι η ακολουθία στο μέρος i. έχει όριο $\frac{1}{3}$, προκύπτει ότι οι μονοί όροι σε αυτή την ακολουθία μας δίνουν $\frac{1}{3}$ και οι ζυγοί όροι μας δίνουν $-\frac{1}{3}$. Άρα, η ακολουθία δεν έχει όριο, δηλαδή αποκλίνει.

iii. Αφού η ακολουθία $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, το γινόμενο $(-1)^{n+1}(1/n)$ ταλαντεύεται μεταξύ θετικών και αρνητικών τιμών που πλησιάζουν το μηδέν είτε από δεξιά (περιττά n), είτε από αριστερά (άρτια n). Επομένως θα ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 0.$$

iv. Παρατηρούμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} (8 - 2n) = 8 - \infty = -\infty$, άρα η ακολουθία $\{8 - 2n\}_{n=1}^{+\infty}$ αποκλίνει. ◀

► **Άσκηση 4.2.** Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n}.$$

Λύση. Η έκφραση $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n}$ είναι απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{\infty}{\infty}$, οπότε όπως και στα όρια συναρτήσεων ενδείκνυται ο κανόνας L'Hospital. Ωστόσο, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτόν τον κανόνα άμεσα στην ποσότητα $\frac{n}{e^n}$ επειδή οι συναρτήσεις n και e^n έχουν οριστεί στους θετικούς ακέραιους αριθμούς, και επομένως δεν είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Για να παρακάμψουμε αυτό το πρόβλημα επεκτείνουμε τα πεδία ορισμού αυτών των συναρτήσεων σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς, αλλάζουμε τη μεταβλητή από n σε x , και εφαρμόζουμε τον κανόνα του L'Hôpital στο όριο του πηλίκου $\frac{x}{e^x}$. Έτσι έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Τελικά έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$. ◀

Άσκηση 4.3. Να δείξετε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Λύση. Είναι,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(\frac{1}{n}) \ln n} = e^0 = 1.$$

Διότι, με εφαρμογή του κανόνα L'Hôpital στην $(\frac{1}{x}) \ln x$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x}) \ln x = 0$. ◀

5. Το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών-κριτήριο παρεμβολής

Γνωρίζουμε από τα σχολικά μας χρόνια το παρακάτω θεώρημα, γνωστό και ως κριτήριο παρεμβολής ή θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων

Θεώρημα 5.1. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h για τις οποίες ισχύει

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L,$$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Παραλλαγή του παραπάνω θεωρήματος για την περίπτωση των ακολουθιών είναι το ακόλουθο θεώρημα, γνωστό και ως **θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών ή κριτήριο παρεμβολής για ακολουθίες**.

Θεώρημα 5.2. (Το θεώρημα των ισοσυγκλινοσών ακολουθιών)

Έστω οι ακολουθίες $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ για τις οποίες ισχύει

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

για όλες τις τιμές του $n \geq N, N \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L,$$

$$\text{τότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L.$$

Για την απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση $-|a| \leq a \leq |a|$, επομένως, για μια ακολουθία $\{a_n\}$ θα ισχύει:

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

Με βάση τα παραπάνω, και με τη βοήθεια του κριτηρίου της παρεμβολής, αν

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0, \text{ τότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Έχουμε λοιπόν την παρακάτω χρήσιμη πρόταση, ειδικά για περιπτώσεις όπου οι ακολουθίες εμφανίζουν και θετικούς και αρνητικούς όρους.

Πρόταση 5.1. Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$, αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Λογμένες Ασκήσεις

► **Άσκηση 5.1.** Με τη βοήθεια του κριτηρίου της παρεμβολής, να προσδιορίσετε το όριο της ακολουθίας:

$$\left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι:

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{9} < \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{32} < \frac{1}{4}, \dots$$

Οπότε για $n > 1$, ισχυριζόμαστε (γιατί;) ότι θα ισχύει:

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} \right) \leq \frac{1}{n}$$

Επομένως, αφού η ακολουθία έχει μη αρνητικούς όρους, θα έχουμε ότι:

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής και επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, τελικά έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Σημειώνουμε ότι, αν και το όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hôpital διότι δεν μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα $x!$ για μη ακέραιες τιμές του x . ◀

► **Άσκηση 5.2.** Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας:

$$a_n: 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \dots, (-1)^n \frac{1}{2^n}, \dots$$

Λύση. Αν πάρουμε την απόλυτη τιμή των όρων της ακολουθίας προκύπτει η ακολουθία:

$$|a_n|: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Η τελευταία έχει γενικό όρο $|a_n| = \frac{1}{2^n}$ και γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

έχει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$. Τελικά, έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$ και από την Πρόταση 5.1, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. ◀

6. Αναδρομικές ακολουθίες

Ορισμένες ακολουθίες δεν προκύπτουν από έναν τύπο ο οποίος περιγράφει τον γενικό όρο, και κατά συνέπεια το σύνολο της ακολουθίας, αλλά μάλλον από έναν τύπο ή ένα σύνολο τύπων που καθορίζουν τον τρόπο δημιουργίας κάθε όρου στην ακολουθία από όρους που προηγούνται. Τέτοιες ακολουθίες λέμε ότι ορίζονται **αναδρομικά** και ο τύπος ή οι τύποι που τις καθορίζουν **ονομάζονται αναδρομικοί τύποι ή τύποι αναδρομής**. Οι τεχνικές υπολογισμού ορίων αναδρομικών ακολουθιών είναι εκτός των ορίων αυτού του συγγράμματος οπότε θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που περιγράφει μια τέτοια ακολουθία και την τεχνική για να υπολογιστεί το όριό της.

► **Παράδειγμα 6.1.** Δίνεται η αναδρομική ακολουθία $\{a_n\}$ με τύπους αναδρομής:

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{2}{x_1} \right) = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{2}{x_2} \right) = \frac{17}{12}$ κ.ο.κ.

Αν γνωρίζουμε ότι η παραπάνω ακολουθία συγκλίνει, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$, τότε η τεχνική υπολογισμού του ορίου της είναι η ακόλουθη:

Αφού το $n + 1 \rightarrow +\infty$ καθώς το $n \rightarrow +\infty$, θα ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = L$, οπότε αν πάρουμε όριο καθώς το $n \rightarrow +\infty$, και στις δυο μεριές της σχέσης $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ θα έχουμε $L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{2}{L} \right) \Rightarrow L = \sqrt{2}$ (η αρνητική λύση της εξίσωσης απορρίπτεται αφού $x_n > 0$, για κάθε n). ◀

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Θεωρούμε την ακολουθία 4, 6, 8, 10, 12, ...

i. Αν συμβολίσουμε με $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ την παραπάνω ακολουθία τότε να υπολογίσετε τους όρους: a_1, a_4, a_7 και τον γενικό όρο a_n .

ii. Αν συμβολίσουμε με $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ την παραπάνω ακολουθία τότε να υπολογίσετε τους όρους: b_0, b_4, b_8 και τον γενικό όρο b_n .

2. Θεωρούμε τις ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$, όπου $a_n \rightarrow 2$ και $b_n = (-1)^n$. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν και ποιες αποκλίνουν. Σε περίπτωση σύγκλισης να υπολογίσετε το όριο.

i. $\{b_n\}$

ii. $\{3a_n - 5\}$

iii. $\{b_n^2\}$

iv. $\{3a_n + 2b_n\}$

v. $\left\{ \frac{2}{a_n^2 + 4} \right\}$

vi. $\left\{ \frac{b_n}{100} \right\}$

3. Υποθέτουμε ότι οι $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, και $\{c_n\}$ είναι ακολουθίες ώστε να ισχύει $a_n \leq b_n \leq c_n$, για κάθε $n \geq 10$. Αν οι ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{c_n\}$ συγκλίνουν στον αριθμό 7, να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας $\{b_n\}$.

4. Να γράψετε τους πρώτους πέντε όρους των ακολουθιών και να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όριά τους.

i. $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

ii. $\left\{\frac{n^2}{n+2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

iii. $\left\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$

iv. $\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

v. $\{\sqrt{n^2 + 3n} - n\}_{n=1}^{+\infty}$

vi. $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

5. Να βρείτε το γενικό όρο των ακολουθιών, ξεκινώντας από $n = 1$ και αν η ακολουθία συγκλίνει να βρείτε το όριο της.

i. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \dots$

ii. $(\sqrt{2} - \sqrt{3}), (\sqrt{3} - \sqrt{4}), (\sqrt{4} - \sqrt{5}), \dots$

iii. $\frac{1}{3^5}, -\frac{1}{3^6}, \frac{1}{3^7}, -\frac{1}{3^8}, \dots$

6. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος, αιτιολογώντας της απάντησή σας.

i. Οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις.

ii. Θεωρούμε τις ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$, ώστε η ακολουθία $\{a_n + b_n\}$ να συγκλίνει. Τότε, $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ συγκλίνουν.

7. Θεωρούμε την ακολουθία:

$$a_1 = \sqrt{6}$$

$$a_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}$$

$$a_3 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}$$

$$a_4 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$$

Να βρείτε τον αναδρομικό της τύπο.

Αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει, να βρείτε το όριό της.

7. Μονότονες ακολουθίες

Πολλές φορές είναι καλό να γνωρίζουμε αν μια ακολουθία συγκλίνει χωρίς απαραίτητα να μας ενδιαφέρει το όριο της. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε διάφορα κριτήρια ελέγχου της σύγκλισης μιας ακολουθίας

Ορισμός 7.1. Μια ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται:

αυστηρά αύξουσα αν $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$

αύξουσα αν $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$

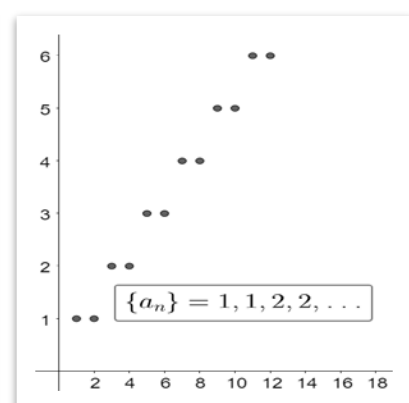
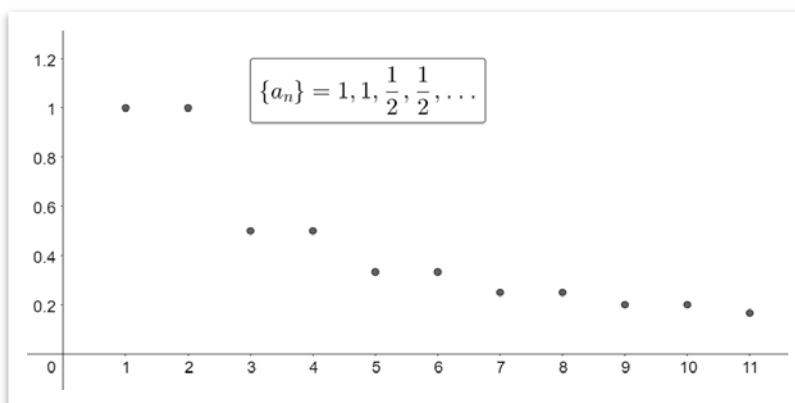
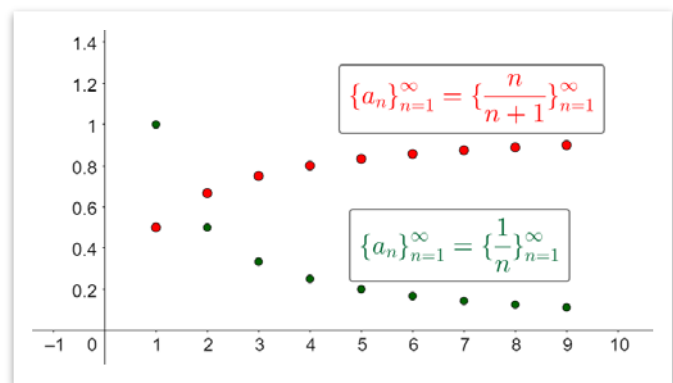
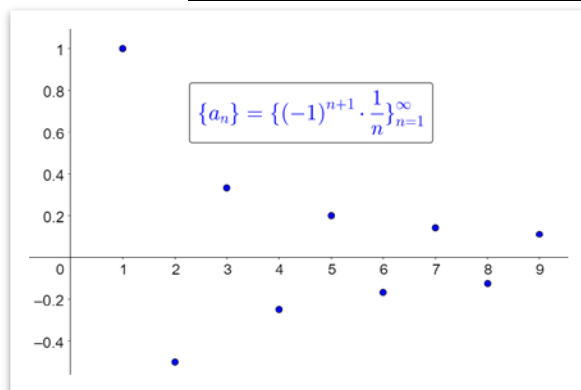
αυστηρά φθίνουσα αν $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$

φθίνουσα αν $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$

Μια ακολουθία που είναι αύξουσα ή φθίνουσα ονομάζεται **μονότονη** και μια ακολουθία που είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα ονομάζεται **γνησίως μονότονη**.

► **Παράδειγμα 7.1.** Στον παρακάτω πίνακα έχουμε από ένα παράδειγμα για κάθε μια περίπτωση που θα μπορούσε να εμφανιστεί σχετικά με την μονοτονία μιας ακολουθίας (βλέπε και σχήμα).

Ακολουθία	Μονοτονία
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$	Αυστηρά αύξουσα
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$	Αυστηρά φθίνουσα
$1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$	Αύξουσα, όχι αυστηρά αύξουσα
$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots$	Φθίνουσα, όχι αυστηρά φθίνουσα
$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots$	Ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα



Σχήμα 5 ◀

Προκειμένου να ελέγξουμε τη μονοτονία μιας ακολουθίας, συνήθως, ακολουθούμε την παρακάτω μεθοδολογία, κατά περίπτωση.

Μέθοδος 1 – διαφορά διαδοχικών όρων:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \rightarrow \text{αυστηρά αύξουσα}$$

$$a_{n+1} - a_n < 0 \rightarrow \text{αυστηρά φθίνουσα}$$

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \rightarrow \text{αύξουσα}$$

$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \rightarrow \text{φθίνουσα}$$

Μέθοδος 2 - λόγος διαδοχικών όρων:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \rightarrow \text{αυστηρά αύξουσα}$$

$$a_{n+1}/a_n < 1 \rightarrow \text{αυστηρά φθίνουσα}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \rightarrow \text{αύξουσα}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \rightarrow \text{φθίνουσα}$$

Μέθοδος 3 - έλεγχος μονοτονίας της αντίστοιχης συνάρτησης:

Θεωρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση $f(x)$, της δοσμένης ακολουθίας, δηλαδή ισχύει $f(n) = a_n$, όπου a_n ο γενικός όρος της ακολουθίας. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, μπορούμε να ελέγξουμε τη μονοτονία της ακολουθίας από τη μονοτονία της f . Τα παραπάνω συγκεντρώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Παράγωγος της f για $x \geq 1$	Συμπέρασμα για την $a_n = f(n)$
$f'(x) > 0$	αυστηρά αύξουσα
$f'(x) < 0$	αυστηρά φθίνουσα
$f'(x) \geq 0$	αύξουσα
$f'(x) \leq 0$	φθίνουσα

► **Παράδειγμα 7.2.** Με τη βοήθεια της διαφοράς διαδοχικών όρων μπορούμε να δείξουμε ότι η ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

είναι αυστηρά αύξουσα.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι

$$a_n = \frac{n}{n+1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Οπότε έχουμε $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$ και

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Αφού είναι $a_{n+1} - a_n > 0$, η ακολουθία είναι αυστηρά αύξουσα. ◀

► **Παράδειγμα 7.3.** Με τη βοήθεια του λόγου διαδοχικών όρων μπορούμε να δείξουμε ότι η προηγούμενη ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

είναι αυστηρά αύξουσα.

$$\text{Πράγματι, είναι } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1, n \geq 1.$$

Αφού είναι $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, η ακολουθία είναι αυστηρά αύξουσα. ◀

► **Παράδειγμα 7.4.** Με τη βοήθεια της μονοτονίας της αντίστοιχης συνάρτησης θα δείξουμε ότι η προηγούμενη ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

είναι αυστηρά αύξουσα.

Πράγματι, είναι $f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, x \geq 1$. Για $x \geq 1$, η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε θα ισχύει $a_n = f(n) < f(n+1) = a_{n+1}$, δηλαδή η ακολουθία είναι αυστηρά αύξουσα. ◀

8. Ιδιότητες που ισχύουν «τελικά»

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, υπάρχουν ακολουθίες στις οποίες οι πρώτοι όροι συμπεριφέρονται ιδιόρρυθμα και στη συνέχεια η ακολουθία παρουσιάζει ένα συγκεκριμένο μοτίβο. Για παράδειγμα, η παρακάτω ακολουθία είναι σαφώς αύξουσα από τον 6^ο όρο και μετά αλλά δεν θα μπορούσαμε να την κατατάξουμε, στο σύνολό της, στις αύξουσες ακολουθίες.

$$-10, -9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Προκειμένου να περιγράψουμε τη συμπεριφορά τέτοιων ακολουθιών δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 8.1. Αν, με εξαίρεση πεπερασμένου πλήθους αρχικών όρους, μια ακολουθία εμφανίζει μια συγκεκριμένη ιδιότητα, τότε θα λέμε ότι **η ακολουθία έχει τελικά τη συγκεκριμένη ιδιότητα**.

Με βάση τον προηγούμενο ορισμό, ενώ **δεν μπορούμε** να πούμε ότι η ακολουθία:

$$-10, -9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \dots$$

είναι αυστηρά αύξουσα, **μπορούμε να πούμε** ότι είναι **τελικά αύξουσα**, εννοώντας ότι από έναν όρο της και μετά είναι αυστηρά αύξουσα.

Παρατήρηση 8.1. Σε αυτό το σημείο θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι ιδιότητες όπως η σύγκλιση μιας ακολουθίας δεν εξαρτώνται από τη συμπεριφορά των πρώτων όρων της αλλά από το πως συμπεριφέρονται οι όροι της **τελικά** (δηλαδή από έναν όρο και ύστερα). Για παράδειγμα, η ακολουθία:

$$3, -9, -12, 14, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

τελικά συμπεριφέρεται όπως η ακολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Άρα συγκλίνει στο μηδέν.

Λομένες Ασκήσεις

► **Άσκηση 8.1.** Να δείξετε ότι η παρακάτω ακολουθία είναι τελικά αυστηρά αύξουσα:

$$-10, -9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι για όλα τα $n \geq 6$ ισχύει ότι, $a_n = n - 5$, και $a_{n+1} = n + 1 - 5 = n - 4$ επομένως,

$$a_{n+1} - a_n = n - 4 - (n - 5) = n - 4 - n + 5 = 1 > 0$$

Αφού είναι $a_{n+1} - a_n > 0$, η ακολουθία είναι **τελικά αυστηρά αύξουσα**. ◀

► **Άσκηση 8.2.** Να δείξετε ότι η παρακάτω ακολουθία είναι τελικά αυστηρά φθίνουσα:

$$\left\{ \frac{9^n}{n!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

Λύση. Έχουμε ότι:

$$a_n = \frac{9^n}{n!} \quad \text{και} \quad a_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{9^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{9^n}{n!}} = \frac{9^{n+1}n!}{9^n(n+1)!} = 9 \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{9}{n+1}$$

οπότε $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, για κάθε $n \geq 9$. Αφού $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, για κάθε $n \geq 9$, η ακολουθία είναι **τελικά αυστηρά φθίνουσα**. ◀

9. Σύγκλιση μονότονων ακολουθιών

Στα ακόλουθα δυο θεωρήματα, δείχνουμε ότι κάθε μονότονη ακολουθία συγκλίνει σε αριθμό ή στο άπειρο, άρα οι μονότονες ακολουθίες δεν μπορούν να είναι αποκλίνουσες.

Θεώρημα 9.1. Αν μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι τελικά αύξουσα, τότε θα ισχύει ένα από τα παρακάτω:

A) Υπάρχει μια σταθερά M , που ονομάζεται ανώτερο φράγμα (ή άνω φράγμα) της ακολουθίας, ώστε $\{a_n\} \leq M$, για όλα τα n . Τότε η $\{a_n\}$ συγκλίνει σε ένα όριο L που ικανοποιεί τη σχέση $L \leq M$.

B) Δεν υπάρχει άνω όριο, οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Θεώρημα 9.2. Αν μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι τελικά φθίνουσα, τότε θα ισχύει ένα από τα παρακάτω:

A) Υπάρχει μια σταθερά M , που ονομάζεται κατώτερο φράγμα (ή κάτω φράγμα) της ακολουθίας, ώστε $\{a_n\} \geq M$, για όλα τα n . Τότε η $\{a_n\}$ συγκλίνει σε ένα όριο L που ικανοποιεί τη σχέση $L \geq M$.

B) Δεν υπάρχει κάτω όριο, οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

► **Παράδειγμα 9.1.** Με τη βοήθεια της μονοτονίας που αποδείξαμε στην άσκηση 8.2, να δείξετε ότι η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει και να βρείτε το όριό της:

$$a_n = \frac{9^n}{n!}$$

Πράγματι, αφού στην άσκηση 8.2 δείξαμε ότι η ακολουθία είναι τελικά φθίνουσα και όλοι οι όροι της

είναι θετικοί τότε έχει για κάτω φράγμα το μηδέν, δηλαδή $a_n \geq M = 0$. Από το θεώρημα 9.2 εξασφαλίζεται η σύγκλιση της ακολουθίας σε ένα όριο L .

Από την άσκηση 8.2 έχουμε ότι:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{9^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{9^{n+1}n!}{9^n(n+1)!} = 9 \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{9}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{9}{n+1} \cdot a_n$$

Αν πάρουμε όριο καθώς το $n \rightarrow +\infty$, και στα δυο μέλη της τελευταίας σχέσης, και αφού $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ θα έχουμε:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{n+1} a_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{n+1} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \cdot L = 0$$

Άρα, $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9^n}{n!} = 0$. ◀

Ασκήσεις προς επίλυση

- Να χρησιμοποιήσετε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$ για να δείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι αυστηρά αύξουσες ή φθίνουσες.
 - $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ \frac{n}{4n-1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
- Να χρησιμοποιήσετε το πηλίκο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ για να δείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι αυστηρά αύξουσες ή φθίνουσες.
 - $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ \frac{2^n}{1+2^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\{ ne^{-n} \}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ \frac{10^n}{(2n)!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
- Να χρησιμοποιήσετε παραγώγιση για να δείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι αυστηρά αύξουσες ή φθίνουσες.
 - $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_n^{+\infty}$
 - $\{ ne^{-2n} \}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ \frac{\ln(n+2)}{n+2} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
- Να δείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι τελικά αυστηρά αύξουσες ή φθίνουσες.
 - $\{ 2n^2 - 7n \}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ \frac{n}{n^2+10} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\left\{ \frac{n!}{3^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
 - $\{ n^5 e^{-n} \}_{n=1}^{+\infty}$
- Υποθέτουμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι μονότονη και ισχύει $2 \leq a_n \leq 3$ για κάθε n . Είναι σωστό να πούμε ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα; Αν ναι, τι μπορείτε να πείτε για το όριό της;
- Υποθέτουμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι μονότονη και ισχύει $a_n \leq 3$ για κάθε n . Είναι σωστό να πούμε ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα; Αν ναι, τι μπορείτε να πείτε για το όριό της;
- Υποθέτουμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $a_n \leq 3$ για κάθε n . Είναι σωστό να πούμε ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα; Αν ναι, τι μπορείτε να πείτε για το όριό της;

10. Σειρές-γενικά

Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να μελετήσει αθροίσματα που περιέχουν άπειρους το πλήθος όρους. Τα πιο γνωστά παραδείγματα τέτοιων αθροισμάτων εμφανίζονται στις δεκαδικές αναπαραστάσεις πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, όταν γράφουμε αριθμούς όπως το

$$\frac{2}{3} = 0.6666 \dots = 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \dots$$

τότε, ουσιαστικά, γράφουμε τον αριθμό $\frac{2}{3}$ ως «άθροισμα» απείρου πλήθους πραγματικών αριθμών και έτσι καταδεικνύουμε το γεγονός ότι ο αριθμός στη δεκαδική του έκφραση έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία.

11. Ορισμός της σειράς

Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε την έκφραση «άθροισμα» απείρου πλήθους πραγματικών αριθμών. Πριν φτάσουμε όμως εκεί θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της (άπειρης)σειράς πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 11.1. Μια **σειρά** (ή άπειρη σειρά ή απειροσειρά) πραγματικών αριθμών $u_1, u_2, u_3, \dots$, ονομάζεται μια έκφραση της μορφής:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

Οι πραγματικοί αριθμοί $u_1, u_2, u_3, \dots$ ονομάζονται **όροι** της σειράς.

Δεδομένου ότι είναι αδύνατο να προσθέσουμε άπειρους αριθμούς, τα αθροίσματα άπειρων σειρών ορίζονται και υπολογίζονται από μια έμμεση διαδικασία υπολογισμού του ορίου μιας ακολουθίας αθροισμάτων. Πριν μπούμε όμως σε περισσότερες λεπτομέρειες χρειάζεται να δώσουμε κάποια ορολογία.

Έστω ότι με s_n συμβολίζουμε το άθροισμα των αρχικών όρων μιας σειράς μέχρι τον όρο που καθορίζει ο δείκτης n . Δηλαδή, είναι

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k \end{aligned}$$

Τότε ο αριθμός (άθροισμα) s_n ονομάζεται το **n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς** και η ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ονομάζεται ως **η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων**.

Καθώς το n αυξάνεται, το μερικό άθροισμα της σειράς $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ περιλαμβάνει όλο και περισσότερους όρους της σειράς. Έτσι, αν η ακολουθία s_n τείνει προς ένα όριο καθώς το $n \rightarrow +\infty$, είναι λογικό να θεωρήσουμε αυτό το όριο ως το άθροισμα όλων των όρων της σειράς. Αυτό υποδηλώνει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 11.2. Θεωρούμε την ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ των μερικών αθροισμάτων της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

Αν η ακολουθία $\{s_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο όριο S , δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$, τότε θα λέμε ότι **η σειρά συγκλίνει** στο S και το S είναι το άθροισμα της σειράς. Σε αυτή την περίπτωση θα συμβολίζουμε:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Αν η ακολουθία $\{s_n\}$ αποκλίνει, τότε θα λέμε ότι **η σειρά αποκλίνει**. Μια αποκλίνουσα σειρά δεν έχει άθροισμα.

► **Παράδειγμα 9.1.** Θεωρούμε την σειρά:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Είναι δελεαστικό να συμπεράνουμε ότι το άθροισμα της σειράς είναι μηδέν υποστηρίζοντας ότι οι θετικοί και αρνητικοί όροι αλληλοεξουδετερώνονται. Ωστόσο, αυτό είναι δεν είναι σωστό! Το πρόβλημα είναι ότι οι αλγεβρικές πράξεις που ισχύουν για πεπερασμένα αθροίσματα δεν μεταφέρονται σε άπειρες σειρές σε όλες τις περιπτώσεις. Αργότερα, θα συζητήσουμε συνθήκες υπό τις οποίες γνωστές αλγεβρικές πράξεις μπορούν να εφαρμοστούν σε άπειρες σειρές, αλλά για αυτό το παράδειγμα στρεφόμεστε απευθείας στον παραπάνω ορισμό. Δημιουργούμε αρχικά την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων και στη συνέχεια ελέγχουμε αν αυτή η ακολουθία συγκλίνει. Οπότε έχουμε,

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 - 1 = 0$$

$$s_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$s_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$$s_5 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$$

⋮

Επομένως, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι η ακόλουθη:

1,0,1,0,1, ...

η οποία είναι φανερό ότι δεν συγκλίνει μιας και οι όροι της ταλαντεύονται μεταξύ του 1 και του 0. Τελικά έχουμε ότι, η σειρά αποκλίνει. ◀

12. Η γεωμετρική σειρά

Η έννοια της γεωμετρικής σειράς είναι αρκετά σημαντική στις εφαρμογές και αναφέρεται σε μια σειρά όπου κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό από μια συγκεκριμένη σταθερά. Έτσι, αν για παράδειγμα ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής σειράς είναι ο αριθμός a και ο κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο πολλαπλασιάζοντας με τη σταθερά r , τότε η σειρά θα έχει τη μορφή:

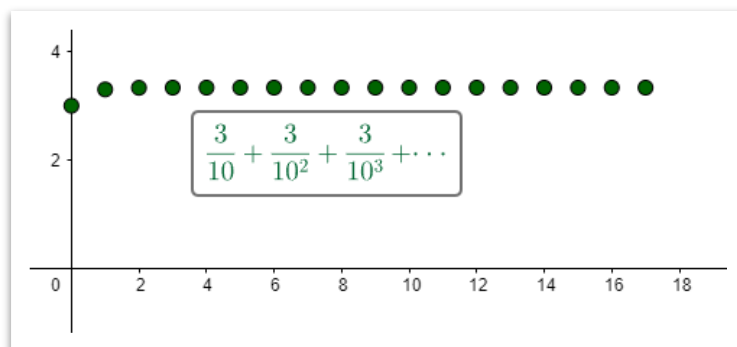
$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^k + \cdots \quad (a \neq 0)$$

Μια σειρά που έχει την παραπάνω μορφή καλείται **γεωμετρική σειρά**, και ο σταθερός αριθμός r

ονομάζεται **λόγος ή πηλίκο** (ratio) της γεωμετρικής σειράς.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα γεωμετρικών σειρών:

$$\begin{array}{ll}
 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + \dots & a = 1, r = 2 \\
 \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^k} + \dots & a = \frac{3}{10}, r = \frac{1}{10} \text{ (βλέπε σχήμα)} \\
 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{2^k} + \dots & a = \frac{1}{2}, r = -\frac{1}{2} \\
 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots & a = 1, r = 1 \\
 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{k+1} + \dots & a = 1, r = -1 \\
 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots & a = 1, r = x
 \end{array}$$



Σχήμα 6

Στο παρακάτω θεώρημα, θα δούμε τα βασικά κριτήρια που καθορίζουν το πότε μια γεωμετρική σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει.

Θεώρημα 12.1. Η γεωμετρική σειρά,

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^k + \dots \quad (a \neq 0)$$

Συγκλίνει όταν $|r| < 1$ και αποκλίνει όταν $|r| \geq 1$. Αν η σειρά συγκλίνει τότε το άθροισμα της (δηλαδή το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της) δίνεται από τον τύπο:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Λογμένες Ασκήσεις

► **Άσκηση 12.1.** Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k} \\
 \beta) \sum_{k=1}^{\infty} 3^{2k} 5^{1-k}
 \end{array}$$

Λύση. Α) Πρόκειται για μια γεωμετρική σειρά με $a = 5$ (θέτουμε $k = 0$) και $r = \frac{1}{4}$. Σημειώνουμε ότι, για να βρούμε τον λόγο σε μια γεωμετρική σειρά διαιρούμε δύο διαδοχικούς όρους, δηλαδή

$$r = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{5}{4^{k+1}}}{\frac{5}{4^k}} = \frac{1}{4}$$

και $|r| = \frac{1}{4} < 1$, επομένως η σειρά συγκλίνει και το άθροισμά της είναι:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$$

β) Πρόκειται για μια γεωμετρική σειρά με $a = 9$ (θέτουμε $k = 1$) και $r = \frac{9}{5}$. Πράγματι, για να βρούμε τον λόγο (όπως και στο α)) διαιρούμε δύο διαδοχικούς όρους, δηλαδή

$$r = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{3^{2(k+1)}5^{1-(k+1)}}{3^{2k}5^{1-k}} = \frac{3^{2k}3^2\cancel{5^{1-k}}5^{-1}}{\cancel{3^{2k}}5^{1-k}} = \frac{9}{5}$$

και $|r| = \frac{9}{5} > 1$, επομένως η σειρά αποκλίνει. ◀

► **Άσκηση 12.2.** Να βρείτε τη ρητή μορφή του παρακάτω δεκαδικού αριθμού:

$$0.784784784 \dots$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι: $0.784784784 \dots = 0.784 + 0.000784 + 0.000000784 + \dots$

οπότε η δεκαδική μορφή του αριθμού μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας γεωμετρικής σειράς με $a = 0.784$ και $r = 0.001$. Το άθροισμα της σειράς είναι:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{0.784}{1-0.001} = \frac{0.784}{0.999} = \frac{784}{999}$$

Οπότε, $0.784784784 \dots = \frac{784}{999}$. ◀

► **Άσκηση 12.3.** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν και στη συνέχεια να βρείτε το άθροισμά τους.

$$\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \beta) 3 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^3}{8} + \dots + \frac{3(-1)^k}{2^k} x^k + \dots$$

Λύση. Α) Παρατηρούμε ότι το ανάπτυγμα της σειράς είναι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots$$

Επομένως, έχουμε μια γεωμετρική σειρά με $a = 1$ και $r = x$. Για να συγκλίνει η σειρά θα πρέπει $|x| < 1$ (διαφορετικά αποκλίνει) και το άθροισμα της σειράς είναι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$$

Β) Παρατηρούμε από το ανάπτυγμα της σειράς ότι έχουμε μια γεωμετρική σειρά με $a = 3$ και $r = -\frac{x}{2}$. Για να συγκλίνει η σειρά θα πρέπει $|\frac{-x}{2}| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$ (διαφορετικά αποκλίνει). Τότε, το άθροισμα της σειράς είναι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3\left(-\frac{x}{2}\right)^k = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{6}{2+x}$$

για $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. ◀

13. Η τηλεσκοπική σειρά και η αρμονική σειρά

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε δυο ενδιαφέρουσες σειρές, την τηλεσκοπική σειρά και την αρμονική σειρά.

Θεωρούμε την σειρά,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

Τότε το n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς s_n δίνεται από τον τύπο:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Κατά συνέπεια μπορούμε να ξαναγράψουμε n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς s_n ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Με βάση τον ορισμό της σύγκλισης στις σειρές, αν η σειρά συγκλίνει, τότε όριο της S είναι

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Επομένως, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. συγκεκριμένη σειρά παρουσιάζει ένα μοτίβο αθροίσματος που ονομάζουμε **τηλεσκοπικό άθροισμα**. Το όνομα προέρχεται από το γεγονός ότι στην απλοποίηση του αθροίσματος, ένας όρος σε κάθε παρενθετική έκφραση ακυρώνει έναν όρο στην επόμενη παρενθετική έκφραση, έως ότου «καταρρεύσει» ολόκληρο το άθροισμα (σαν αναδιπλούμενο τηλεσκόπιο) σε δύο μόνο όρους. Με βάση τα παραπάνω, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ονομάζεται **τηλεσκοπική σειρά**.

Μία από τις σημαντικότερες από όλες τις αποκλίνουσες σειρές είναι η **αρμονική σειρά** που δίνεται από την παρακάτω φόρμουλα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Η απόδειξη (χωρίς να εμβαθύνουμε σε αυτή) ότι η συγκεκριμένη σειρά είναι αποκλίνουσα στηρίζεται στο γεγονός ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι γνησίως αύξουσα, αλλά δεν έχει άνω φράγμα.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να βρείτε τιμές για τα πρώτα τέσσερα μερικά άθροισματα των παρακάτω σειρών. Στη συνέχεια, βρείτε ένα κλειστό τύπο για το νιοστό μερικό άθροισμα της σειράς και πείτε εάν η σειρά συγκλίνει υπολογίζοντας το όριο του νιοστού μερικού άθροισματος. Εάν η σειρά συγκλίνει, τότε δώστε το άθροισμά της.
 - i. $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{2}{5^{k-1}} + \dots$
 - ii. $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2^2}{4} + \dots + \frac{2^{k-1}}{4} + \dots$
 - iii. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots$
 - iv. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$
 - v. $\sum_{k=1}^{\infty} 4^{k-1}$
 - vi. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right)$
2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν, και αν ναι, να δώσετε το όριό τους.
 - i. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$
 - ii. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}$
 - iii. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{7}{6^{k-1}}$
 - iv. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^{k+1}$
 - v. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$
 - vi. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$
 - vii. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 + 3k - 2}$
 - viii. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$

14. Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Στην τελευταία ενότητα δείξαμε πώς να βρούμε το άθροισμα μιας σειράς βρίσκοντας έναν κλειστό τύπο για το νιοστό μερικό άθροισμα και παίρνοντας το όριό του. Ωστόσο, είναι σχετικά σπάνιο να μπορεί κανείς να βρει έναν κλειστό τύπο για το νιοστό μερικό άθροισμα μιας σειράς, επομένως απαιτούνται εναλλακτικές μέθοδοι για την εύρεση του αθροίσματος μιας σειράς. Μια πιθανή εναλλακτική είναι να αποδειχθεί ότι η σειρά συγκλίνει και, στη συνέχεια, να προσεγγιστεί το άθροισμα από ένα μερικό άθροισμα (που θα περιλαμβάνει αρκετούς όρους για να επιτευχθεί ο επιθυμητός βαθμός ακρίβειας). Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε διάφορα κριτήρια που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσδιοριστεί εάν μια δεδομένη σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει.

Σε ότι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\sum u_k$ ως γενικό συμβολισμό αναφοράς στις σειρές, ενώ ο k -οστός όρος θα αναφέρεται ως ο **γενικός όρος της σειράς**. Ένα πρώτο κριτήριο-θεώρημα απόκλισης σειρών είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 14.1. (Κριτήριο απόκλισης σειρών)

- α) Αν η σειρά $\sum u_k$ συγκλίνει, τότε $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$.
- β) Αν $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$, τότε η σειρά $\sum u_k$ μπορεί είτε να αποκλίνει είτε να συγκλίνει.
- γ) Αν $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \neq 0$, τότε η σειρά $\sum u_k$ αποκλίνει.

► **Παράδειγμα 14.1.** Η σειρά,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{k}{k+1} + \dots$$

αποκλίνει, αφού $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = 1 \neq 0$. ◀

Θεώρημα 14.2. (Αλγεβρικές ιδιότητες)

α) Αν $\sum u_k$ και $\sum v_k$ είναι συγκλίνουσες σειρές, τότε οι σειρές $\sum(u_k + v_k)$ και $\sum(u_k - v_k)$, είναι επίσης συγκλίνουσες και τα άθροισμά τους ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - v_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{\infty} v_k\end{aligned}$$

β) Αν c είναι μια μη μηδενική σταθερά και η σειρά $\sum u_k$ συγκλίνει ή αποκλίνει τότε η σειρά $\sum c \cdot u_k$, συγκλίνει ή αποκλίνει, αντίστοιχα. Στην περίπτωση όπου συγκλίνει, το άθροισμα της δίνεται από τον τύπο:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c u_k = c \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

γ) Η σύγκλιση ή η απόκλιση μιας σειράς δεν επηρεάζεται αν διαγράψουμε έναν πεπερασμένο αριθμό από όρους. Αυτό σημαίνει ότι για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο K , οι σειρές:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} u_k &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ \sum_{k=K}^{\infty} u_k &= u_K + u_{K+1} + u_{K+2} + \dots\end{aligned}$$

είτε συγκλίνουν και οι δύο είτε αποκλίνουν και οι δύο.

► **Παράδειγμα 14.2.** Να βρείτε το άθροισμα της σειράς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}} \right)$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots$$

είναι μια συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά με $a = \frac{3}{4}$, $r = \frac{1}{4}$, και η σειρά,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k-1}} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots$$

είναι επίσης μια συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά με $a = 2$, $r = \frac{1}{5}$. Με βάση την περίπτωση α) από το προηγούμενο θεώρημα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}} \right)$ είναι συγκλίνουσα και ισχύει:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k-1}} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{3}{2}$$

Τελικά έχουμε, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}} \right) = -\frac{3}{2}$. ◀

► **Παράδειγμα 14.3** Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

α)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \dots + \frac{5}{k} + \dots$$

β) $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots$

Για το α), παρατηρούμε η σειρά είναι πολλαπλάσιο της αρμονικής σειράς, η οποία γνωρίζουμε ότι αποκλίνει. Με βάση την περίπτωση β) από το προηγούμενο θεώρημα, η σειρά αποκλίνει. Για το β), διαπιστώνουμε ότι πρόκειται πάλι για την αρμονική σειρά, με τη διαφορά ότι έχουν διαγραφεί οι πρώτοι εννέα της όροι. Με βάση την περίπτωση γ) από το προηγούμενο θεώρημα, η σειρά αποκλίνει.



Στη συνέχεια, θα δούμε μια κατηγορία σειρών που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία με διάφορα ονόματα όπως **αρμονικές σειρές τάξης p** ή **p -σειρές** ή ακόμη και **υπεραρμονικές σειρές**. Σε ότι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο **p -σειρά** για μια σειρά της μορφής:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{k^p} + \dots$$

όπου $p > 0$. Τα παρακάτω είναι παραδείγματα p -σειρών, όπου για $p = 1$ έχουμε την αρμονική σειρά, που έχουμε ήδη αναφέρει.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \dots & \boxed{p=1} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots & \boxed{p=2} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \dots & \boxed{p=\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Η σύγκλιση μιας p -σειράς ελέγχεται με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 14.3. (Κριτήριο σύγκλισης p -σειρών)

Η p -σειρά,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{k^p} + \dots$$

συνκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $0 < p \leq 1$.

► **Παράδειγμα 14.4** Η σειρά,

$$1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[5]{k}} + \dots$$

αποκλίνει, αφού είναι p -σειρά, με $p = \frac{1}{5} < 1$. ◀

Ασκήσεις προς επίλυση

- Με τη βοήθεια του θεωρήματος 14.2, να βρείτε το άθροισμα των παρακάτω σειρών.
 - $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{4^k}\right) + \dots$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} - \frac{1}{k(k+1)}\right)$
 - $\sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2-1} - \frac{7}{10^{k-1}}\right]$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} \left[7^{-k} 3^{k+1} - \frac{2^{k+1}}{5^k}\right]$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} 4^{k-1}$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right)$
- Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο απόκλισης σειρών στις παρακάτω περιπτώσεις.
 - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k+3}{2k^2+1}$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$
- Για κάθε μια από τις παρακάτω p -σειρές, να βρείτε την τιμή του p και να ελέγξετε τη σειρά ως προς τη σύγκλιση.
 - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/3}$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3}$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{k}}$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^5}}$
 - $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k^\pi}$

Θεώρημα 14.3. (Το κριτήριο της σύγκρισης σειρών)

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, όπου όλοι οι όροι τους είναι μη αρνητικοί και ισχύει:

$$a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, a_3 \leq b_3, \dots, a_k \leq b_k, \dots$$

α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, επίσης, συγκλίνει.

β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, επίσης, αποκλίνει.

Παρατήρηση 14.1. Αν μας δώσουν μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ με μη αρνητικούς όρους, τότε για να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της σύγκρισης, συνήθως, ακολουθούμε τα παρακάτω δύο βήματα:

Βήμα 1: Προσπαθούμε να «μαντέψουμε» αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

Βήμα 2: Βρίσκουμε μια κατάλληλη σειρά ώστε να αποδείξουμε, με τη βοήθεια του θεωρήματος 14.3, ότι η υπόθεσή μας είναι ορθή. Δηλαδή, αν πιστεύουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ αποκλίνει, τότε πρέπει να βρούμε μια αποκλίνουσα σειρά των οποίων οι όροι είναι "μικρότεροι" από τους αντίστοιχους όρους της $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε το β) του θεωρήματος 14.3, ενώ αν πιστεύουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ συγκλίνει, τότε πρέπει να βρούμε μια συγκλίνουσα σειρά της οποίας οι όροι να είναι "μεγαλύτεροι" από τους αντίστοιχους όρους της $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, ώστε να χρησιμοποιήσουμε το α) του θεωρήματος 14.3.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ που εξετάζεται θα έχει τον γενικό όρο u_k εκφρασμένο ως κλάσμα. Για να βοηθήσουμε στη διαδικασία της εικασίας στο πρώτο βήμα, έχουμε διατυπώσει δύο «Άτυπες Αρχές» (θα τις συμβολίζουμε με ΑΑ1 και ΑΑ2) που βασίζονται στη μορφή του παρονομαστή για το u_k . Αυτές οι αρχές μερικές φορές υποδηλώνουν εάν μια σειρά είναι πιθανό να συγκλίνει ή να αποκλίνει. Έχουμε ονομάσει αυτές αρχές ως «άτυπες αρχές» επειδή δεν προορίζονται ως τυπικά θεωρήματα, αφού στην πραγματικότητα, δεν λειτουργούν πάντα, ωστόσο, λειτουργούν αρκετά συχνά για να είναι χρήσιμες στη λύση των περισσότερων ασκήσεων.

Γενικές αρχές που εφαρμόζουμε κατά την επίλυση ασκήσεων με το κριτήριο της σύγκρισης είναι οι ακόλουθες:

ΑΑ1: Οι σταθεροί όροι στον παρονομαστή του u_k μπορούν, συνήθως, να διαγραφούν χωρίς να

επηρεαστεί η σύγκλιση ή η απόκλιση της σειράς.

AA2: Εάν ένα πολυώνυμο με μεταβλητή το k εμφανίζεται ως παράγοντας στον αριθμητή ή στον παρονομαστή του u_k , τότε όλοι εκτός από τον μεγιστοβάθμιο όρο στο πολυώνυμο μπορούν, συνήθως, να διαγραφούν χωρίς να επηρεαστεί η σύγκλιση ή η απόκλιση της σειράς.

Ακολουθούν παραδείγματα ώστε να γίνουν τα παραπάνω κατανοητά στην πράξη.

► **Παράδειγμα 14.5** Να μελετήσετε με το κριτήριο της σύγκρισης τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών.

$$\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}}$$

$$\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + k}$$

Για το α) και σύμφωνα με την AA1, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να διαγράψουμε τη σταθερά στον παρονομαστή χωρίς να επηρεάσουμε τη σύγκλιση ή την απόκλιση. Έτσι, η δεδομένη σειρά είναι πιθανό να συμπεριφέρεται όπως η σειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

η οποία ως p -σειρά, με $p = \frac{1}{2} < 1$, θα αποκλίνει. Επομένως, υποθέτουμε ότι η δοσμένη σειρά αποκλίνει και θα προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε. Πράγματι, αφού ισχύει,

$$\frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{για } k = 1, 2, \dots$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει, τότε από το θεώρημα 14.3 β) η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}}$ θα αποκλίνει.

Για το β) και σύμφωνα με την AA2, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να διαγράψουμε όλους τους όρους του πολυωνύμου, εκτός από τον μεγιστοβάθμιο όρο, χωρίς να επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση. Έτσι η δοσμένη σειρά γίνεται:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

η οποία ως p -σειρά, με $p = 2 > 1$, θα συγκλίνει.

Επομένως, υποθέτουμε ότι η δοσμένη σειρά συγκλίνει και θα προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε. Πράγματι, αφού ισχύει,

$$\frac{1}{2k^2 + k} < \frac{1}{2k^2} \quad \text{για } k = 1, 2, \dots$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ συγκλίνει, τότε από το θεώρημα 14.3 α), η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + k}$ συγκλίνει. ◀

Θεώρημα 14.4. (Το κριτήριο του ορίου)

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, όπου όλοι οι όροι τους είναι θετικοί και ισχύει:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

Αν το ρ είναι θετικός αριθμός, τότε είτε και οι δύο σειρές συγκλίνουν είτε και οι δύο σειρές αποκλίνουν.

Παρατήρηση 14.2. Για να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του ορίου, πρέπει και πάλι πρώτα να μαντέψουμε τη σύγκλιση ή την απόκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και στη συνέχεια να βρούμε μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ που να μας βοηθάει, μέσω του θεωρήματος, να αποδείξουμε την εικασία μας. Το ακόλουθο παράδειγμα ακολουθεί αυτόν τον τρόπο σκέψης.

► **Παράδειγμα 14.5** Να μελετήσετε με το κριτήριο του ορίου τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών.

$$\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+1}, \quad \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2+k}, \quad \gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3-2k^2+4}{k^7-k^3+2}$$

Για το α), θεωρούμε όπως και πριν ότι η δεδομένη σειρά είναι πιθανό να συμπεριφέρεται όπως η σειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

η οποία ως p -σειρά, με $p = \frac{1}{2} < 1$, και αποκλίνει. Επομένως, υποθέτουμε ότι η δοσμένη σειρά αποκλίνει και θα προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε. Πράγματι, θεωρούμε,

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}+1} \quad \text{και} \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

και τότε θα ισχύει:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} = 1$$

Αφού το $\rho = 1 > 0$, με βάση το κριτήριο του ορίου, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+1}$, θα αποκλίνει όπως και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Για το β), θα θεωρήσουμε την συγκλίνουσα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ και θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του ορίου με,

$$a_k = \frac{1}{2k^2+k} \quad \text{και} \quad b_k = \frac{1}{2k^2}$$

Έχουμε:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k^2}{2k^2+k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{2 + \frac{1}{k}} = 1$$

Αφού το $\rho = 1 > 0$, και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ συγκλίνει, με βάση το κριτήριο του ορίου, έπεται ότι και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2+k}$, συγκλίνει.

Για το γ), θα θεωρήσουμε την συγκλίνουσα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3}{k^7} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^4}$ (p -σειρά, με $p = 4 > 1$) και θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του ορίου με,

$$a_k = \frac{3k^3-2k^2+4}{k^7-k^3+2} \quad \text{και} \quad b_k = \frac{3}{k^4}$$

Έχουμε:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3k^3-2k^2+4}{k^7-k^3+2}}{\frac{3}{k^4}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3k^7-2k^6+4k^4}{3k^7-3k^3+6} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3k^7}{3k^7} = 1$$

Αφού το $\rho = 1 > 0$, και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^4}$ συγκλίνει, με βάση το κριτήριο του ορίου, έπεται ότι και η

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3 - 2k^2 + 4}{k^7 - k^3 + 2}, \text{ συγκλίνει. } \blacktriangleleft$$

Το επόμενο κριτήριο-θεώρημα λειτουργεί αποκλειστικά με τους όρους της δοσμένης σειράς και δεν απαιτεί ούτε μια αρχική εικασία για τη σύγκλιση ούτε την ανακάλυψη μιας σειράς για σύγκριση.

Θεώρημα 14.5. (Το κριτήριο του λόγου)

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, όπου όλοι οι όροι της είναι θετικοί και ισχύει:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ συγκλίνει.

β) Αν $\rho > 1$ ή $\rho = +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ αποκλίνει.

γ) Αν $\rho = 1$, τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το κριτήριο για να βγάλουμε συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς.

► **Παράδειγμα 14.6** Να μελετήσετε με το κριτήριο του λόγου τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών.

$$\begin{array}{ll} \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} & \delta) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k} \\ \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} & \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \\ \gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} & \end{array}$$

Για το α), η σειρά συγκλίνει, αφού

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

Για το β), η σειρά συγκλίνει, αφού

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{2} < 1$$

Για το γ), η σειρά αποκλίνει, αφού

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e > 1$$

Για το δ), η σειρά αποκλίνει, αφού

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{[2(k+1)]!}{4^{k+1}} \cdot \frac{4^k}{(2k)!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2k+2)!}{(2k)!} \cdot \frac{1}{4} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(2k)!} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \lim_{k \rightarrow +\infty} (2k+2)(2k+1) = +\infty \end{aligned}$$

Για το ε), δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα με το κριτήριο του λόγου, αφού

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(k+1)-1} \cdot \frac{2k-1}{1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k-1}{2k+1} = 1$$

Το τελευταίο κριτήριο που θα παρουσιάσουμε, για τη μελέτη της σύγκλισης σειρών, είναι το κριτήριο της ρίζας. ◀

Θεώρημα 14.6. (Το κριτήριο της ρίζας)

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, όπου όλοι οι όροι της είναι θετικοί και ισχύει:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k)^{1/k}$$

α) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ συγκλίνει.

β) Αν $\rho > 1$ ή $\rho = +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ αποκλίνει.

γ) Αν $\rho = 1$, τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το κριτήριο για να βγάλουμε συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς.

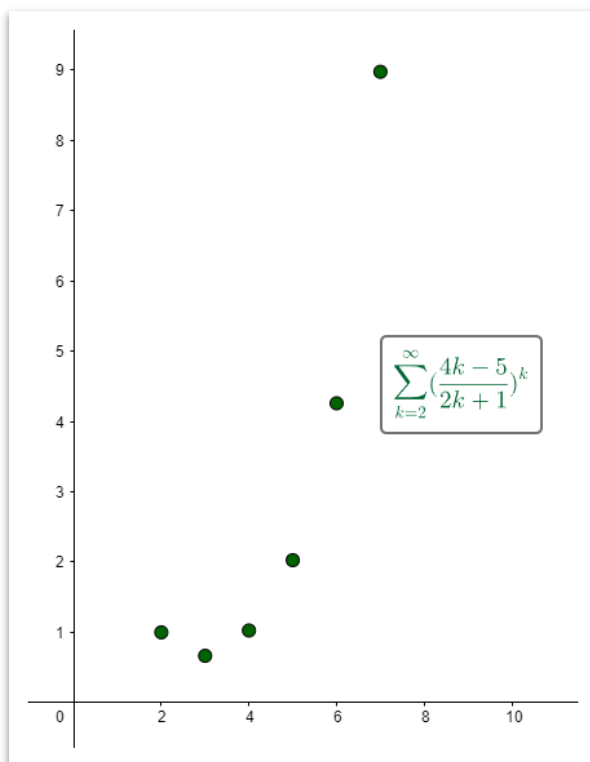
► **Παράδειγμα 14.7** Να μελετήσετε με το κριτήριο της ρίζας τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών.

$$\alpha) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{4k-5}{2k+1} \right)^k$$

$$\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k+1))^k}$$

Για το α), η σειρά αποκλίνει, αφού

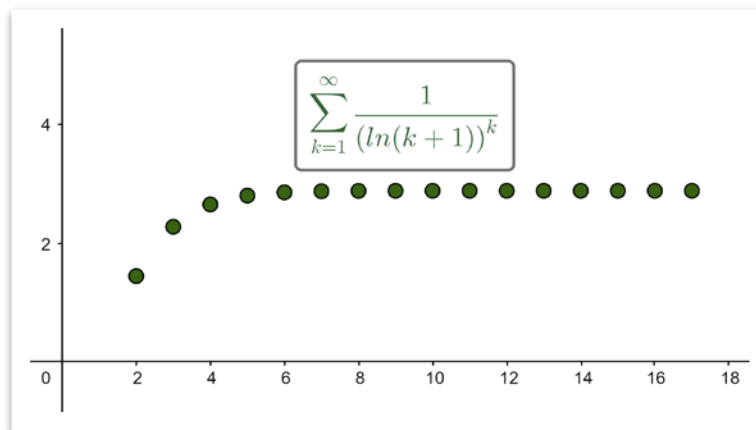
$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4k-5}{2k+1} = 2 > 1$$



Σχήμα 7

Για το β), η σειρά συγκλίνει, αφού

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} = 0 < 1. \quad \blacktriangleleft$$



Σχήμα 8

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Με τη βοήθεια του κριτηρίου της σύγκρισης να εξετάσετε τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών.
 - i. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k^2 - k}$
 - ii. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k - \frac{1}{4}}$
 - iii. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^2 - k}$
 - iv. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^4 + k}$
2. Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο του ορίου στις παρακάτω περιπτώσεις.
 - i. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 - 2k + 6}{8k^7 + k - 8}$
 - ii. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^k + 1}$
 - iii. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k + 6}$
3. Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο του λόγου στις παρακάτω περιπτώσεις.
 - i. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$
 - ii. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^2}$
 - iii. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k}$
 - iv. $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k$
4. Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο της ρίζας στις παρακάτω περιπτώσεις.
 - i. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k$
 - ii. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{100}\right)^k$
 - iii. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k}$