Περιεχόμενα

1 Προλεγόμενα **21**

2 Θεωρία Συνόλων **23**

2.1 Βασικοί Ορισμοί 23
2.2 Σχέσεις Εγκλεισμού 24
2.3 Πράξεις Μεταξύ των Συνόλων 24
2.3.1 Συμπλήρωμα Συνόλου 24
2.3.2 Τομή Συνόλων 25
2.3.3 Ένωση Συνόλων 25
2.3.4 Διαφορά Συνόλων 26
2.3.5 Συμμετρική Διαφορά 26
2.3.6 Επιμεριστικές Ιδιότητες 27
2.3.7 Προσεταιριστικές Ιδιότητες 27
2.3.8 Τύποι του *de Morgan* 27
2.4 Καρτεσιανό Γινόμενο 28
2.4.1 Διατεταγμένο Ζεύγος 28
2.4.2 Διατεταγμένη n-άδα 28
2.4.3 Καρτεσιανό Γινόμενο Δύο Συνόλων 28
2.4.4 Γενίκευση Καρτεσιανού Γινομένου 29
2.4.5 Τα Σύνολα R^2 και R^3 29
2.4.6 Καρτεσιανό Γινόμενο Διαστημάτων 29
2.4.7 Γραφική Παράσταση Καρτεσιανού Γινομένου . . 29
2.5 Λυμένες Ασκήσεις 29
2.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση 36

3 Διμελείς Σχέσεις **43**

3.1 Βασικοί Ορισμοί 43
3.2 Είδη Διμελών Σχέσεων 44
3.3 Σχέσεις Ισοδυναμίας 45

3.4 Σχέσεις Διατάξεως 45
3.5 Διατεταγμένα Σύνολα – Βασικοί Ορισμοί 46
3.6 Διατεταγμένα Σύνολα – Βασικά Θεωρήματα 46
3.7 Λυμένες Ασκήσεις 47
3.8 Ασκήσεις προς Επίλυση 51

4 Πραγματικοί Αριθμοί **55**
4.1 Βασικά Αριθμοσύνολα 55
4.2 Άρτιοι, Περιττοί και Πρώτοι Αριθμοί 55
4.3 Η Ταυτότητα της Διαίρεσης 55
4.4 Βασικές Έννοιες στο $\mathbf{R}$ 56
4.5 Το Σύνολο των Πραγματικών Αριθμών 56
4.6 Το Άπειρο 57
4.7 Διαστήματα στο $\mathbf{R}$ 58
4.8 Απόλυτη Τιμή 58
4.9 max και min Πραγματικών Αριθμών 58
4.10 Ιδιότητες 59
4.11 Αλγεβρικοί και Υπερβατικοί Αριθμοί 59
4.12 Λυμένες Ασκήσεις 60
4.13 Ασκήσεις προς Επίλυση 61

5 Πραγματικές Συναρτήσεις **63**
5.1 Ορισμοί 63
5.2 Βασικές Έννοιες 63
5.3 Είδη Συναρτήσεων 64
5.4 Γραφήματα 65
5.5 Μετασχηματισμοί Γραφημάτων 65
5.6 Λυμένες Ασκήσεις 65
5.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση 66

6 Ακολουθίες **69**
6.1 Ορισμοί 69
6.2 Σύγκλιση Ακολουθιών 70
6.3 Ακολουθίες στο Άπειρο 70
6.4 Βασικά Θεωρήματα 70
6.5 Βασικά Όρια 71

6.6 Βασικές Ιδιότητες Υπολογισμού Ορίων 71
6.7 Ακολουθίες *Cauchy* 72
6.8 Οι Έννοιες lim sup και lim inf 72
6.9 Λυμένες Ασκήσεις 72
6.10 Ασκήσεις Προς Επίλυση 74

7 Όρια και Συνέχεια Συναρτήσεων 77
7.1 Όρια Πραγματικών Συναρτήσεων 77
7.2 Όρια στο Άπειρο 77
7.3 Συνέχεια Συναρτήσεων 78
7.4 Βασικά Θεωρήματα 78
7.5 Λυμένες Ασκήσεις 79
7.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση 80

8 Παράγωγοι – Βασικές Έννοιες 81
8.1 Το Πρόβλημα της Εφαπτομένης, (Newton). 81
8.2 Το Πρόβλημα της Μεταβολής, (Leibnitz). 81
8.3 Παράγωγοι Ειδικών Συναρτήσεων 82
8.4 Βασικές Ιδιότητες και Θεωρήματα 83
8.5 Λυμένες Ασκήσεις 83
8.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση 87

9 Παραγώγιση Συνθέτων Συναρτήσεων 91
9.1 Ο Κανών της Αλυσίδος 91
9.2 Λυμένες Ασκήσεις 91
9.3 Ασκήσεις Προς Επίλυση 93

10 Παράγωγοι Ανωτέρας Τάξεως 97
10.1 Ο Τύπος του *Leibnitz* 97
10.2 Λυμένες Ασκήσεις 98
10.3 Ασκήσεις Προς Επίλυση 100

11 Γεωμετρικές Έννοιες 103
11.1 Ορισμοί 103
11.2 Λυμένες Ασκήσεις 103
11.3 Ασκήσεις Προς Επίλυση 106

12 Η Μέθοδος *Newton – Raphson* **111**
12.1 Ο Βασικός Τύπος 111
12.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Μεθόδου 111
12.3 Λυμένες Ασκήσεις 112
12.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση 113

13 Συμπεριφορά Συναρτήσεων **115**
13.1 Μονοτονία Συναρτήσεων 115
13.2 Μονοτονία και Παράγωγοι 115
13.3 Κυρτότητα και Κοιλότητα 116
13.4 Κυρτότητα και Παράγωγοι 116
13.5 Λυμένες Ασκήσεις 117
13.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση 117

14 Βασικές Οικονομικές Συναρτήσεις **119**
14.1 Η Συνάρτηση Παραγωγής 119
14.2 Η Συνάρτηση Κόστους 120
14.3 Η Συνάρτηση Ζήτησης 121
14.4 Η Συνάρτηση Προσφοράς 122
14.5 Η Συνάρτηση Εσόδων 122
14.6 Η Συνάρτηση Κέρδους 123
14.7 Λυμένες Ασκήσεις 123
14.8 Ασκήσεις Προς Επίλυση 130

15 Ελαστικότητες **137**
15.1 Ελαστικότητα Σημείου Πραγματικής Συνάρτησης 137
15.2 Βασικές Ιδιότητες 137
15.3 Ελαστικότητα επί Τόξου 138
15.4 Η Ελαστικότητα Σημείου Οικονομικών Συναρτήσεων . . 138
15.5 Λυμένες Ασκήσεις 139
15.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση 144

16 Θεωρήματα Μέσης Τιμής **149**
16.1 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού . . 149
16.2 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του *Rolle* 149
16.3 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του *Cauchy* 149
16.4 Λυμένες Ασκήσεις 150
16.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση 150

17 Ασύμπτωτες Ευθείες **153**
17.1 Βασικός Ορισμός 153
17.2 Κατακόρυφες Ασύμπτωτες 153
17.3 Οριζόντιες Ασύμπτωτες 153
17.4 Πλάγιες Ασύμπτωτες 154
17.5 Λυμένες Ασκήσεις 154
17.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση 155

18 Η Εκθετική και η Λογαριθμική Συνάρτηση **159**
18.1 Η Εκθετική Συνάρτηση 159
18.2 Ο Αριθμός e 159
18.3 Ιδιότητες 159
18.4 Η Λογαριθμική Συνάρτηση 160
18.5 Ιδιότητες 160
18.6 Βασικός Τύπος για την Ελαστικότητα 161
18.7 Ρυθμός Μεγέθυνσης 161
18.7.1 Ιδιότητες του Ρυθμού Μεγέθυνσης 162
18.8 Σημαντικές Εκθετικές Συναρτήσεις 162
18.8.1 Συναρτήσεις Εκθετικής Μεγέθυνσης ή Φθίσης 162
18.8.2 Η Συνάρτηση Μάθησης 162
18.8.3 Η Λογιστική Συνάρτηση 162
18.8.4 Η Συνάρτηση Comptez 163
18.9 Λυμένες Ασκήσεις 163
18.10Ασκήσεις Προς Επίλυση 166

19 Ανατοκισμός **171**
19.1 Ο Τύπος του Διακριτού Ανατοκισμού 171
19.2 Ο Τύπος του Συνεχούς Ανατοκισμού 171
19.3 Παρούσα Αξία 171
19.4 Πραγματικό και Ονομαστικό Επιτόκιο 172
19.5 Ίσες Καταθέσεις 172
19.6 Χρεωλυσία 172
19.7 Λυμένες Ασκήσεις 173
19.8 Ασκήσεις Προς Επίλυση 175

20 Το Διαφορικό **179**
20.1 Διαφορικό Πρώτης Τάξεως 179
20.2 Ιδιότητες Διαφορικών 179
20.3 Γεωμετρική Ερμηνεία τού Διαφορικού 180
20.4 Διαφορικά Ανωτέρας Τάξεως 180
20.5 Σφάλματα 181
20.6 Λυμένες Ασκήσεις 181
20.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση 186

21 Πεπλεγμένες Συναρτήσεις **189**
21.1 Ορισμός Πεπλεγμένης Συνάρτησης 189
21.2 Παραγώγιση Πεπλεγμένων Συναρτήσεων 189
21.3 Παραγώγιση Εκθετικών Μορφών 190
21.4 Οριακοί Λόγοι Υποκατάστασης 190
21.5 Λυμένες Ασκήσεις 190
21.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση 195

22 Αντίστροφες Συναρτήσεις **205**
22.1 Ορισμοί 205
22.2 Ιδιότητες Αντιστροφής 205
22.3 Παραγώγιση Αντιστρόφων 205
22.4 Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις 206
22.5 Παραγώγιση Αντιστρόφων Τριγωνομετρικών 206
22.6 Λυμένες Ασκήσεις 207
22.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση 208

23 Μέγιστα και Ελάχιστα **211**
23.1 Βασικοί Ορισμοί 211
23.2 Το Κριτήριο της Μονοτονίας 212
23.3 Το Κριτήριο της Δευτέρας Παραγώγου. (*Fermat*) . . . 212
23.4 Το Κριτήριο της ν-οστής Παραγώγου 212
23.5 Ολικά Ακρότατα 213
23.6 Λυμένες Ασκήσεις 214
23.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση 225

24 Κυρτές και Κοίλες Συναρτήσεις **233**
24.1 Γεωμετρικοί Ορισμοί με Ευθύγραμμα Τμήματα 233
24.2 Γεωμετρικοί Ορισμοί με Εφαπτομένες 235
24.3 Αλγεβρικοί Ορισμοί 236
24.4 Ορισμοί με την Πρώτη Παράγωγο 237
24.5 Θεωρήματα με τη Δεύτερη Παράγωγο 238
24.6 Βασικές Κυρτές και Κοίλες Συναρτήσεις 238
24.7 Ιδιότητες 239
24.8 Η ανισότητα του *Jensen* 240
24.9 Σημεία Καμπής 240
24.10Ακρότατα και Κυρτότητα – Κοιλότητα 241
24.11Λυμένες Ασκήσεις 241
24.12Ασκήσεις Προς Επίλυση 247

25 Σειρές **251**
25.1 Βασικές Έννοιες 251
25.2 Βασικοί Ορισμοί 251
25.3 Στοιχειώδεις Σειρές 252
25.4 Βασικές Ιδιότητες 252
25.5 Βασικά θεωρήματα 253
25.6 Λυμένες Ασκήσεις 253
25.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση 257

26 Σειρές Συναρτήσεων **259**
26.1 Σειρές *Taylor* 259
26.2 Σειρές *Maclaurin* 260
26.3 Ο Τύπος του Διωνύμου 260
26.4 Λυμένες Ασκήσεις 260
26.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση 267

27 Το Αόριστο Ολοκλήρωμα **271**
27.1 Ορισμός 271
27.2 Βασικές Προτάσεις 271
27.3 Η Σταθερά της Ολοκλήρωσης 272
27.4 Στοιχειώδη Αόριστα Ολοκληρώματα 272
27.5 Βασικές Ιδιότητες 273

27.6 Λυμένες Ασκήσεις 273
27.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση 274

28 Ολοκλήρωση με τη Μέθοδο των Προσδιοριστέων Συντελεστών 277
28.1 Η Μέθοδος 277
28.2 Λυμένες Ασκήσεις 277
28.3 Ασκήσεις Προς Επίλυση 280

29 Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση 283
29.1 Λυμένες Ασκήσεις 283
29.2 Ασκήσεις Προς Επίλυση 287

30 Ολοκληρώματα μέσω της *τοξεφχ* 291
30.1 Λυμένες Ασκήσεις 291
30.2 Ασκήσεις Προς Επίλυση 293

31 Παραγοντική Ολοκλήρωση 295
31.1 Ο Βασικός Τύπος 295
31.2 Εμπειρικοί Κανόνες 295
31.3 Λυμένες Ασκήσεις 296
31.4 Ασκήσεις προς Επίλυση 304

32 Αναγωγικοί Τύποι 307
32.1 Γενικά 307
32.2 Τριγωνομετρικοί Αναγωγικοί Τύποι 307
32.3 Αναγωγικός Τύπος Ρητής Ολοκλήρωσης 307
32.4 Λυμένες Ασκήσεις 308
32.5 Ασκήσεις προς Επίλυση 314

33 Ανάλυση σε Άθροισμα Απλών Κλασμάτων 315
33.1 Γενικά 315
33.2 Ανάλυση σε Απλά Κλάσματα 315
33.3 Τύποι ανάλυσης σε απλά κλάσματα 316
33.4 Προσδιορισμός των σταθερών 317
33.5 Λυμένες Ασκήσεις 317
33.6 Ασκήσεις προς Επίλυση 323

34 Βασικά Ρητά Ολοκληρώματα **327**
34.1 Γενικά 327
34.2 Το ολοκλήρωμα O_1 327
34.3 Το ολοκλήρωμα O_2 328
34.4 Το ολοκλήρωμα O_3 328
34.5 Το ολοκλήρωμα O_4 328
34.6 Το ολοκλήρωμα O_5 329
34.7 Το ολοκλήρωμα O_6 329
34.8 Λυμένες Ασκήσεις 329
34.9 Ασκήσεις Προς Επίλυση 335

35 Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων **339**
35.1 Γενικά 339
35.2 Η Μέθοδος 339
35.3 Λυμένες Ασκήσεις 340
35.4 Ασκήσεις προς Επίλυση 344

36 Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων **347**
36.1 Γενικά 347
36.2 Τριγωνομετρικά Γινόμενα 347
36.3 Ολοκλήρωση περιττών δυνάμεων, τριγωνομετρικών συναρτήσεων 348
36.4 Ολοκλήρωση αρτίων δυνάμεων, τριγωνομετρικών συναρτήσεων 348
36.5 Ολοκληρώματα γινομένων δυνάμεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων 349
36.6 Ολοκληρώματα πηλίκων δυνάμεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων 350
36.7 Γενικός τρόπος ολοκλήρωσης τριγωνομετρικών συναρτήσεων 350
36.8 Λυμένες Ασκήσεις 350
36.9 Ασκήσεις προς Επίλυση 356

37 Ολοκλήρωση Αρρήτων Συναρτήσεων I **359**
37.1 Ένα πρωτοβάθμιο υπόρριζο 359
37.2 Πολλά πρωτοβάθμια υπόρριζα 359
37.3 Πολλά απλά υπόρριζα 360
37.4 Λυμένες Ασκήσεις 360
37.5 Ασκήσεις προς Επίλυση 362

38 Ολοκλήρωση Αρρήτων Συναρτήσεων II **365**
38.1 Τριγωνομετρική Αντικατάσταση 365
38.2 Οι Μετασχηματισμοί του *Euler* 366
38.3 Λυμένες Ασκήσεις 366
38.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση 370

39 Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα **373**
39.1 Ορισμός 373
39.2 Βασικά Θεωρήματα 374
39.3 Βασικές Ιδιότητες 374
39.4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού 375
39.5 Λυμένες Ασκήσεις 375
39.6 Ασκήσεις προς Επίλυση 384

40 Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού **391**
40.1 Το Θεώρημα της Μέσης Τιμής 391
40.2 Μέση Τιμή Συνάρτησης 391
40.3 Γεωμετρική Ερμηνεία της Μέσης Τιμής 391
40.4 Λυμένες Ασκήσεις 392
40.5 Ασκήσεις προς Επίλυση 392

41 Παραγώγιση Ολοκληρωμάτων **395**
41.1 Το Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού 395
41.2 Ο Τύπος του *Leibnitz* 395
41.3 Ο Γενικευμένος Τύπος του *Leibnitz* 396
41.4 Λυμένες Ασκήσεις 396
41.5 Ασκήσεις προς Επίλυση 400

42 Γενικευμένα Ολοκληρώματα ≪Πρώτου≫ Είδους **405**
42.1 Μορφή I 405
42.2 Μορφή II 405
42.3 Μορφή III 406
42.4 Κριτήρια Σύγκλισης 406
42.5 Παραγώγιση και Ολοκλήρωση Γενικευμένων Ολοκληρωμάτων 407
42.6 Σειρές και Γενικευμένα Ολοκληρώματα 408

42.7 Η Συνάρτηση Γάμμα 408
42.8 Ο Μετασχηματισμός *Laplace* 409
42.9 Λυμένες Ασκήσεις 409
42.10Ασκήσεις προς Επίλυση 429

43 Γεωμετρικές Εφαρμογές των Ολοκληρωμάτων 439
43.1 Υπολογισμός Εμβαδών 439
43.1.1 Καρτεσιανά εμβαδά ως προς τον άξονα των x . . 439
43.1.2 Καρτεσιανά εμβαδά ως προς τον άξονα των y . . 442
43.1.3 Παραμετρικό Εμβαδόν 443
43.1.4 ≪Άπειρα≫ Εμβαδά 444
43.1.5 Πολικά Εμβαδά 444
43.2 Μήκος Τόξου 445
43.2.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες 445
43.2.2 Πολικές Συντεταγμένες 445
43.3 Λυμένες Ασκήσεις 446
43.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση 458

Βιβλιογραφία 467