Κεφάλαιο 14

Βασικές Οικονομικές Συναρτήσεις

Για την πληρότητα αυτών των σημειώσεων και αφού πολλές ασκήσεις έχουν ≪οικονομική≫ εκφώνηση, θα παραθέσουμε τους ορισμούς των βασικών οικονομικών συναρτήσεων. Προς αποφυγήν αντιφάσεων, όλοι οι ορισμοί έχουν αντιγραφεί από το βιβλίο των $Samuelson - Nordhaus$ ≪Οικονομική≫.

14.1 Η Συνάρτηση Παραγωγής

> ≪Η *συνάρτηση παραγωγής* προσδιορίζει τη μεγίστη εκροή που μπορεί να παραχθεί με δεδομένη ποσότητα εισροών. Και έχει ορισθεί για δεδομένο επίπεδο μηχανολογικής και τεχνικής γνώσης.≫

Όταν εξετάζουμε συναρτήσεις μίας μεταβλητής, θεωρούμε ότι υπάρχει μία μόνον εισροή, συμβολιζόμενη με x. Συνήθως, ο παράγων x είναι είτε η εργασία L είτε το κεφάλαιο K. Αν q είναι η εκροή, γράφουμε:

$$\boxed{q = Q(x) \quad ή \quad q = Q(L) \quad ή \quad q = Q(K)}$$

Μία συνάρτηση παραγωγής είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και $Q(x) \geq 0$, $Q(0) = 0$.

> ≪*Μέσο προϊόν* είναι το συνολικό προϊόν διαιρούμενο με τις συνολικές μονάδες της εισροής≫.

Στην παρούσα φάση, η ζήτηση είναι $q = \theta$. Αντικαθιστώντας στην $ap + bq = \gamma$, βρίσκουμε $p = \dfrac{\gamma - b\theta}{a}$ και η (14.1) γίνεται:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dp}{dt} \cdot \theta + \frac{\gamma - b\theta}{a} \cdot \frac{d\theta}{dt} \tag{14.2}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι τη $ap + bq = \gamma$, έχουμε

$$a \cdot \frac{dp}{dt} + b \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Αντικαθιστώντας τώρα στη (14.2), έχουμε:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \theta + \frac{\gamma - b\theta}{a} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \left(-\frac{b}{a} \cdot \theta + \frac{\gamma - b\theta}{a} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\theta = \dfrac{\gamma}{2b}$, και επομένως, η μεταβολή είναι σταθερή.

14.8 Ασκήσεις Προς Επίλυση

14.16 *Δίδεται η συνάρτηση κόστους* $C(q) = ae^{bq}$. *Για ποιες τιμές των παραμέτρων* a, b, *εάν υπάρχουν, η συνάρτηση αυτή είναι φθίνουσα και κοίλη;*

Απ: Δεν υπάρχουν.

14.17 *Η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι* $D(p) = p^2 + ap + b$ *και η συνάρτηση προσφοράς είναι* $S(p) = p^3 - c$, p *η τιμή του προϊόντος. Να βρεθούν τα* a, b, c *ώστε οι αντίστοιχες καμπύλες να τέμνονται στο* $(2, 4)$ *και να έχουν εκεί την ίδια κλίση.*

Απ: $a = 8, b = -16, c = 4$

14.18 *Για ποιες τιμές των παραμέτρων* a, b, γ *η συνάρτηση ζήτησης* $D(p) = \dfrac{a - bp}{\gamma}$ *είναι φθίνουσα;*

Απ: $b > 0, \gamma > 0$ ή $b < 0, \gamma < 0$

14.19 *Για ποιες τιμές των παραμέτρων* a, b, g, d *η συνάρτηση ζήτησης* $D(p) = \dfrac{a}{bp + g} - d$ *αντιπροσωπεύει αγαθά* $Giffen$ *;*

Κεφάλαιο 15

Ελαστικότητες

15.1 Ελαστικότητα Σημείου Πραγματικής Συνάρτησης

Έστω $f(x)$ διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση. *Ελαστικότητα* της $f(x)$ στο σημείο x ονομάζουμε την ποσότητα:

$$\boxed{\varepsilon_f(x) = \frac{\dfrac{df}{dx}}{\dfrac{f(x)}{x}} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)}}$$

Η ελαστικότητα αποτελεί έναν ≪τρόπο εκτίμησης≫ της ποσοστιαίας μεταβολής της $f(x)$ για ποσοστιαία μεταβολή της x, ανεξαρτήτως από τις χρησιμοποιούμενες μονάδες μέτρησης.

15.2 Βασικές Ιδιότητες

Ιδιότητα 15.1 *Εάν* $y(x) = f(x) + a, a \in \mathbf{R}$*, ισχύει η σχέση:*

$$\boxed{\varepsilon_y(x) = \frac{f(x)}{f(x) + a} \cdot \varepsilon_f(x)}$$

Ιδιότητα 15.2 *Εάν* $y(x) = af(x), a \in \mathbf{R}$*, ισχύει η σχέση:*

$$\boxed{\varepsilon_y(x) = \varepsilon_f(x)}$$

Ιδιότητα 15.3 *Εάν* $y(x) = f(x) + g(x)$*, ισχύει η σχέση:*

$$\boxed{\varepsilon_y(x) = \frac{f(x) \cdot \varepsilon_f(x) + g(x) \cdot \varepsilon_g(x)}{f(x) + g(x)}}$$

Ιδιότητα 15.4 *Εάν* $y(x) = f(x) \cdot g(x)$*, ισχύει η σχέση:*

$$\boxed{\varepsilon_y(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)}$$

Ιδιότητα 15.5 *Εάν* $y(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$*, ισχύει η σχέση:*

$$\boxed{\varepsilon_y(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)}$$

Ιδιότητα 15.6 *Εάν* $y(x) = f(g(x))$*, ισχύει η σχέση:*

$$\boxed{\varepsilon_y(x) = \varepsilon_f(x) \cdot \varepsilon_g(x)}$$

15.3 Ελαστικότητα επί Τόξου

Έστω τόξο AB, οριζόμενο από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Η ελαστικότητα επί του τόξου AB ορίζεται ως εξής

$$\boxed{\varepsilon_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}}$$

Η ελαστικότητα τόξου είναι μία λύση ανάγκης με σοβαρά μειονεκτήματα. Το πλεονέκτημά της, εν σχέσει με τη σημειακή, έγκειται στο ότι δεν χρειάζεται για τον ορισμό της ο αναλυτικός τύπος της συνάρτησης. Κύριο μειονέκτημά της είναι ότι εξαρτάται μόνον από τις ακραίες τιμές (x_1, y_1) και (x_2, y_2), δηλαδή είναι η ίδια για όλες τις διαδρομές μεταξύ τους, οι οποίες μπορεί να είναι εντελώς διαφορετικές.

15.4 Η Ελαστικότητα Σημείου Οικονομικών Συναρτήσεων

Εάν στους παραπάνω τύπους της ελαστικότητος αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ με κάποια από τις γνωστές οικονομικές συναρτήσεις, αποκτούμε την ελαστικότητα του αντιστοίχου οικονομικού μεγέθους. Έτσι έχουμε την ελαστικότητα παραγωγής, ζήτησης, κόστους, εσόδων, κέρδους κ.λ.π., ως προς κάποια οικονομική μεταβλητή, κάθε φορά. Χαρακτηριστικά παραθέτουμε τον ορισμό της ελαστικότητας ζήτησης. Αντίστοιχα ορίζονται και οι υπόλοιπες ελαστικότητες. *Ελαστικότητα ζήτησης* ονομάζουμε τη ποσότητα:

$$\boxed{\varepsilon_D = \frac{\frac{dD}{dp}}{\frac{D}{p}} = \frac{dD}{dp} \cdot \frac{p}{D}}$$

Δείχνει πόσο ≪ευαίσθητη≫ είναι η ζήτηση ενός αγαθού στις μεταβολές της τιμής του.

15.5 Λυμένες Ασκήσεις

15.1 Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = 15x - e^{-x}$, υπολογίσατε την $\varepsilon_f(1)$.

Λύση: Από τον ορισμό της ελαστικότητας έχουμε:

$$\varepsilon_f(1) = \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=1}}{\frac{f(1)}{1}} = \frac{15 + e^{-1}}{15 - e^{-1}} = \frac{15e + 1}{15e - 1}$$

15.2 Αποδείξατε την ιδιότητα (15.1).

Λύση: Από τον ορισμό της ελαστικότητος, έχουμε με διαδοχικές αντικαταστάσεις:

$$\varepsilon_y = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y(x)}{x}} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{f(x)+a}{x}} = \frac{\frac{df}{dx} \cdot f}{\frac{f(x)+a}{x} \cdot f} =$$

$$\frac{f(x)}{f(x)+a} \cdot \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{f(x)}{f(x)+a} \cdot \varepsilon_f$$

15.3 Αποδείξατε την ιδιότητα (15.6).

Λύση: Θέτοντας $w = g(x)$, έχουμε από τον ορισμό της ελαστικότητος:

$$\varepsilon_y = \frac{\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{y(x)}{x}} = \frac{\dfrac{df}{dw} \cdot \dfrac{dw}{dx}}{\dfrac{f(g(x))}{x}} =$$

$$= \frac{\dfrac{df}{dw} \cdot \dfrac{dw}{dx}}{\dfrac{f(w) \cdot w}{w \cdot x}} = \frac{\dfrac{df}{dw}}{\dfrac{f(w)}{w}} \cdot \frac{\dfrac{dg}{dx}}{\dfrac{g(x)}{x}} = \varepsilon_f \cdot \varepsilon_g$$

15.4 Να υπολογισθεί η ελαστικότητα της συνάρτησης $y(x) = x\sqrt{x^2+1}$.

Λύση: Ορίζουμε $f(x) = x$ και $g(x) = \sqrt{x^2+1}$. Από την ιδιότητα (15.4) έχουμε $\varepsilon_y = \varepsilon_f + \varepsilon_g$. Θα υπολογίσουμε τις επιμέρους ελαστικότητες. Εύκολα βλέπουμε ότι $\varepsilon_f = 1$. Για την ε_g θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα (15.6). Θέτουμε $w = x^2 + 1$ και έχουμε $\varepsilon_g = \varepsilon_w \cdot \varepsilon_x$. Αλλά

$$\varepsilon_w = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{w}}}{\dfrac{\sqrt{w}}{w}} = \frac{1}{2}$$

και

$$\varepsilon_x = \frac{2x}{\dfrac{x^2+1}{x}} = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$\varepsilon_y = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

15.5 Έστω $R(q)$ η συνάρτηση εσόδων και $p = G(q)$ η συνάρτηση ζήτησης. Δείξατε ότι $\varepsilon_R = 1 + \varepsilon_G$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon_R = \dfrac{dR}{dq} \cdot \dfrac{q}{R}$. Αντικαθιστώντας όπου R το ίσο του, $R = q \cdot G$, έχουμε:

$$\varepsilon_R = \frac{d(qG)}{dq} \cdot \frac{q}{qG} = \frac{\left(G + q\dfrac{dG}{dq}\right)}{G} = 1 + \varepsilon_G$$

15.6 Έστω ε_D η ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού. Δείξατε ότι, εάν $-1 < \varepsilon_D$, τότε κάθε αύξηση της τιμής του αγαθού οδηγεί σε αύξηση των ολικών εσόδων.

Λύση: Έστω $D(p)$ η συνάρτηση ζήτησης. Η συνάρτηση ολικών εσόδων δίδεται από τη σχέση $R(p) = p{\cdot}D(p)$. Για τη παράγωγο της $R(p)$ έχουμε $\dfrac{dR}{dp} = \dfrac{dD}{dp} \cdot p + D$, και άρα:

$$\frac{\frac{dR}{dp}}{D} = \frac{\frac{dD}{dp} \cdot p}{D} + 1 = \varepsilon_D + 1$$

Εάν $-1 < \varepsilon_D$, τότε $\varepsilon_D + 1 > 0$, και άρα $\dfrac{\frac{dR}{dp}}{D} > 0$ και αφού η ζήτηση είναι θετική, έπεται ότι $\dfrac{dR}{dp} > 0$, και επομένως η συνάρτηση $R(p)$ είναι αύξουσα.

15.7 Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης δίδεται από το τύπο: $D(p) = kp^{-r}$, $k, r > 0$. Δείξατε ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι σταθερή.

Λύση: Κατ᾽ αρχάς έχουμε: $\dfrac{dD}{dp} = k(-r)p^{-r-1}$, και άρα $\varepsilon_D = \dfrac{dD}{dp}{\cdot}\dfrac{p}{D} = \dfrac{k(-r)p^{-r-1} \cdot p}{kp^{-r}} = -r$, σταθερά.

15.8 Η ποσότητα πώλησης (q) και η τιμή (p) ενός προϊόντος, συνδέονται με τη σχέση: $aq + bp - k = 0$, όπου a, b, k θετικές σταθερές. Δείξατε ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι -1, όταν η συνάρτηση οριακών εσόδων είναι μηδέν.

Λύση: Για να βρούμε τη συνάρτηση εσόδων, πολλαπλασιάζουμε την ποσότητα πώλησης με την τιμή, δηλαδή $R = q \cdot p$. Λύνοντας τη σχέση που μας δίνει η άσκηση ως προς p και αντικαθιστώντας έχουμε: $R = q \cdot p = q \cdot \left(\dfrac{k}{b} - \dfrac{a}{b}q\right) = \dfrac{k}{b} \cdot q - \dfrac{a}{b}q^2$. Η συνάρτηση οριακών εσόδων δίδεται από τη σχέση: $MR = \dfrac{dR}{dq} = \dfrac{k}{b} - 2 \cdot \dfrac{a}{b}q$. Επειδή αυτή είναι μηδέν, έπεται: $MR = 0 \Rightarrow \frac{k}{b} - 2 \cdot \frac{a}{b}q = 0 \Rightarrow q = \frac{k}{2a}$. Επομένως, $p = \frac{k}{b}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2b}$. Θεωρούμε τώρα ότι η ζήτηση ταυτίζεται με την ποσότητα πώλησης και επομένως $D = q$. Ο τύπος της ελαστικότητας ζήτησης είναι: $\varepsilon = \frac{dD}{dp} \cdot \frac{p}{D}$. Αντικαθιστώντας έχουμε $\varepsilon = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\frac{k}{2b}}{\frac{k}{2a}} = -1$.

15.9 Τακτικά 18000 άνθρωποι πηγαίνουν στην εργασία τους με τρένο κάθε μέρα και πληρώνουν 4 ευρώ για εισιτήριο. Ο αριθμός των ατόμων q που είναι πρόθυμοι να ταξιδέψουν με τρένο στην τιμή p είναι:

$$q = 600(5 - \sqrt{p})$$

Η εταιρεία των τρένων θα ήθελε να αυξήσει τα έσοδά της. Θα έπρεπε η τιμή του εισιτηρίου να αυξηθεί ή να μειωθεί;

Λύση: Υπολογίζουμε την ελαστικότητα ζήτησης για $p = 4$. Έχουμε

$$\varepsilon_D = \frac{\frac{dq}{dp}}{\frac{q}{p}} = -\frac{\sqrt{p}}{2(5 - \sqrt{p})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_D(4) = -\frac{1}{3} > -1$$

Άρα, από γνωστή άσκηση, κάθε αύξηση της τιμής του αγαθού οδηγεί σε αύξηση των ολικών εσόδων. Επομένως, η εταιρεία πρέπει να αυξήσει την τιμή του εισιτηρίου της.

15.10 Μία καμπύλη ζήτησης δίδεται από τη σχέση $ap + bq = k$, όπου a, b, k θετικές σταθερές. Δείξατε ότι ισχύει η σχέση:

$$\varepsilon_R(p) = \frac{\varepsilon_R(q)}{\varepsilon_R(q) - 1}$$

Λύση: Η συνάρτηση εσόδων ικανοποιεί τη σχέση: $R = p \cdot q$. Θα υπολογίσουμε τις ποσότητες $\varepsilon_R(p)$ και $\varepsilon_R(q)$. Διαδοχικά έχουμε

$$\varepsilon_R(p) = \frac{\dfrac{dR}{dp}}{\dfrac{R}{p}} = \frac{q + p \cdot \dfrac{dq}{dp}}{q} = 1 + \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$$

$$\varepsilon_R(q) = \frac{\dfrac{dR}{dq}}{\dfrac{R}{q}} = \frac{p + q \cdot \dfrac{dp}{dq}}{p} = 1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $ap + bq = k$, θα υπολογίσουμε τις παραγώγους $\dfrac{dq}{dp}$ και $\dfrac{dp}{dq}$. Έχουμε:

$$ap + bq = k \quad \Rightarrow \quad a \cdot \frac{dp}{dq} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dq} = -\frac{b}{a}$$

$$ap + bq = k \quad \Rightarrow \quad a + b \cdot \frac{dq}{dp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dp} = -\frac{a}{b}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$[\varepsilon_R(p) - 1] \cdot [\varepsilon_R(q) - 1] = \frac{p}{q} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot \frac{q}{p} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_R(p) - 1 = \frac{1}{\varepsilon_R(q) - 1} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_R(p) = \frac{\varepsilon_R(q)}{\varepsilon_R(q) - 1}$$

15.11 Έστω $q = D(p)$ μία γραμμική συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού, που δεν είναι $Giffen$. Εάν με την πάροδο του χρόνου η τιμή αυξάνει, δείξατε ότι η ελαστικότητα ζήτησης φθίνει.

Λύση: Για να δείξουμε ότι η ελαστικότητα με την πάροδο του χρόνου φθίνει, αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{d\varepsilon_D}{dt} < 0$. Από τον κανόνα της αλυσίδος έχουμε $\dfrac{d\varepsilon_D}{dt} = \dfrac{d\varepsilon_D}{dp} \cdot \dfrac{dp}{dt}$. Αλλά

$$\varepsilon_D = \frac{\dfrac{dD}{dp}}{\dfrac{D}{p}} = \frac{D' \cdot p}{D} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\varepsilon_D}{dp} = \frac{D'' \cdot D \cdot p - p \cdot (D')^2 + D \cdot D'}{D^2} \tag{15.1}$$

Ισχύουν τα εξής:
α) Αφού η $D(p)$ είναι γραμμική, έπεται ότι $D''(p) = 0$.
β) Αφού η άσκηση αφορά αγαθά που δεν είναι $Giffen$, η ζήτηση θα μειώνεται με την αύξηση της τιμής. Αυτό σημαίνει ότι η $D(p)$ είναι φθίνουσα και άρα $D'(p) < 0$.
γ) Η συνάρτηση ζήτησης $D(p)$ και η μεταβλητή p είναι θετικές ποσότητες.
Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στη σχέση (15.1), εύκολα βρίσκουμε ότι $\frac{d\varepsilon_D}{dp} < 0$. Μας δίδεται ακόμα ότι $\frac{dp}{dt} > 0$, και άρα τελικά $\frac{d\varepsilon_D}{dt} < 0$.

15.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση

15.12 *Δίδεται η συνάρτηση* $f(x) = 15x^2 + \ln x$. *Υπολογίσατε την* $\varepsilon_f(1)$.

Απ: $\frac{31}{15}$

15.13 *Δίδεται η συνάρτηση* $f(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$. *Υπολογίσατε την* $\varepsilon_f(\frac{\pi}{6})$.

Απ: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

15.14 *Αποδείξατε την ιδιότητα (15.2).*

15.15 *Αποδείξατε την ιδιότητα (15.3).*

15.16 *Αποδείξατε την ιδιότητα (15.4).*

15.17 *Αποδείξατε την ιδιότητα (15.5).*

15.18 *Υπολογίσατε την ελαστικότητα της συνάρτησης*

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2+9}\,\sqrt[5]{(x^2-1)^3}$$

Απ: $\frac{x^2(17x^2+103)}{10(x^4+8x^2-9}$

15.19 *Υπολογίσατε την ελαστικότητα της συνάρτησης*

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{(x-1)^5}}$$

Απ: $\dfrac{x+4}{6-6x}$

15.20 *Εάν* $y(x) = ax^k, a \neq 0$, *δείξατε ότι* $\varepsilon_y = k$.

15.21 *Δείξατε ότι η* ε_C *ισούται με το οριακό κόστος διαιρούμενο με το μέσο κόστος.*

15.22 *Έστω*

$$C(x) = 0.1x^2 + 5x + 300$$

Δείξατε ότι $\varepsilon_C(50) < 1$.

15.23 *Έστω*

$$C(x) = 1000e^{0.02x}$$

Δείξατε ότι $\varepsilon_C(50) = 1$.

15.24 *Εάν* $y(x) = e^{f(x)}$, *δείξατε ότι* $\varepsilon_y = xf'(x)$.

15.25 *Εάν* $y(x) = a^{f(x)}$, *δείξατε ότι* $\varepsilon_y = \ln a \cdot xf'(x)$.

15.26 *Έστω* $R(q)$ *η συνάρτηση εσόδων και* $p = G(q)$ *η συνάρτηση ζήτησης. Δείξατε ότι* $MR = p \cdot (1 + \varepsilon_G)$.

15.27 *Έστω* $R(q)$ *η συνάρτηση εσόδων και* $q = D(p)$ *η συνάρτηση ζήτησης. Δείξατε ότι* $MR = \dfrac{dR}{dp} = q\,(1 + \varepsilon_D)$.

15.28 *Έστω* ε_D *η ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού. Δείξατε ότι, εάν* $\varepsilon_D < -1$, *τότε κάθε αύξηση της τιμής του αγαθού οδηγεί σε μείωση των ολικών εσόδων.*

15.29 *Εάν* $\varepsilon_\Pi, \varepsilon_R, \varepsilon_C$ *είναι οι ελαστικότητες κέρδους, εσόδων και κόστους αντίστοιχα, δείξατε ότι:*

$$\varepsilon_\Pi = \frac{R \cdot \varepsilon_R - C \cdot \varepsilon_C}{\Pi}$$

15.30 *Μία συνάρτηση ζήτησης δίδεται από τον τύπο* $D(p) = a - bp$, $a, b > 0$. *Εάν* ε *είναι η ελαστικότητά της, δείξατε ότι* $\varepsilon(p^*) = -1$, *όπου* p^* *είναι η τετμημένη του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος που η γραφική παράσταση της* $D(p)$ *τέμνει τους άξονες.*

15.31 *Η ζήτηση και η τιμή ενός προϊόντος συνδέονται με τη σχέση* $0.1q - 10 + 0.2p + 0.02p^2 = 0$. *Να υπολογίσετε την τιμή της ελαστικότητας ζήτησης όταν* $p = 10$.

Απ: -1

15.32 *Θεωρήσατε τη συνάρτηση ζήτησης:* $q = 60000e^{-0.5p}$. *Βρείτε για ποιες τιμές του* p *η ελαστικότητα ζήτησης είναι μικρότερη του* -1.

Απ: $p > 2$.

15.33 *Η ζήτηση και η τιμή ενός προϊόντος συνδέονται με τη σχέση* $p = \dfrac{20}{4+q}$. *Να υπολογίσετε την τιμή της ελαστικότητας ζήτησης όταν* $p = 4$.

Απ: -5

15.34 *Εάν η συνάρτηση* $p = 0.5q + 10$ *μας δίδει τη σχέση μεταξύ προσφερομένης ποσότητας* q *και τιμής* p, *βρείτε τη τιμή της ελαστικότητας προσφοράς όταν* $p = 20$.

Απ: 2

15.35 *Δείξατε ότι εάν τα οριακά έσοδα είναι αρνητικά, ίσα με μηδέν, ή θετικά, τότε η ελαστικότητα της ζήτησης είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη του* -1, *αντίστοιχα.*

15.36 *Μία εταιρεία μπορεί να πωλήσει*

$$q = \frac{900}{p+60} - 50$$

ραδιόφωνα σε τιμή $p = 30$. *Αν η τιμή μειωθεί λίγο, τα έσοδα θα αυξηθούν ή θα μειωθούν;*

Απ: Θα μειωθούν.

15.37 *Ένας κινηματογράφος έχει χωρητικότητα 3000 ατόμων. Ο αριθμός των ατόμων που παρακολουθούν ένα έργο στην τιμή p του εισιτηρίου, είναι*

$$q = \frac{18000}{p} - 1500$$

Συνήθως, η τιμή είναι 6 ευρώ το εισιτήριο. Αν η τιμή μειωθεί, τα έσοδα θα αυξηθούν ή θα μειωθούν;

Απ: Θα αυξηθούν.

15.38 *Ένας αυτοκινητόδρομος χρεώνει 65 σεντς το άτομο και έχει 10000 οδηγούς κάθε μέρα. Η συνάρτηση ζήτησης για τον αυτοκινητόδρομο είναι*

$$q = 2000\sqrt{90 - p}$$

Η τιμή κατ' άτομο θα πρέπει να αυξηθεί ή να μειωθεί για να αυξηθούν τα έσοδα του αυτοκινητοδρόμου;

Απ: Πρέπει να μειωθεί.

15.39 *Μία χώρα, η οποία είναι ο κύριος προμηθευτής ενός συγκεκριμένου προϊόντος, θέλει να βελτιώσει το εμπορικό της ισοζύγιο μειώνοντας την τιμή του προϊόντος. Η συνάρτηση ζήτησης είναι*

$$q = \frac{1000}{p^2}$$

Θα επιτύχει η χώρα να αυξήσει τα έσοδά της;

Απ: Ναι.

15.40 *Δίδεται η καμπύλη ζήτησης $p = 250 - 0.5q$. Δείξατε ότι η ζήτηση είναι ανελαστική και ότι τα συνολικά έσοδα είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του q, όταν $250 < q < 500$.*

15.41 *Δίδεται η γραμμική συνάρτηση ζήτησης $p = mx + b$, $m < 0$ και $b > 0$, p η τιμή και x η ποσότητα. Δείξατε ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι ίση με -1, όταν $p = \frac{b}{2}$.*

15.42 *Δίδεται η συνάρτηση ζήτησης $D(p) = \alpha - \beta p$, $\beta > 0$ και η συνάρτηση προσφοράς $S(p) = \gamma + \delta p$, $\delta > 0$. Δείξατε ότι εάν $\gamma\delta + \alpha\beta = 0$, τότε οι κλίσεις της ελαστικότητας ζήτησης και της ελαστικότητας προσφοράς στο σημείο ισορροπίας p^* είναι ίσες.*