ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ Χ. ΑΛΕΞΑΝΔΡΑΚΗΣ
ΑΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Α΄ ΤΟΜΟΣ

ΑΝΙΚΟΥΛΑ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα και τη σφραγίδα του εκδότη

ISBN SET: 960-516-026-9
ISBN Α΄ ΤΟΜΟΣ: 960-516-027-7

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ANIKOUNA

- Δημ. Γούναρη 44 τηλ. 2310-235.297, Fax 2310-265.126
- Εγνατία 148 τηλ. 2310-239.537 - 546 21 Θεσσαλονίκη
- Εγνατία 156 τηλ. 2310-861.917, Fax 2310-265.126, εντός Πανεπιστημίου Μακεδονίας
- e-mail: anikoula@otenet.gr

Αφιερώνεται
στους αληθινούς εραστές
της Μαθηματικής Γνώσης

Πρόλογος

Σκοπός του παρόντος συγγράμματος είναι να αναδείξει τη συμβολή των καθαρών μαθηματικών στην ανάπτυξη και λειτουργία οποιουδήποτε οικονομικού συστήματος. Σε κάθε βήμα των μαθηματικών μεθόδων που περιγράφονται, αντικατοπτρίζεται η σημασία τους στην επίλυση των προβλημάτων της οικονομικής θεωρίας. Ο προσδιορισμός και η μελέτη του συνόλου των σχέσεων αλληλεξάρτησης των διαφόρων οικονομικών μεγεθών, όπως κόστος, έσοδα, τιμές, παραγωγή, κατανάλωση, επένδυση κ.ά., αποτελεί βασική επιδίωξη κάθε οικονομικής ανάλυσης.

Για την εφαρμογή της μαθηματικής ανάλυσης στη μελέτη και επίλυση οικονομικών προβλημάτων δεν είναι πάντα αναγκαίο να γνωρίζουμε την ακριβή μορφή των μαθηματικών σχέσεων που συνδέουν τις οικονομικές μεταβλητές. Δηλαδή, η απόδειξη μιας πληθώρας οικονομικών προτάσεων βασίζεται μόνο στην πληροφορία, ότι οι τιμές ενός οικονομικού μεγέθους εξαρτώνται από τις τιμές ενός άλλου οικονομικού μεγέθους και η συναρτησιακή αυτή σχέση εκφράζεται με μια παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Η μαθηματική ανάλυση των οικονομικών σχέσεων μπορεί να πάρει τη μορφή **ποιοτικής, παραμετρικής** και **ποσοτικής ανάλυσης**.

Η **ποιοτική ανάλυση** (qualitative analysis) αναφέρεται στον προσδιορισμό της κατεύθυνσης μεταβολής μιας ή περισσότερων οικονομικών μεταβλητών σε σχέση με τη μεταβολή μιας ή περισσότερων άλλων οικονομικών μεταβλητών. Στην περίπτωση παραγωγίσιμων οικονομικών συναρτήσεων, η κατεύθυνση μεταβολής εκφράζεται πλήρως με το πρόσημο της παραγώγου ή των μερικών παραγώγων.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε, ότι τα προβλήματα ποιοτικής οικονομικής ανάλυσης, από τη φύση τους είναι προβλήματα συνδυαστικής ανάλυσης και βρίσκουν την πιο αποτελεσματική τους αντιμετώπιση στα πλαίσια της θεωρίας των προσημασμένων γραφημάτων (signed graphs).

Η **παραμετρική ανάλυση** (parametric analysis) αναφέρεται σε μια οικογένεια οικονομικών σχέσεων ή συναρτήσεων που έχουν την ίδια μορφή έτσι ώστε κάθε μέλος της οικογένειας αυτής προκύπτει, όταν δώσουμε συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους. Με την παραμετρική ανάλυση προσδιορίζονται διαστήματα μεταβολής των παραμέτρων, έτσι ώστε να ενσωματώνονται οι πραγματικές οικονομικές συνθήκες που διαμορφώνουν τις τιμές των μεταβλητών του διαστήματος. Εκφράζονται ακόμη τυχόν τυπικά ακρότατα ή σημεία καμπής των συναρτήσεων αυτών σα συναρτήσεις των τιμών των παραμέτρων.

Τέλος, η **ποσοτική ανάλυση** (quantitative analysis) μελετά τις ποσοτικοποιημένες σχέσεις που προκύπτουν, όταν οι παράμετροι πάρουν συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Έτσι με την ανάλυση αυτή προσδιορίζονται συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές των οικονομικών μεταβλητών, που είναι οι βασικές για την επίλυση προβλημάτων οικονομικής επιλογής και πιο γενικά για τη διαδικασία λήψης οικονομικών αποφάσεων.

Το είδος, η έκταση και η μορφή της μαθηματικής ανάλυσης που χρησιμοποιείται εξαρτάται κυρίως από τη φύση των οικονομικών σχέσεων και μεταβλητών που μελετώνται. Έτσι η μελέτη οικονομικών μεταβλητών που δεν συνδέονται με συναρτησιακές σχέσεις μπορεί να γίνει πιο αποτελεσματικά στα πλαίσια μιας περιοχής των μοντέρνων μαθηματικών που ονομάζεται θεωρία γραφημάτων. Όταν όμως οι οικονομικές μεταβλητές εκφράζονται με συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών, τότε η πιο κατάλληλη μαθηματική ανάλυση για τη μελέτη των οικονομικών αυτών σχέσεων είναι οι τεχνικές του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού.

Επομένως, η χρησιμοποίηση της μαθηματικής ανάλυσης στην καλύτερη κατανόηση και επίλυση οικονομικών προβλημάτων είναι θέμα αναγκαιότητας και όχι επιλογής.

Αναφορικά με τη δομή του βιβλίου αυτού, θα ήθελα να επισημάνω ότι αναφέρεται σε διαφορετικούς τύπους αναγνωστών.

Τα πρώτα κεφάλαια στοχεύουν πρωταρχικά σε αναγνώστες χωρίς μαθηματικό υπόβαθρο, το οποίο θα αποκτηθεί πιθανόν μεταγενέστερα με κατάλληλη σειρά μαθημάτων. Τέτοιου είδους αναγνώστες θα πρέπει να συνηθίσουν στην εφαρμογή των στοιχειωδών μεθόδων, πριν προχωρήσουν σε πιο δυναμικές διαδικασίες που περιγράφονται στα τελευταία κεφάλαια.

Ο πιο ενημερωμένος αναγνώστης μπορεί να χρησιμοποιήσει τα πρώτα κεφάλαια για επανάληψη και να προχωρήσει αμέσως στην επόμενη εργασία. Ο έμπειρος μαθηματικός οικονομολόγος μπορεί να θεωρήσει το βιβλίο σαν εργαλείο αναφοράς και έρευνας νέων μεθόδων επίλυσης οικονομικών προβλημάτων.

Σε κάθε κεφάλαιο επισυνάπτεται ικανός αριθμός ασκήσεων, που θα εξοικειώσουν τον αναγνώστη με τα μαθηματικά εργαλεία και τις εφαρμογές τους σε διακριτά οικονομικά προβλήματα. Η μέθοδος θεραπείας τους θα καταδείξει την προσπάθεια μιας συστηματικής ανάπτυξης της μαθηματικής οικονομικής θεωρίας, αλλά οι ουσιώδεις δομές μιας τέτοιας θεωρίας θα βρεθούν είτε στο κείμενο είτε στις ασκήσεις.

Σεπτέμβριος 2005 — Α. Αλεξανδράκης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

1.1. Το σύνολο των φυσικών αριθμών Φ

Η έννοια του συνόλου είναι θεμελιώδους σημασίας σε οποιαδήποτε περιοχή των μοντέρνων μαθηματικών και ορίζεται ως εξής:

Σύνολο είναι κάθε συλλογή διακριτών αντικειμένων που προέρχονται από τους χώρους της εμπειρίας ή της διανόησης και θεωρούνται ως μια ενότητα. Τα αντικείμενα που αποτελούν το σύνολο λέγονται **στοιχεία** x σε ένα σύνολο X και συμβολίζουμε: $x \in X$ ή $x \notin X$ η άρνησή της.

Όταν μπορούμε να δημιουργήσουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων A και B, λέμε ότι τα σύνολα είναι **ισοδύναμα** και γράφουμε $A \equiv B$.

Πληθικός αριθμός ενός συνόλου $\mathbb{S}$ είναι ο αριθμός των στοιχειών του και συμβολίζεται με $\eta(\mathbb{S})$ ή $|\mathbb{S}|$.

Τα ισοδύναμα σύνολα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό. Δύο σύνολα μεταξύ των οποίων **δεν** μπορεί να υπάρξει αμφιμονοσήμαντη (ένα - προς - ένα) αντιστοιχία έχουν διαφορετικούς πληθικούς αριθμούς.

Η ακολουθία 1, 2, 3, ..., ν, ... λέγεται **ακολουθία των φυσικών αριθμών** και είναι απέραντη (δηλαδή δεν υπάρχει τελευταίος αριθμός).

$$\Phi = \{1,2,3,\ldots,\nu,\ldots\}$$

Ένα σύνολο X είναι **πεπερασμένο**, αν είναι ισοδύναμο προς ένα αρχικό απόκομμα της ακολουθίας των φυσικών αριθμών. Δηλαδή αν $|x| = 0$ ή $|x| = n$ για κάποιο θετικό ακέραιο αριθμό n.

Η πλέον **χαρακτηριστική ιδιότητα των πεπερασμένων συνόλων** είναι η εξής: Κάθε πεπερασμένο σύνολο δεν είναι ισοδύναμο με κανένα μέρος του, δηλαδή με κανένα γνήσιο υποσύνολό του.

Κάθε σύνολο που δεν είναι πεπερασμένο λέγεται **απειροσύνολο**, δηλαδή κάθε σύνολο που **δεν** είναι ισοδύναμο με κανένα πεπερασμένο σύνολο.

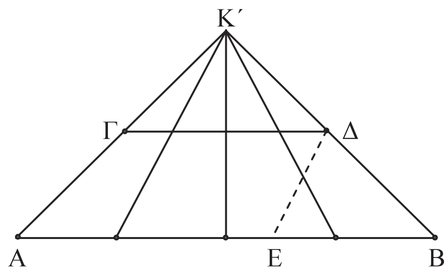
Το πλήθος των στοιχείων του λέμε ότι είναι άπειρο.

Κάθε σύνολο ισοδύναμο προς ένα μέρος του, είναι απειροσύνολο.

Παράδειγμα 1: Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι απειροσύνολο, γιατί είναι ισοδύναμο προς ένα μέρος του, π.χ. το $\mathrm{A}=\{2,4,6,...,2\nu,...\}$, αφού μεταξύ των Α και Φ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία:

$$\begin{array}{lcccccc} \Phi: & 1 & 2 & 3 & ... & \nu & ... \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \mathrm{A}: & 2 & 4 & 6 & ... & 2\nu & ... \end{array}$$

Παράδειγμα 2: Το σύνολο των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος, είναι μη-πεπερασμένο, γιατί υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και των σημείων του ΓΔ. Το σημειοσύνολο ΑΒ είναι ισοδύναμο με το σημειοσύνολο ΓΔ, το ΓΔ όμως ισοδυναμεί με ένα μέρος του ΑΒ (το ΑΕ).



Σχήμα 1

1.2. Το σύνολο $Φ_0$ των ακέραιων της Αριθμητικής

Το σύνολο αυτό περιλαμβάνει και το 0, που είναι ο μικρότερος κάθε φυσικού αριθμού, γιατί το κενό σύνολο $\varnothing$, θεωρείται υποσύνολο κάθε συνόλου.

Έτσι έχουμε:

$$Φ_0 = \{0, 1, 2, 3, ..., ν, ...\}$$

Θα αναφερθούμε τώρα στα **συστήματα αρίθμησης.**

α) **Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης:** κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια των 10 ψηφίων 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Για παράδειγμα, ο αριθμός που σχηματίζεται από τα ψηφία y_1, y_2, y_3, y_4, δηλαδή ο αριθμός

$$y_1y_2y_3y_4 = y_1 \cdot 10^3 + y_2 \cdot 10^2 + y_3 \cdot 10 + y_4$$

Για κάθε ν-ψήφιο αριθμό α του δεκαδικού συστήματος, ισχύει:

$$10^{ν-1} \leq α \leq 10^{ν} - 1$$

γιατί, ο μικρότερος ν-ψήφιος είναι εκείνος που έχει όλα τα ψηφία y_2, y_3, ..., $y_ν$ μηδενικά, αν $α = y_1 \cdot 10^{ν-1} + y_2 \cdot 10^{ν-2} + y_3 \cdot 10^{ν-3} + ... + y_{ν-1} \cdot 10 + y_ν$ και το $y_1 = 1$, δηλαδή είναι ο $10^{ν-1} \cdot 1$. Ο μεγαλύτερος ν-ψήφιος είναι αυτός που έχει όλα τα ψηφία τον ίσο με 9, δηλαδή ο:

$$9 \cdot 10^{ν-1} + 9 \cdot 10^{ν-2} +...+ 9 \cdot 10 + 9 = (10\text{-}1)\ 10^{ν-1} + (10 - 1)10^{ν-2} +...+(10\text{-}1)\cdot 10 + (10\text{-}1) = (10^{ν}\text{-}10^{ν-1}) + (10^{ν-1} - 10^{ν-2}) + ... + (10^2\text{-}10) + (10\text{-}1) = 10^{ν}\text{-}1$$

β) **Σύστημα αρίθμησης με βάση β:** Αν στην ισότητα

$$α = y_1y_2y_3 ... y_4 = y_ν = y_1+y_2\cdot 10+y_3 \cdot 10^2 + ... + y_ν \cdot 10^{ν-1} \qquad (1)$$

όπου οι ακέραιοι y_1, ..., $y_ν < 10$, αντί του 10 υπάρχει ένας οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός $β > 1$, όλα όμως τα y_1, ..., $y_ν < β$, δηλαδή ο αριθμός α γράφεται:

$$\alpha = y_1 y_2 \ldots y_{\nu <\beta>} = y_1 + y_2 \cdot \beta^2 + y_3 \cdot \beta^2 + y_4 \cdot \beta^3 + \ldots + y_\nu \cdot \beta^{\nu-1} \qquad (2)$$

τότε ο α αναφέρεται στο σύστημα αρίθμησης με βάση β.

Παράδειγμα 3. έχουμε:

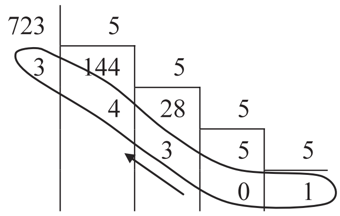
$$\alpha = 3256_{<7>} = 6+5\cdot 7+2\cdot 7^2+3\cdot 7^3 = 6+35+98+1029 = 1168_{<10>}$$

Για την παράσταση αριθμών στο 7δικό σύστημα χρειάζονται μόνο 7 ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Στο δυαδικό σύστημα χρειάζονται μόνο τα ψηφία 0, 1.

Παράδειγμα 4. Έστω β = 5 και α = 723. Για να δώσουμε στον 723 τη μορφή (2) έχουμε: $723 = 5 \cdot 144 + 3$, $144 = 5 \cdot 28 + 4$, $28 = 5 \cdot 5 + 3$, δηλαδή διαιρούμε διαδοχικά με το 5 τα πηλίκα που βρίσκουμε κάθε φορά.

Έτσι, $723 = 5 \cdot (5\cdot 28+4) + 3 = 28 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 3 = (5 \cdot 5 + 3) \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 3 = 5^4 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 3 = 10343_{<5>}$.

Διαφορετικά έχουμε:



1.3. Το σύνολο των σύμμετρων αριθμών της Αριθμητικής Σ

Κάθε **σύμμετρος αριθμός** μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$(1) \quad \frac{\mu}{\nu}, \text{ όπου } \mu, \nu \text{ ακέραιοι και } \nu \neq 0$$

Αν ο σύμμετρος είναι φυσικός, γράφεται:

$$\alpha = \frac{2\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{3} = \frac{4\alpha}{4} = \ldots = \frac{\nu\alpha}{\nu} \text{ και ο}$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{4} = \ldots = \frac{0}{\nu}$$

Δηλαδή το σύνολο των ακεραίων της αριθμητικής και το σύνολο των αριθμητικών κλασμάτων, όταν ενωθούν σε ένα σύνολο, αποτελούν το σύνολο των συμμέτρων αριθμών της Αριθμητικής. Αλλιώς οι σύμμετροι αριθμοί λέγονται και **ρητοί αριθμοί.** Αν δοθούν δυο σύμμετροι αριθμοί σ και σ΄, όπου $\sigma' \neq 0$, καλείται **λόγος** του σ προς τον σ΄, ο αριθμός λ, ο οποίος πολλαπλασιαζόμενος με τον σ΄, δίνει γινόμενο ίσο με τον σ. Δηλαδή:

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \lambda \Leftrightarrow \sigma = \lambda\sigma'.$$

Παράδειγμα 5. Ακέραιο μέρος αριθμητικού κλάσματος. Έστω ένα αριθμητικό κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$. Αν $\alpha > \beta$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ γιατί:

$$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha \cdot \frac{1}{\beta} > \beta \cdot \frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 1.$$

Αν εκτελέσουμε την αλγοριθμική διαίρεση του α δια β και είναι π το κατά προσέγγιση μονάδας πηλίκο και υ το υπόλοιπο, θα έχουμε:

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon, \quad \upsilon < \beta$$

και $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta\pi + \upsilon}{\beta} = \frac{\beta\pi}{\beta} + \frac{\upsilon}{\beta} = \pi + \frac{\upsilon}{\beta},$$ δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta} = \pi + \frac{\upsilon}{\beta} \quad (\upsilon < \beta).$$

Το π είναι το **ακέραιο μέρος** του κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$. Ο ακέραιος π είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος, από αυτούς που δεν ξεπερνούν το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, γιατί $\pi \leq \frac{\alpha}{\beta}$, ενώ $\pi + 1 > \frac{\alpha}{\beta}$.

Αν $\alpha < \beta$, τότε το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι μικρότερο του 1, και το ακέραιο μέρος του είναι ο μηδέν.

π.χ. το ακέραιο μέρος του $\frac{27}{11}$ είναι ο 2, γιατί $\frac{27}{11} = 2 + \frac{5}{11}$.

1.4. Το σύνολο των ασύμμετρων αριθμών της αριθμητικής Α

Κάθε **ασύμμετρος αριθμός** είναι ένας δεκαδικός αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία, μη περιοδικά, π.χ. $\sqrt{2}$ = 1,41421...

Αν α ασύμμετρος αριθμός και σ, σ΄ σύμμετροι αριθμοί και ισχύει η σχέση α · σ = σ΄, τότε θα είναι σ = 0 και σ΄= 0.

Παράδειγμα 6. Αν ο αριθμός x είναι ασύμμετρος και ο λ είναι σύμμετρος και ο $\frac{3x+5}{\lambda x+10}$ είναι σύμμετρος, να βρεθεί ο λ.

Λύση. Αν παραστήσουμε με σ τον σύμμετρο (3x+5) / (λx + 10) θα έχουμε:

$$\frac{3x+5}{\lambda x+10}=\sigma \Rightarrow 3x+5=\sigma(\lambda x+10)\Rightarrow 3x+5=\sigma\lambda x+10\sigma \Rightarrow$$

$\Rightarrow x(3-\sigma\lambda)=10\sigma-5$. Άρα: 3-6λ = 0 και 10σ - 5 = 0.

Οπότε: 10σ-5 = 0 $\Rightarrow$ σ = $\frac{1}{2}$ και 3 - 6λ = 0 $\Rightarrow$ 3 - $\frac{\lambda}{2}$ = 0 $\Rightarrow$ λ = 6.

Παράδειγμα 7. Να δειχθεί με την εις άτοπον απαγωγή ότι η $\sqrt[3]{2}$ είναι αριθμός ασύμμετρος.

Λύση: Αν η $\sqrt[3]{2}$ ήταν σύμμετρος αριθμός, τότε:

$\sqrt[3]{2}=\frac{\mu}{\nu}$ με (μ,ν) = 1, δηλαδή το κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ είναι ανάγωγο.

Τότε: $2=\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^3=\frac{\mu^3}{\nu^3}\Rightarrow \mu^3=2\nu^3$.

Έχουμε: $2 / 2\nu^3 \Rightarrow 2 / \mu^3 \Rightarrow$ 2/μμμ (ο 2 πρώτος αριθμός) $\Rightarrow 2 / \mu \Rightarrow \mu = 2\rho$, όπου ρ φυσικός αριθμός.

Οπότε η ισότητα: $\mu^3 = 2\nu^3$ γίνεται: $(2\rho)^3 = 2\nu^3 \Rightarrow 4\rho^3 = \nu^3$ αλλά $2/4\rho^3 \Rightarrow 2/\nu^3 \Rightarrow 2/\nu$.

Δηλαδή, οι αριθμοί μ και ν έχουν διαιρέτη το 2, άτοπο, γιατί το κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ είναι ανάγωγο. Άρα, η ισότητα $\sqrt[3]{2}=\frac{\mu}{\nu}$ είναι αδύνατη, και ο $\sqrt[3]{2}$ είναι ασύμμετρος αριθμός.

1.5. Τα σύνολα των ακέραιων της Άλγεβρας $\mathbb{Z}$, των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ και των άρρητων αριθμών $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων της άλγεβρας, περιλαμβάνει εκτός από τους ακέραιους της Αριθμητικής και τους **σχετικούς** ακέραιους αριθμούς (δηλαδή τους προσημασμένους με + ή -) θετικούς και αρνητικούς.

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-\nu,\ldots,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots,\nu,\ldots\}$$

ένας ακέραιος ρ της Άλγεβρας $\neq 0$ και $\neq \pm 1$, λέγεται **πρώτος** όταν έχει μοναδικούς διαιρέτες τους ± 1, $\pm\rho$. Δηλαδή, οι πρώτοι ακέραιοι της Άλγεβρας είναι οι ±2, ±3, ±5, ±7, ±11, ...

Παράδειγμα 8. Αριθμητικές ισοδυναμίες. Δύο ακέραιοι α και β είναι **ισοδύναμοι (ή ισότιμοι) κατά μέτρον (modulo) μ,** όπου $\mu\in\mathbb{Z}$, όταν η διαφορά α-β είναι πολλαπλάσιο του μ, και γράφουμε α ≡ β (modμ). Έτσι έχουμε: 7 ≡ -1 (mod 8), 7 ≡ 1 (mod 2), - 35 ≡ (mod11), κάθε περιττός ≡ 1 (mod2), κάθε άρτιος ≡ 0 (mod2), γ ≡ γ (modμ), όπου $\gamma\in\mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 9: (α) Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο των διαφόρων δυνάμεων του 2 και των διαφόρων δυνάμεων του 7, (β) να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 3548^9 x 2537^{31}.

Λύση: (α) Το τελευταίο ψηφίο x, ενός ακέραιου α είναι το υπόλοιπο της διαίρεσής του δια του 10 και έχουμε: α = x + πολλαπλάσιο του 10 $\Rightarrow\ \alpha\equiv \mathrm{x}\ (\mathrm{mod}10)$.

Έχουμε ως προς modulo 10:

$$2^1\equiv 2,\ 2^2\equiv 4,\ 2^3\equiv 8,\ 2^4\equiv 6,\ 2^5\equiv 2$$

Από το 2^5 και μετά, τα υπόλοιπα επαναλαμβάνονται με την ίδια σειρά, όπως αρχίζουν από το $2^1\equiv 2$.

Άρα, γενικά, θα έχουμε, πάντοτε ως προς modulo 10:

$$2^{4\nu}\equiv 6,\ 2^{4\nu+1}\equiv 2,\ 2^{4\nu+2}\equiv 4,\ 2^{4\nu+3}\equiv 8\ \ (\nu\in\Phi)$$

Δυνάμεις του 7: Έχουμε ως προς modulo 10:

$$7^1\equiv 7,\ 7^2\equiv 9,\ 7^3\equiv 3,\ 7^4\equiv 1$$

και στη συνέχεια τα υπόλοιπα επαναλαμβάνονται με την ίδια τάξη. Γενικά είναι:

$$7^{4\nu} \equiv 1,\ 7^{4\nu+1} \equiv 7,\ 7^{4\nu+2} \equiv 9,\ 7^{4\nu+3} \equiv 3 \pmod{10} \quad (\nu \in \Phi)$$

(β) Αρκεί να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο κάθε παράγοντα.
Έχουμε: $3458 \equiv 8 \pmod{10}$, $3458^9 \equiv 8^9 \pmod{10} \equiv 2^{27} \pmod{10}$
επειδή: $2^{24} \equiv 6$ και $2^3 \equiv 8$, έχουμε:
$2^{27} \equiv 48 \pmod{10} \equiv 8 \pmod{10}$. Άρα: $3458^9 \equiv 8 \pmod{10}$.
Αφού ο πρώτος παράγοντας λήγει σε 8 και ο δεύτερος σε 3, το γινόμενο λήγει στο 4.

Κάθε **ρητός αριθμός** μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι της Άλγεβρας και $\nu \neq 0$, και συμβολίζουμε με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\mu}{\nu} / \mu, \nu \in \mathbb{Z},\ \nu \neq 0 \right\}$$

Παράδειγμα 10: Αν οι αριθμοί α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους, να δειχτεί ότι τα κλάσματα $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ και $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ είναι ανάγωγα.

Λύση: i) Αν οι όροι του κλάσματος $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ έχουν μ.κ.δ. (μέγιστο κοινό διαιρέτη) $\Delta \neq 1$, τότε θα έχουν και έναν κοινό διαιρέτη πρώτο $\delta \neq 1$.

Τότε: $\delta/\alpha\beta \Rightarrow \delta/\alpha$. Αφού $\delta/\alpha + \beta$ και $\delta/\alpha \Rightarrow \delta/\beta$, και άρα οι αριθμοί α και β θα έχουν κοινό διαιρέτη $\delta \neq 1$, άτοπο, γιατί υποθέσαμε $(\alpha,\beta) = 1$ (πρώτοι προς αλλήλους). Άρα το κλάσμα $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ είναι ανάγωγο.

ii) Αν οι όροι του κλάσματος $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ έχουν μ.κ.δ. $\Delta \neq 1$, τότε θα έχουν ένα κοινό διαιρέτη δ πρώτο, έστω $\delta \neq 1$. Θα έχουμε τότε:

$\alpha+\beta =$ πολλαπλάσιο του δ (1)

και

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 =$ πολλαπλάσιο του δ (2)

Από την (1) έχουμε $(\alpha+\beta)^2$ = πολλαπλάσιο του δ ή $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ = πολλαπλάσιο δ (3).

Από (3) - (2) παίρνουμε: αβ = πολ. δ (4)

Δηλαδή, ο δ είναι κοινός διαιρέτης των α+β και αβ, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i). Άρα το κλάσμα $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ είναι ανάγωγο.

Το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ είναι ουσιαστικά το σύνολο όλων των σχετικών ασύμμετρων αριθμών.

Έτσι, οι αριθμοί $-\sqrt{2}$, $+\sqrt{3}$, $+\sqrt{5}$, $-3\sqrt[3]{7}$ είναι ασύμμετροι ή άρρητοι, γιατί και οι απόλυτες τιμές τους είναι ασύμμετροι αριθμοί της Αριθμητικής.

Εννοείται ότι το σύνολο των ασύμμετρων αριθμών της Άλγεβρας ή των άρρητων αριθμών είναι το συμπληρωματικό του συνόλου των συμμέτρων της Άλγεβρας ή των ρητών αριθμών, ως προς το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα 11: Να δειχτεί ότι ο λόγος της διαγωνίου τετραγώνου προς την πλευρά του είναι αριθμός άρρητος.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι, ο λόγος της διαγωνίου τετραγώνου προς την πλευρά του είναι $\sqrt{2}$. Αρκεί να δείξουμε ότι ο $\lambda = \sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Έχουμε: $\lambda = \sqrt{2} \Rightarrow \lambda^2 = 2$ (1). Έστω ο **λ ακέραιος αριθμός,** τότε από την (1) έχουμε: $2 / \lambda \Rightarrow \lambda = 2\kappa,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

Άρα, η (1) γίνεται: $4\kappa^2 = 2 \Leftrightarrow 2\kappa^2 = 1 \Rightarrow 2/1$, άτοπο.

Άρα, ο λ **δεν** είναι ακέραιος.

Έστω **ο λ κλάσμα,** δηλαδή αν $\lambda = \dfrac{\mu}{\nu}$, όπου $\dfrac{\mu}{\nu}$ ανάγωγο κλάσμα, τότε λόγω της (1) θα έχουμε: $\dfrac{\mu^2}{\nu^2} = 2 \Leftrightarrow \mu^2 = 2\nu^2$ (2).

Αλλά: $2 / 2\nu^2 \Rightarrow 2 / \mu^2 \Rightarrow 2 / \mu \Rightarrow \mu = 2\kappa$, οπότε η (2) γίνεται: $4\kappa^2 = 2\nu^2 \Leftrightarrow 2\kappa^2 = \nu^2$ (3). Αλλά πάλι: $2 / 2\kappa^2 \Rightarrow 2/\nu^2 \Rightarrow 2/\nu$.

Άρα, οι μ και ν έχουν κοινό διαιρέτη το 2, άτοπο, γιατί το κλάσμα $\dfrac{\mu}{\nu}$ είναι ανάγωγο. Έτσι δείξαμε ότι η $\sqrt{2}$ δεν είναι ούτε ακέραιος, ούτε κλάσμα, και άρα είναι άρρητος.

1.6. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$

Το **σύνολο των πραγματικών αριθμών** $\mathbb{R}$ είναι η ένωση του συνόλου των ρητών $\mathbb{Q}$ και του συνόλου των αρρήτων αριθμών $\mathbb{Q}'$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

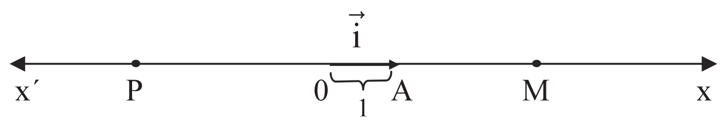
Το σύνολο των πραγματικών αριθμών έχει τις **ακόλουθες ιδιότητες:**

(1) Οι αριθμοί μπορούν να διαταχθούν σε μια ορισμένη **τάξη**, την τάξη μεγέθους, του μεγαλύτερου και μικρότερου αριθμού.

(2) Η τάξη των αριθμών μπορεί να επεκταθεί άπειρα και προς τις δυο κατευθύνσεις, δηλαδή οι αριθμοί σχηματίζουν ένα **διπλά άπειρο σύστημα.**

(3) Η τάξη των αριθμών είναι άπειρης πυκνότητας και χωρίς "κενά", δηλαδή οι αριθμοί σχηματίζουν ένα **τέλεια συνεχές σύστημα.**

Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $\mathbb{R}$, και του συνόλου των σημείων ενός άξονα. Έχουμε δηλαδή:



Σχήμα 2

Παράδειγμα 12. Να δείξετε ότι ο αριθμός 0,13131313... γραμμένος στο σύστημα με βάση x, ισούται με το κλάσμα $\dfrac{\overline{13}}{x^2-1}$, όπου ο $\overline{13}$ είναι αριθμός του x-ιαδικού συστήματος.

Λύση. Ο αριθμός 0,131313... γραμμένος στο σύστημα με βάση x γράφεται: $A = \dfrac{\overline{13}}{x^2} + \dfrac{\overline{13}}{x^4} + \ldots + \dfrac{\overline{13}}{x^{2\nu}} + \ldots$ (1) όπου $\overline{13}$ είναι αριθμός του x-αδικού συστήματος. Πολλαπλασιάζοντας την (1) με x^2, έχουμε:

$$Ax^2 = \overline{13} + \frac{\overline{13}}{x^2} + \frac{\overline{13}}{x^4} + \ldots + \frac{\overline{13}}{x^{2\nu}} + \ldots \quad (2)$$

Από (2) - (1) έχουμε: $A(x^2-1) = \overline{13}$ (3), ή διαιρώντας τα μέλη της (3) με το x^2-1 έχουμε: $A = \frac{\overline{13}}{x^2-1}$.

1.7. Συνεχείς και ασυνεχείς μεταβλητές

Σε ένα σύνολο $X = \{x : p(x)\}$, x ονομάζεται **μεταβλητή** (variable), X είναι το **πεδίο ορισμού** (domain) της x και τα στοιχεία του X, ονομάζονται **τιμές** (values) της x. Π.χ., για το σύνολο B = $\{x : x^2 = x\} = \{0,1\}$, x είναι η μεταβλητή, B το πεδίο ορισμού της x, 0, 1 οι τιμές της x και x^2 = x η p(x) που ορίζει το B.

Γενικά, μια **μεταβλητή** ή **μεταβλητός αριθμός** είναι ένας οποιοσδήποτε μη-προκαθορισμένος αριθμός, από ένα δοσμένο σύνολο πραγματικών αριθμών, που συμβολίζεται με x, y ή t.

Αν η μεταβλητή x μπορεί να πάρει σαν τιμές όλους τους πραγματικούς αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ δύο δοθέντων αριθμών a και b, τότε το πεδίο τιμών της λέγεται το **διάστημα (a,b).**

Δηλαδή, πιο συγκεκριμένα το ανοικτό διάστημα (a,b)=$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Το κλειστό διάστημα [a,b] = $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

Το ανοικτό από αριστερά διάστημα (a,b] = $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

Το ανοικτό από δεξιά διάστημα [a,b) = $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

Μια **περιοχή** ή **γειτονιά** ή **γειτνίαση (neighbourhood)** της τιμής x = α, ορίζεται σαν ένα διάστημα τιμών του x που έχει την τιμή α σαν μέσον. Δηλαδή, αν κ είναι ένας δοσμένος θετικός αριθμός, μια περιοχή του x = α, ορίζεται από το διάστημα (a-k) < x < (a+k). Το συνολικό μήκος του διαστήματος είναι 2k και x - a < k. Το k θεωρείται συνήθως πολύ μικρό.

Μια μεταβλητή είναι **συνεχής**, αν το πεδίο τιμών της είναι είτε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, είτε οποιοδήποτε διάστημα του συνόλου $\mathbb{R}$.

Οι τιμές μιας συνεχούς μεταβλητής μπορούν να διαταχθούν έτσι ώστε να είναι απροσδιόριστα πυκνές και χωρίς κενά. Πολύ συχνά θεωρούμε μια συνεχή μεταβλητή, παίρνοντας τιμές διαδοχικά κατά αύξουσα τάξη μεγέθους, και το περιγράφουμε αυτό, λέγοντας ότι "η μεταβλητή αυξάνει συνεχώς σε τιμή, όπως ακριβώς σε ένα διάστημα".

Μια **ασυνεχής μεταβλητή** (discontinuous variable) έχει πεδίο τιμών το οποίο δεν είναι ούτε το $\mathbb{R}$ ούτε οποιοδήποτε διάστημα του $\mathbb{R}$.

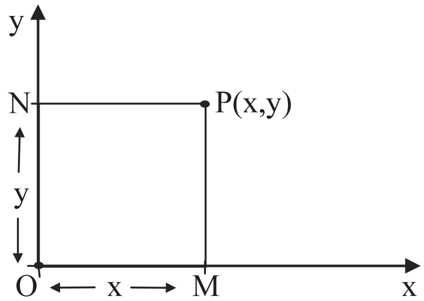
Οι τιμές μιας τέτοιας μεταβλητής δεν μπορούν να διαταχθούν σε τάξη μεγέθους χωρίς κενά. Οποιοδήποτε σύνολο αριθμών ειδικού τύπου, π.χ. το σύνολο των ακέραιων ή των πολλαπλάσιων του $\frac{1}{2}$, δίνει ένα πεδίο τιμών της μεταβλητής, το οποίο είναι ασυνεχές.

1.8. Μεταβλητά σημεία και οι συντεταγμένες τους

Ένα **μεταβλητό σημείο** στο χώρο (**variable point**), είναι ένα σημείο που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση μέσα από ένα δοσμένο πεδίο δυνατών θέσεων.

Για να παραστήσουμε ένα μεταβλητό σημείο P στο επίπεδο (δισδιάστατο χώρο) χαράσσουμε δύο κάθετες ευθείες Ox και Oy με θετικές διευθύνσεις. Το σημείο O, όπου οι δυο ευθείες τέμνονται λέγεται **αρχή** των συντεταγμενων και οι Ox και Oy **άξονες συντεταγμένων** ή **άξονες αναφοράς.**

Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο P του επιπέδου Oxy και φέρουμε τις κάθετες PM και PN στους άξονες. Έστω OM είναι x μονάδες μέτρησης και ON y μονάδες μέτρησης. Τότε γράφουμε ότι το σημείο P καθορίζεται από το ζεύγος (x,y) και λέμε ότι το P έχει **συντεταγμένες** (x,y), όπου η x λέγεται **τετμημένη** και η y **τεταγμένη.**



Σχήμα 3