

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

| | |
|--|----------|
| ΠΡΩΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩ- | |
| ΣΕΩΝ | 1 |
| 1.1. ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ | 2 |
| 1.1.1. Γραφική μέθοδος εντοπισμού ριζών | 3 |
| 1.1.2. Θεωρητική μέθοδος εντοπισμού ριζών | 5 |
| 1.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΠΑ- | |
| ΡΕΜΒΟΛΗΣ | 7 |
| 1.2.1. Μέθοδος της διχοτόμησης..... | 7 |
| Θεωρητική απόδειξη της σύγκλισης της ακο- | |
| λουθίας | 9 |
| Πλήθος επαναλήψεων για συγκεκριμένη ακρί- | |
| βεια..... | 9 |
| 1.2.2. Μέθοδος της εσφαλμένης θέσης (Regula-Falsi).. | 12 |
| 1.3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ | |
| ΜΕΘΟΔΟΥΣ | 17 |
| 1.3.1. Μέθοδος του σταθερού σημείου | 18 |
| 1.3.2. Η μέθοδος Newton - Raphson..... | 25 |
| 1.3.3. Μέθοδος της τέμνουσας | 30 |
| 1.4. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΡΙΖΑΣ | |
| ΜΙΑΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ..... | 35 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ | 36 |

| | |
|--|-----------|
| ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ | 41 |
| 2.1. ΑΜΕΣΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ..... | 43 |
| 2.1.1. Μέθοδος απαλοιφής του Gauss..... | 43 |
| 2.1.2. Μέθοδος απαλοιφής Gauss - Jordan | 43 |
| 2.1.3. Μέθοδος με οδήγηση | 44 |
| 2.1.4. Τροποποιημένες μέθοδοι των Gauss και Gauss - Jordan..... | 45 |
| 2.1.5. Μέθοδοι τριγωνικής παραγοντοποίησης - Η μέθοδος Crout | 47 |
| 2.1.6. Βελτίωση μιας άμεσης προσεγγιστικής λύσης..... | 54 |
| 2.2. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ..... | 56 |
| 2.2.1. Μέθοδος Jacobi | 57 |
| 2.2.2. Μέθοδος Seidel ή Gauss - Seidel | 60 |
| 2.2.3. Ορισμός σύγκλισης και κριτήρια σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων..... | 63 |
| 2.2.4. Μέθοδοι που επιταχύνουν την ταχύτητα σύγκλισης (extrapolation) των επαναληπτικών μεθόδων..... | 66 |
| Μέθοδος της ταυτόχρονης υπερχαλάρωσης..... | 66 |
| Μέθοδος της διαδοχικής υπερχαλάρωσης..... | 67 |
| 2.3. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ | 71 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ | 74 |
| | |
| ΤΡΙΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ | 79 |
| 3.1 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ | 80 |

| | |
|---|----|
| 3.2. ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ..... | 81 |
| 3.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ | 83 |
| 3.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ..... | 86 |
| 3.5 ΣΥΓΚΛΙΣΗ..... | 87 |
| 3.6 ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON-RAPHSON..... | 91 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ..... | 93 |

ΤΕΤΑΡΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ..... 95

| | |
|---|-----|
| 4.1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ | 96 |
| 4.1.1. Προς τα εμπρός διαφορές ή απλά διαφορές | 96 |
| 4.1.2. Προς τα πίσω διαφορές ή ανάδρομες διαφορές.... | 97 |
| 4.1.3. Βασική ιδιότητα των πινάκων διαφορών..... | 101 |
| 4.1.4. Ανίχνευση σφάλματος σε πίνακες διαφορών | 102 |
| 4.1.5. Συμπλήρωση πίνακα τιμών..... | 105 |
| 4.2. ΔΙΑΙΡΕΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ..... | 106 |
| 4.2.1. Γενίκευση των διαιρεμένων διαφορών | 108 |
| 4.2.2. Ανάδρομες (προς τα πίσω) διαιρεμένες διαφορές..... | 109 |
| 4.2.3. Σχέσεις πεπερασμένων και διαιρεμένων διαφορών..... | 110 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ..... | 111 |

ΠΕΜΠΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΣΥΜΠΤΩΣΗΣ - ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ..... 115

| | |
|--|-----|
| 5.1. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ | 118 |
| 5.2. ΣΦΑΛΜΑ ΤΗΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ | 120 |
| 5.3. ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΤΟΥ LAGRANGE.... | 123 |

| | |
|--|-----|
| 5.4. ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΤΟΥ NEWTON..... | 128 |
| 5.4.1. Μορφές του πολυωνύμου παρεμβολής του Newton για πεπερασμένες διαφορές..... | 131 |
| 5.5. ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΤΟΥ HERMITE | 135 |
| 5.6. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ ΓΡΑΜΜΕΣ SPLINE..... | 138 |
| 5.6.1. Κυβική spline | 140 |
| 5.6.2. Προσδιορισμός της κυβικής spline | 141 |
| 5.6.3. Λύση του συστήματος των (5/30), (5/31), (5/32), (5/33) και (5/34) | 143 |
| 5.7. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ | 145 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ..... | 147 |

| | |
|--|------------|
| ΕΚΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑ- ΓΩΝΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΠΟ- ΛΥΩΝΥΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑ- ΓΩΝΩΝ | 151 |
| 6.1. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕ- ΤΡΑΓΩΝΩΝ | 155 |
| 6.1.1. Περίπτωση διακεκριμένων δεδομένων | 155 |
| 6.1.2. Περίπτωση συνεχών δεδομένων..... | 158 |
| 6.1.3. Συναρτήσεις αναγόμενες σε γραμμικές..... | 160 |
| 6.1.4. Αδυναμίες της μεθόδου προσέγγισης με πο- λυώνυμο ελαχίστων τετραγώνων..... | 165 |
| 6.2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΒΑΡΟΥΣ - ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗ- ΣΕΙΣ | 168 |
| 6.2.1. Ορθογώνια πολυώνυμα | 168 |
| 6.2.2. Κατασκευή ορθογωνίων πολυώνυμων..... | 170 |
| 6.3. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕ- ΤΡΑΓΩΝΩΝ ΜΕ ΣΥΝΟΛΟ ΓΝΩΣΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ | 172 |
| 6.3.1. Περίπτωση διακεκριμένων δεδομένων | 172 |

| | |
|---|------------|
| 6.3.2. Περίπτωση συνεχών δεδομένων | 174 |
| 6.4. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΟΥΜΕ | 176 |
| 6.4.1. Περίπτωση διακεκριμένων δεδομένων | 176 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ..... | 181 |
| ΕΒΔΟΜΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ | 187 |
| 7.1. ΣΦΑΛΜΑ ΑΠΟΚΟΠΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ | 189 |
| 7.2. ΚΛΕΙΣΤΟΙ ΤΥΠΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΤΩΝ NEWTON-COTES | 190 |
| 7.2.1. Τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης Newton - Cotes | 192 |
| Κανόνας (ή τύπος) του τραπεζίου | 192 |
| Κανόνας (ή τύπος) του Simpson | 192 |
| Κανόνας του 3/8 | 193 |
| 7.2.2. Σύνθετοι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης Newton-Cotes | 195 |
| Σύνθετος τύπος (ή κανόνας) των τραπεζίων | 195 |
| Σύνθετος τύπος (ή κανόνας) του Simpson | 196 |
| Σύνθετος τύπος του 3/8 | 198 |
| 7.3. ΑΝΟΙΚΤΟΙ ΚΑΙ ΗΜΙΑΝΟΙΚΤΟΙ ΤΥΠΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΤΩΝ NEWTON-COTES | 200 |
| 7.4. EXTRAPOLATION - ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΟΥ ROMBERG | 201 |
| 7.4.1. Υπολογισμοί των προσεγγίσεων με την μέθοδο του Romberg..... | 203 |
| 7.5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ GAUSS | 209 |
| 7.5.1. Ειδικές περιπτώσεις ολοκλήρωσης κατά Gauss ... | 211 |
| Τύπος Gauss - Legendre..... | 211 |

| | |
|--|------------|
| Τύπος Gauss - Laguerre | 212 |
| Τύπος Gauss - Hermite | 212 |
| Τύπος Gauss - Chebyshev | 213 |
| 7.6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΟΥ CHEBYSEV | 217 |
| 7.7. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ..... | 220 |
| 7.7.1. Μέθοδοι για γενικευμένα ολοκληρώματα..... | 220 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ | 224 |
| | |
| ΟΓΔΟΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟ- | |
| ΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ | 229 |
| 8.1. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ | 230 |
| 8.1.1. Διαφορικές εξισώσεις γενικά | 230 |
| 8.1.2. Πρόβλημα αρχικών τιμών | 230 |
| 8.1.3. Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης..... | 232 |
| 8.1.4. Τα σφάλματα των αριθμητικών μεθόδων | 233 |
| 8.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ EULER | 234 |
| 8.2.1. Τα σφάλματα της μεθόδου του Euler | 236 |
| 8.2.2. Γεωμετρική περιγραφή της μεθόδου του Euler.... | 237 |
| 8.3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ TAYLOR..... | 241 |
| 8.4. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΩΝ RUNGE - KUTTA | 243 |
| 8.4.1. Μέθοδος των Runge - Kutta δεύτερης τάξης | 244 |
| 8.4.2. Μέθοδος των Runge - Kutta τρίτης τάξης..... | 245 |
| 8.4.3. Μέθοδος των Runge - Kutta τέταρτης τάξης | 247 |
| 8.4.4. Έλεγχος του τοπικού σφάλματος αποκοπής στις μεθόδους των Runge - Kutta | 250 |
| 8.5. ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ..... | 251 |
| 8.5.1. Μέθοδοι πρόβλεψης - διόρθωσης | 254 |
| Η μέθοδος Milne | 255 |
| Η μέθοδος Adams - Moulton | 256 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ | 260 |

| | |
|---|------------|
| ΕΝΑΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ | 265 |
| 9.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ EULER | 267 |
| 9.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ RUNGE-KUTTA ΤΕΤΑΡΤΗΣ ΤΑΞΗΣ..... | 270 |
| 9.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ..... | 273 |
| | |
| ΔΕΚΑΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ | 279 |
| 10.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΣΚΟΠΕΥΣΗΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ..... | 282 |
| 10.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ | 286 |
| 10.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ..... | 292 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ..... | 293 |
| | |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ | 297 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΤΟΥ LEGENDRE | 299 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΤΟΥ LAGUERRE..... | 305 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΤΟΥ HERMITE..... | 309 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΤΟΥ CHEBYSHEV | 313 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ V: ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ..... | 317 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ VI: ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ NORMS ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ | 319 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: VII: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ | 325 |
| | |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ..... | 329 |