

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε ότι ακολουθεί, συμβολίζουμε με \mathbb{N} το σύνολο των φυσικών αριθμών $\{1, 2, 3, \dots\}$ και με \mathbb{Z} , \mathbb{Q} και \mathbb{R} τα σύνολα των ακεραίων, των ρητών και των πραγματικών αριθμών, αντίστοιχα.

Ας είναι τώρα m ένας φυσικός αριθμός με $m \geq 2$. Το Καρτεσιανό γινόμενο

$$\overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^{m - \text{παράγοντες}} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) / x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, m \},$$

το οποίο, όπως γνωρίζουμε, αποτελείται από όλες τις διατεταγμένες $m -$ άδες πραγματικών αριθμών (x_1, x_2, \dots, x_m) , συμβολίζουμε με \mathbb{R}^m και έτσι έχουμε

$$\mathbb{R}^m = \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) / x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, m \}. \quad (1)$$

Μετατρέπουμε τώρα το σύνολο \mathbb{R}^m σε $\mathbb{R} -$ διανυσματικό χώρο, ορίζοντας το άθροισμα των στοιχείων του (x_1, x_2, \dots, x_m) και (y_1, y_2, \dots, y_m) από την ισότητα

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) + (y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m) \quad (2)$$

και το γινόμενο $\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_m)$, του πραγματικού αριθμού λ και του στοιχείου $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ από την ισότητα

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_m) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m). \quad (3)$$

Στη συνέχεια ονομάζουμε **σημεία** τα στοιχεία διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^m και δεχόμαστε σαν απόσταση $\|M_1 M_2\|$, των δυο σημείων του $M_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ και $M_2(y_1, y_2, \dots, y_m)$, την Ευκλείδεια απόστασή τους

$$\|M_1 M_2\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}. \quad (4)$$

Τη δυάδα $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$, δηλ. το διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^m εφοδιασμένο με την απόσταση $\|\cdot\|$ δυο σημείων του, ονομάζουμε **Ευκλείδειο χώρο διαστάσεως m** ή **$m -$ διάστατο Ευκλείδειο χώρο**.

Σε ότι ακολουθεί, συμβολίζουμε τον $m -$ διάστατο Ευκλείδειο χώρο (απλά) με \mathbb{R}^m .

Παρατηρούμε ότι αν στον τύπο (4) θέσουμε :

(α) $m = 1$, τότε παίρνουμε

$$\|M_1 M_2\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = |x_1 - y_1|,$$

παίρνουμε δηλ. τον τύπο που μας δίνει την απόσταση των σημείων $M_1(x_1)$ και $M_2(y_1)$ του πραγματικού άξονα $x'Ox$ (της πραγματικής ευθείας).

(β) Αν στον τύπο (4) θέσουμε $m = 2$, τότε παίρνουμε

$$\|M_1M_2\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

παίρνουμε δηλ. τον τύπο που μας δίνει την απόσταση των σημείων $M_1(x_1, x_2)$ και $M_2(y_1, y_2)$ του Καρτεσιανού επιπέδου Oxy , του επιπέδου δηλ. στο οποίο έχουμε εκλέξει ένα ορθογώνιο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων.

(γ) Αν στον τύπο (4) θέσουμε $m = 3$, τότε παίρνουμε τον τύπο

$$\|M_1M_2\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

παίρνουμε δηλ. τον τύπο που μας δίνει την απόσταση των σημείων $M_1(x_1, x_2, x_3)$ και $M_2(y_1, y_2, y_3)$ του χώρου $Oxyz$, του χώρου δηλ. στον οποίο έχουμε εκλέξει ένα ορθογώνιο και δεξιόστροφο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων.

Έτσι, ο Ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^m ταυτίζεται:

(α) Για $m = 1$ με τον πραγματικό άξονα $x'Ox$

(β) Για $m = 2$ με το επίπεδο Oxy , το επίπεδο δηλ. στο οποίο έχουμε εκλέξει ένα ορθογώνιο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων.

(γ) Για $m = 3$ με το χώρο $Oxyz$, δηλ. με το συνήθη χώρο στον οποίο έχουμε εκλέξει ένα τρισσορθογώνιο και δεξιόστροφο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων.

Τέλος, τονίζουμε ότι για $m > 3$ δεν υπάρχει αντίστοιχη γεωμετρική εικόνα του χώρου \mathbb{R}^m .

1.1.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Η Ευκλείδεια απόσταση

$$\|M_1M_2\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$$

δυσ σημείων $M_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ και $M_2(y_1, y_2, \dots, y_m)$ του χώρου \mathbb{R}^m έχει τις ιδιότητες :

$$(I) \quad |x_\lambda - y_\lambda| \leq \|M_1M_2\|, \text{ για κάθε } \lambda \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$(II) \quad \|M_1M_2\| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_m - y_m|.$$

Απόδειξη. (I) Παρατηρούμε ότι είναι

$$|x_\lambda - y_\lambda| = \sqrt{|x_\lambda - y_\lambda|^2} = \sqrt{(x_\lambda - y_\lambda)^2} \quad (5)$$

$$\text{και ότι} \quad (x_\lambda - y_\lambda)^2 \leq (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x_\lambda - y_\lambda)^2 \leq \|M_1 M_2\|^2 \Rightarrow \sqrt{(x_\lambda - y_\lambda)^2} \leq \sqrt{\|M_1 M_2\|^2} \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} |x_\lambda - y_\lambda| \leq \|M_1 M_2\|$, για κάθε $\lambda = 1, 2, \dots, m$.

(II) Επειδή για μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ισχύει

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2 \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)^2,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \|M_1 M_2\|^2 &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2 = \\ &= |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_m - y_m|^2 \leq \\ &\leq (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_m - y_m|)^2, \end{aligned}$$

δηλ. $\|M_1 M_2\|^2 \leq (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_m - y_m|)^2$

και από την ανισότητα αυτή παίρνουμε

$$\sqrt{\|M_1 M_2\|^2} \leq \sqrt{(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_m - y_m|)^2}$$

ή $\|M_1 M_2\| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_m - y_m|$.

1.1.2. ΠΟΡΙΣΜΑ. Για το τυχαίο σημείο $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ και το σημείο $O(0, 0, \dots, 0)$ του χώρου \mathbb{R}^m έχουμε

$$(I) \quad |x_i| \leq \|MO\|, \text{ για κάθε } i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$(II) \quad \|MO\| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_m|.$$

1.1.3. ΟΡΙΣΜΟΙ . Ας είναι $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ένα σημείο του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^m και $\delta (> 0)$ ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Το σύνολο

$$\{ M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m / \|MM_0\| < \delta \},$$

των σημείων του χώρου \mathbb{R}^m , των οποίων η απόσταση από το σημείο M_0 είναι μικρότερη του δ , λέγεται **δ - κυκλική γειτονία του σημείου M_0** ή (απλά) **δ - γειτονία του σημείου M_0** και συμβολίζεται με $\mathcal{N}_\delta(M_0)$. Με το συμβολισμό αυτόν έχουμε

$$\mathcal{N}_\delta(M_0) = \{ M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m / \|MM_0\| < \delta \}.$$

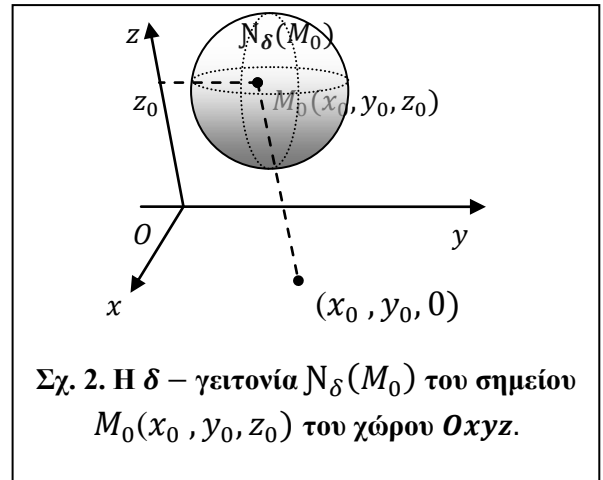
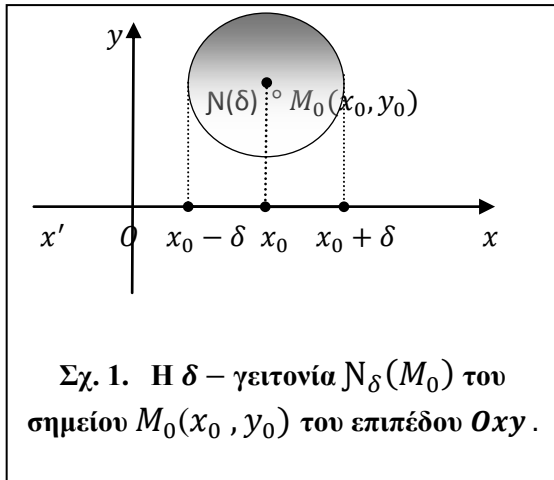
Όταν δεν είναι αναγκαίο να αναφερόμαστε στο θετικό δ , τότε συμβολίζουμε την γειτονία του σημείου M_0 (απλά) με $\mathcal{N}(M_0)$.

1.1.4. Παρατηρήσεις : (α) Η δ - γειτονία του σημείου $M_0(x_0)$ του χώρου \mathbb{R}^1 (δηλ. της πραγματικής ευθείας) είναι το ανοικτό διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(β) Η δ – γειτονία του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ του χώρου \mathbb{R}^2 (δηλ. του επιπέδου Oxy),

$$\begin{aligned} N_\delta(M_0) &= \{ M(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|MM_0\| < \delta \} = \\ &= \left\{ M(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \right\} \end{aligned}$$

είναι το εσωτερικό μέρος του κυκλικού δίσκου με κέντρο το σημείο M_0 και ακτίνα δ , ο κυκλικός δηλ. δίσκος στον οποίο δεν περιλαμβάνονται τα σημεία της περιφέρειάς του (Σχ. 1).



(γ) Η δ – γειτονία του σημείου $M_0(x_0, y_0, z_0)$ του χώρου \mathbb{R}^3 (δηλ. του χώρου $Oxyz$),

$$\begin{aligned} N_\delta(M_0) &= \{ M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \|MM_0\| < \delta \} = \\ &= \left\{ M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta \right\} \end{aligned}$$

είναι το εσωτερικό μέρος της σφαίρας με κέντρο το σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνα δ , της σφαίρας δηλ. στην οποία δεν περιλαμβάνονται τα σημεία της εξωτερικής της επιφάνειας (Σχ. 2).

1.1.5. ΟΡΙΣΜΟΣ . Μια συνάρτηση $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ (6)

λέγεται ακολουθία σημείων του χώρου \mathbb{R}^m . Την τιμή $\varphi(k)$ της συνάρτησης (6) στο τυχαίο $k \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k)$ ή (απλά) με M_k και ονομάζουμε υπ' αριθ. κ όρο της ακολουθίας (5). Την ακολουθία (5) συμβολίζουμε σύντομα με

$$(M_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{ή και με} \quad M_1, M_2, M_3, \dots, M_k, \dots$$

Λέμε ότι η ακολουθία $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σημείο $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ και γρά-

φουμε $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = M_0$, αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \kappa \in \mathbb{N}, \kappa > N(\varepsilon) \Rightarrow \|M_\kappa M_0\| < \varepsilon, \quad (7)$$

δηλ. αν για κάθε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N(\varepsilon)$ (ο οποίος εξαρτάται γενικά από τον ε) τέτοιος ώστε να είναι $\|M_\kappa M_0\| < \varepsilon, \forall \kappa > N(\varepsilon)$.

1.1.6. ΠΡΟΤΑΣΗ.

Η ακολουθία $(M_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}}$ σημείων του χώρου \mathbb{R}^m , όπου $M_\kappa \equiv (x_1^\kappa, x_2^\kappa, \dots, x_m^\kappa), \forall \kappa \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στο σημείο $M_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ αν, και μόνο αν, οι αριθμητικές ακολουθίες $(x_i^\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουν, αντίστοιχα, στους αριθμούς x_i^0 για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$. Με άλλα λόγια,

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} M_\kappa = M_0 \Leftrightarrow \lim_{\kappa \rightarrow \infty} x_i^\kappa = x_i^0, \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι είναι $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} M_\kappa = M_0$ και θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.4, υπάρχει τότε ακέραιος $N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \kappa \in \mathbb{N}, \kappa > N(\varepsilon) \Rightarrow \|M_\kappa M_0\| < \varepsilon$. Αλλά επειδή (Πρότ. 1.1.1) είναι $|x_i^\kappa - x_i^0| \leq \|M_\kappa M_0\|, \forall i = 1, 2, \dots, m$,

$$\kappa \in \mathbb{N}, \kappa > N(\varepsilon) \Rightarrow \|M_\kappa M_0\| < \varepsilon \Rightarrow |x_i^\kappa - x_i^0| < \varepsilon, \forall i = 1, 2, \dots, m$$

και άρα είναι $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} x_i^\kappa = x_i^0, \forall i = 1, 2, \dots, m$.

Υποθέτουμε τώρα ότι είναι $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} x_i^\kappa = x_i^0, \forall i = 1, 2, \dots, m$ και θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Τότε για τον θετικό $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{m}$ υπάρχει δείκτης N_{ε_i} τέτοιος ώστε για $\kappa > N_{\varepsilon_i}$ να είναι $|x_i^\kappa - x_i^0| < \varepsilon_i$, για κάθε i , δηλ. τέτοιος ώστε

$$\kappa \in \mathbb{N}, \kappa > N_{\varepsilon_i} \Rightarrow |x_i^\kappa - x_i^0| < \varepsilon_i, \forall i = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Τέλος, αν πάρουμε σαν θετικό $N(\varepsilon)$ τον μεγαλύτερο από τους N_{ε_i} , δηλ. τον $N(\varepsilon) = \max\{N_{\varepsilon_i} / i = 1, 2, \dots, m\}$, τότε για $\kappa > N(\varepsilon)$ επαληθεύονται όλες οι ανισότητες (8) και σύμφωνα με την Πρότ. 1.1.1 είναι $\|M_\kappa M_0\| \leq |x_1^\kappa - x_1^0| + |x_2^\kappa - x_2^0| + \dots + |x_m^\kappa - x_m^0|$. Επομένως τότε

$$\kappa \in \mathbb{N}, \kappa > N(\varepsilon) \Rightarrow \|M_\kappa M_0\| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_m = \overbrace{\frac{\varepsilon}{m} + \frac{\varepsilon}{m} + \dots + \frac{\varepsilon}{m}}^{m\text{-προσθεταίοι}} = m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$$

και άρα είναι $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} M_\kappa = M_0$.

1.1.7. ΟΡΙΣΜΟΙ. Ας είναι S ένα μη κενό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^m . Ένα σημείο $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ του χώρου \mathbb{R}^m λέγεται εσωτερικό σημείο του συνόλου S , αν

υπάρχει γειτονία του $N_\delta(M)$ η οποία περιέχεται εξ ολοκλήρου στο S , δηλ. αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε να είναι $N_\delta(M) \subseteq S$.

Ένα σημείο $M_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ του χώρου \mathbb{R}^m λέγεται σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου S , όπου $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^m$, αν υπάρχει ακολουθία $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ σημείων του S , η οποία να συγκλίνει στο σημείο M_0 και της οποίας όλα τα σημεία να είναι διαφορετικά από το M_0 .

Το σύνολο των σημείων συσσωρεύσεως ενός συνόλου S , όπου $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^m$, συμβολίζεται με S' (Στονούμενο).

Ένα σύνολο S , όπου $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^m$, λέγεται ανοικτό, αν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά και λέγεται κλειστό αν περιέχει όλα τα σημεία συσσωρεύσεώς του.

Ένα ανοικτό σύνολο D , όπου $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^m$, λέγεται ανοικτή περιοχή αν δύο οποιαδήποτε σημεία του μπορεί να ενωθούν με τεθλασμένη γραμμή η οποία να περιλαμβάνεται εξ' ολοκλήρου στο D .

Το σύνολο $D \cup D'$, όπου D είναι ανοικτή περιοχή, λέγεται κλειστή περιοχή.

1.1.9. Παραδείγματα (ανοικτών, κλειστών συνόλων και περιοχών).

1) Στην πραγματική ευθεία όλα τα ανοικτά διαστήματα (α, β) , όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$ είναι ανοικτά σύνολα, αλλά και ανοικτές περιοχές και όλα τα κλειστά διαστήματα $[\alpha, \beta]$, είναι κλειστά σύνολα, αλλά και κλειστές περιοχές. Τα άκρα α, β του ανοικτού διαστήματος (α, β) είναι σημεία συσσωρεύσεώς του.

2) Στο επίπεδο Οxy :

\therefore Κάθε γειτονία $N_\delta(M_0) = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|MM_0\| < \delta\}$, ενός σημείου $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό σύνολο, αφού κάθε σημείο της είναι εσωτερικό, αλλά και περιοχή του επιπέδου \mathbb{R}^2 . Τα σημεία της περιφέρειας του κύκλου

$$K = \{M(x, y) / \|MM_0\| = \delta\} = \{M(x, y) / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta^2\},$$

του κύκλου δηλ. με κέντρο το σημείο M_0 και ακτίνα δ , είναι όλα σημεία συσσωρεύσεως της γειτονίας $N_\delta(M_0)$.

Ο κυκλικός δίσκος

$$\Delta \equiv \{M(x, y) / \|MM_0\| \leq \delta\} = \{M(x, y) / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2\},$$

είναι κλειστό σύνολο, αλλά και κλειστή περιοχή του επιπέδου.

\therefore Όλα τα υποσύνολα του \mathbb{R}^2 της μορφής

$$(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) = \{M(x, y) / \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta\},$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta, \gamma < \delta$, είναι περιοχές και λέγονται ανοικτές ορθογώνιες περιοχές).

∴ Όλα τα υποσύνολά του \mathbb{R}^2 της μορφής

$$[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] = \{ M(x, y) / \alpha \leq x \leq \beta, \gamma \leq y \leq \delta \},$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta, \gamma < \delta$, είναι κλειστές περιοχές και λέγονται κλειστές ορθογώνιες περιοχές).

∴ Το δεύτερο τεταρτημόριο Oyx' στο οποίο δεν περιλαμβάνονται τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα Ox' και του θετικού ημιάξονα Oy , δηλ. το υποσύνολό του

$$\{ M(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0, y > 0 \},$$

είναι ανοικτή περιοχή του επιπέδου.

∴ Το δεύτερο τεταρτημόριο Oyx' στο οποίο περιλαμβάνονται τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα Ox' , αλλά δεν περιλαμβάνονται τα σημεία του θετικού ημιάξονα Oy , δηλ. το υποσύνολό του

$$\{ M(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0, y > 0 \},$$

δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό σύνολο (άρα δεν είναι και περιοχή).

3) Στο χώρο $Oxyz$:

∴ Όλα τα υποσύνολά του της μορφής

$$(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) \times (\varepsilon, \zeta) = \{ M(x, y, z) / \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta, \varepsilon < z < \zeta \},$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta, \gamma < \delta, \varepsilon < \zeta$, είναι ανοικτές περιοχές και λέγονται ανοικτά παραλληλεπίπεδα.

∴ Όλα τα υποσύνολά του της μορφής

$$[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \times [\varepsilon, \zeta] = \{ M(x, y, z) / \alpha \leq x \leq \beta, \gamma \leq y \leq \delta, \varepsilon \leq z \leq \zeta \},$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta, \gamma < \delta, \varepsilon < \zeta$, είναι κλειστά σύνολα και λέγονται κλειστά παραλληλεπίπεδα.

1.2. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1.2.1. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ας είναι $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ και S ένα μη κενό υποσύνολο του χώρου \mathbb{R}^m .

Μια μονότιμη απεικόνιση (μονοσήμαντη αντιστοιχία)

$$f : S \ni (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

λέγεται πραγματική συνάρτηση m ανεξάρτητων πραγματικών μεταβλητών. Σε ότι ακολουθεί, για λόγους οικονομίας χώρου, θα ονομάζουμε τις πραγματικές συναρτήσεις m (≥ 2) πραγματικών μεταβλητών (απλά) συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Η ισότητα

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (2)$$

(όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής) λέγεται τύπος της συνάρτησης (1).

Συχνά την τιμή $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ της συνάρτησης f στο σημείο $M \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S$ συμβολίζουμε με $f(M)$, δηλ. δεχόμαστε ότι

$$f(M) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_m), \text{ για κάθε σημείο } M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S.$$

1.2.2. Παρατήρηση. Όταν μας δίνεται ο τύπος $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ μιας συνάρτησης, αλλά δεν μας δίνεται το πεδίο ορισμού της, τότε σαν πεδίο ορισμού της δεχόμαστε το “ευρύτερο” υποσύνολο του \mathbb{R}^m στο οποίο η παράσταση $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ έχει έννοια πραγματικού αριθμού.

1.2.3. Παράδειγμα. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$(a) \quad f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad (b) \quad g(x, y) = \sqrt{(x + y - 2)(x + y - 4)}.$$

Λύση. (a) Επειδή η παράσταση $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ έχει έννοια πραγματικού αριθμού μόνο όταν η υπόριζη ποσότητα είναι μη αρνητική και επειδή

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2^2,$$

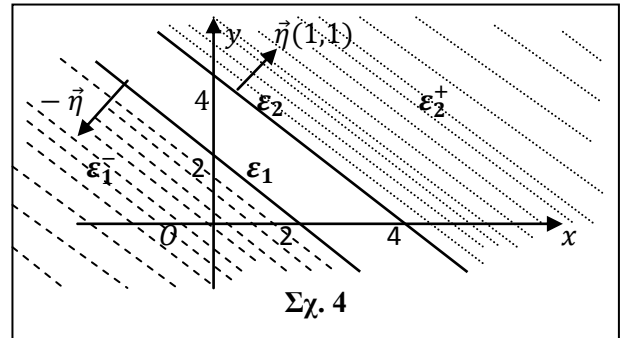
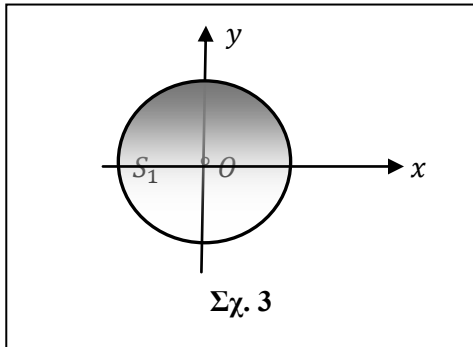
πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι ο κυκλικός δίσκος

$$\Delta_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2^2\}$$

του επιπέδου $\mathbb{R}^2 (\equiv Oxy)$, δηλ. ο κυκλικός δίσκος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα 2, ο οποίος είναι βέβαια κλειστό σύνολο. (Βλέπε § 1.1.5).

(b) Υπενθυμίζουμε πρώτα ότι θετικό ημιεπίπεδο της ευθείας $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ (της ευθείας δηλ. ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, όπου $A > 0$) λέγεται το ημιεπίπεδο σε κάθε σημείο $M(x, y)$ του οποίου είναι $Ax + By + \Gamma > 0$ και αρνητικό ημιεπίπεδο λέγεται εκείνο σε κάθε σημείο $M(x, y)$ του οποίου είναι $Ax + By + \Gamma < 0$. Υπενθυμίζουμε, ακόμη, ότι το θετικό (αντ. αρνητικό) ημιεπίπεδο της ευθείας $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ είναι εκείνο στο οποίο άγεται από σημείου της ε το διάνυσμα $\vec{\eta}(A, B)$ (αντ. το διάνυσμα $-\vec{\eta}(A, B)$).

Για τις ανάγκες της παραγράφου αυτής θα συμβολίζουμε με ε^+ (αντ. ε^-) το θετικό (αντ. το αρνητικό) ημιεπίπεδο μιας ευθείας ε του επιπέδου Oxy και με ε το σύνολο των σημείων της ευθείας ε .



Ονομάζουμε ε_1 (αντίστοιχα ε_2) την ευθεία του επιπέδου με εξίσωση $x + y - 2 = 0$ (αντ. $x + y - 4 = 0$) και παρατηρούμε ότι επειδή

$$(x + y - 2)(x + y - 4) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2 \geq 0 \text{ και } x + y - 4 \geq 0) \text{ ή } (x + y - 2 \leq 0 \text{ και } x + y - 4 \leq 0)$$

και επειδή $(x + y - 2 \geq 0 \text{ και } x + y - 4 \geq 0) \Leftrightarrow x + y - 4 \geq 0$ και

$$(x + y - 2 \leq 0 \text{ και } x + y - 4 \leq 0) \Leftrightarrow x + y - 2 \leq 0,$$

έχουμε $(x + y - 2)(x + y - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x + y - 4 \geq 0 \text{ ή } x + y - 2 \leq 0$.

Τέλος, επειδή τα σημεία (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει $x + y - 4 \geq 0$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία ε_2 και στο θετικό της ημιεπίπεδο, ενώ τα σημεία (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει $x + y - 2 \leq 0$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία ε_1 και στο αρνητικό της ημιεπίπεδο (Σχ. 4), το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο

$$\varepsilon_2 \cup \varepsilon_2^+ \cup \varepsilon_1 \cup \varepsilon_1^-.$$

1.3. ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1.3.1. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ας είναι $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ένα σημείο συσσωρεύσεως του S και $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m) : S \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση m μεταβλητών με πεδίο ορισμού το S . Λέμε ότι **η συνάρτηση f έχει όριο τον πραγματικό αριθμό λ στο σημείο συσσωρεύσεως $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ του S**

(ή, ισοδύναμα, ότι **η τιμή $f(M)$ της συνάρτησης f τείνει (πλησιάζει) προς τον πραγματικό αριθμό λ καθώς το σημείο $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S$ τείνει προς το σημείο συσσωρεύσεως $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ του S**)

και γράφουμε

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \lambda \quad \left(\text{ή} \quad \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \lambda \right),$$

αν για κάθε θετικό αριθμό ε (οσονδήποτε μικρό) υπάρχει θετικός αριθμός $\delta = \delta(\varepsilon)$ (ο οποίος γενικά εξαρτάται από τον ε) τέτοιος ώστε να είναι $|f(x_1, x_2, \dots, x_m) - \lambda| < \varepsilon$, για κάθε σημείο $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S$ που επαληθεύει τη διπλή ανισότητα $0 < \|MM_0\| < \delta$. Με άλλα λόγια, λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο τον πραγματικό αριθμό λ στο σημείο συσσωρεύσεως $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ του S , αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (1) \quad 0 < \|MM_0\| < \delta \Rightarrow |f(x_1, x_2, \dots, x_m) - \lambda| < \varepsilon, \quad (7)$$

για κάθε σημείο $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S$.

1.3.2. Παράδειγμα. Να δειχτεί ότι για τη συνάρτηση δυο μεταβλητών $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, όπου

$$f(x, y) = 3x + 7y - 25$$

ισχύει

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x, y) = 2.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 2| &= |3x + 7y - 25 - 2| = |3x - 6 + 7y - 21| = |3(x - 2) + 7(y - 3)| \leq \\ &\leq |3(x - 2)| + |7(y - 3)| = 3|x - 2| + 7|y - 3|, \end{aligned}$$

ότι δηλ. είναι

$$|f(x, y) - 2| \leq 3|x - 2| + 7|y - 3|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Παρατηρούμε στη συνέχεια, ότι αν ονομάσουμε M_0 το σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες $(2, 3)$, τότε

$$\begin{aligned} M(x, y) \in N_\delta(M_0) &\stackrel{(Πρότ. 1.1.3)}{\Rightarrow} 0 < \|MM_0\| < \delta \quad \Leftrightarrow \\ &\Rightarrow |x - 2| \leq \|MM_0\| < \delta, \quad |y - 3| \leq \|MM_0\| < \delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3|x - 2| + 7|y - 3| < 3\delta + 7\delta = 10\delta. \end{aligned}$$

Επομένως αν πάρουμε $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{10}$, τότε

$$M(x, y) \in N_\delta(M_0) \Rightarrow |f(x, y) - 2| \leq 3|x - 2| + 7|y - 3| < 10\delta = 10 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon$$

και σαν συνέπεια

$$0 < \|MM_0\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 2| < \varepsilon. \quad (9)$$

¹ Τέτοιος ώστε.

Έχουμε δείξει ότι για τον θετικό $\delta = \frac{\varepsilon}{10}$ ισχύει η σχέση (9) και άρα είναι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x,y) = 2.$$

1.3.3. Παράδειγμα. Να δείχτεί ότι για τη συνάρτηση τριών μεταβλητών $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, όπου

$$f(x,y,z) = 2 + 3x + 4y + z^3,$$

έχουμε

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,3)} f(x,y,z) = 40.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε θετικό ε και θα προσπαθήσουμε να βρούμε τον αντίστοιχο θετικό $\delta = \delta(\varepsilon)$ που επαληθεύει την (7) για τα σημεία $M(x,y,z)$ και $M_0(1,2,3)$. Παρατηρούμε πρώτα ότι είναι

$$\begin{aligned} |f(x,y,z) - 40| &= |2 + 3x + 4y + z^3 - 40| = |3(x-1) + 4(y-2) + z^3 - 3^3| = \\ &= |3(x-1) + 4(y-2) + (z-3)(z^2 + 3z + 9)| \leq \quad (2) \\ &\leq 3|x-1| + 4|y-2| + |z-3| \cdot |z^2 + 3z + 9|. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{Εκλέγουμε σαν θετικό } \delta \text{ τον } \delta_1 = 1 \text{ και παίρνουμε } \|MM_0\| < \delta_1. \quad (11)$$

Τότε (Πρότ. 1.1.3) επειδή είναι $|z-3| \leq \|MM_0\|$ έχουμε και $|z-3| < 1$. Αλλά,

$$|z-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < z-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < z < 4$$

και άρα $|z-3| < 1 \Rightarrow 2 < z < 4 \Rightarrow |z^2 + 3z + 9| = z^2 + 3z + 9 < 4^2 + 3 \cdot 4 + 9 = 37$, δηλ.

$$\|MM_0\| < \delta_1 \Rightarrow |z^2 + 3z + 9| < 37. \quad (12)$$

Από τις (11) και (12) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \|MM_0\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y,z) - 40| &\leq 3|x-1| + 4|y-2| + |z-3| \cdot |z^2 + 3z + 9| < \\ &< 3|x-1| + 4|y-2| + 37|z-3|. \end{aligned} \quad (13)$$

Εκλέγουμε σαν θετικό $\delta(\varepsilon)$ τον μικρότερο από τους θετικούς $\delta_1 = 1$ και $\delta_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{44}$, δηλ. θέτουμε $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \delta_2(\varepsilon)\} = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{44}\right\}$ και παρατηρούμε ότι

$$\|MM_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|MM_0\| < \delta_1 \text{ και } \|MM_0\| < \delta_2(\varepsilon).$$

(²) Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , ισχύει $|\alpha + \beta + \gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$.

Τέλος,

$$\begin{aligned} & \stackrel{(13)}{\|MM_0\| < \delta_1 \stackrel{\Leftrightarrow}{\Rightarrow} |f(x, y, z) - 40| < 3|x - 1| + 4|y - 2| + 37|z - 3|,} \\ & \stackrel{(\text{Πρότ. 1.1.3})}{\|MM_0\| < \delta_2(\varepsilon) \stackrel{\Leftrightarrow}{\Rightarrow} |x - 1| < \delta_2(\varepsilon), |y - 2| < \delta_2(\varepsilon), |z - 3| < \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow} \\ & \Rightarrow 3|x - 1| + 4|y - 2| + 37|z - 3| < 3\delta_2(\varepsilon) + 4\delta_2(\varepsilon) + 37\delta_2(\varepsilon) = 44\delta_2(\varepsilon) \end{aligned}$$

και άρα

$$\|MM_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x, y, z) - 40| < 44\delta_2(\varepsilon) \leq 44 \cdot \frac{\varepsilon}{44} = \varepsilon.$$

Έχουμε δείξει ότι για κάθε θετικό ε υπάρχει θετικός $\delta(\varepsilon) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{44}\right\}$ τέτοιος ώστε

$$0 < \|MM_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x, y, z) - 40| < \varepsilon,$$

ότι δηλ. είναι

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, 2, 3)} f(x, y, z) = 40.$$

1.3.4. ΟΡΙΣΜΟΙ. Ας είναι $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ένα σημείο συσσωρεύσεως του S και $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m) : S \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση m μεταβλητών με πεδίο ορισμού το S . Λέμε ότι **η συνάρτηση f έχει όριο το $+\infty$ στο σημείο συσσωρεύσεως $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ του S**

(ή, ισοδύναμα, ότι **η τιμή $f(M)$ της συνάρτησης f τείνει στο $+\infty$ καθώς το σημείο $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S$ τείνει στο σημείο συσσωρεύσεως $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ του S**)

και γράφουμε

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = +\infty \quad \left(\text{ή} \quad \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = +\infty \right),$$

αν για κάθε θετικό αριθμό N (οσονδήποτε μεγάλο) υπάρχει θετικός αριθμός $\delta = \delta(N)$ (ο οποίος γενικά εξαρτάται από τον N) τέτοιος ώστε να είναι $f(x_1, x_2, \dots, x_m) > N$, για κάθε σημείο $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S$ που επαληθεύει τη διπλή ανισότητα $0 < \|MM_0\| < \delta$.

Με άλλα λόγια, λέμε ότι **η συνάρτηση f έχει όριο το $+\infty$ στο σημείο συσσωρεύσεως $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ του S** , αν

$$\forall N > 0 \exists \delta = \delta(N) > 0 : 0 < \|MM_0\| < \delta(N) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_m) > N,$$

για κάθε σημείο $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S$.

Ανάλογα, λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο το $-\infty$ στο σημείο συσσωρεύσεως $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ του S , αν

$$\forall N > 0 \exists \delta = \delta(N) > 0 : 0 < \|MM_0\| < \delta(N) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_m) < -N,$$

για κάθε σημείο $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S$.

1.3.5. ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ . Υποθέτουμε ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου $M(x, y)$ του επιπέδου \mathbb{R}^2 είναι συνεχείς συναρτήσεις της ίδιας ανεξάρτητης μεταβλητής $t \in [a, b]$, ότι δηλ. είναι

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b]. \quad (14)$$

Το σύνολο των σημείων $c = \{M(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 / t \in [a, b]\}$ του επιπέδου \mathbb{R}^2 είναι (Βλέπε [] Σελ.60) μια καμπύλη, της οποίας παραμετρικές εξισώσεις είναι οι (14). Όταν η παράμετρος t μεταβάλλεται, τότε το σημείο $M(x, y)$ κινείται επί της (κατά μήκος της) καμπύλης c .

Ένα σημείο $M_0(x_0, y_0)$ του επιπέδου είναι σημείο της καμπύλης c αν υπάρχει τιμή $t = t_0$ της παραμέτρου t τέτοια ώστε να είναι $x(t_0) = x_0$ και $y(t_0) = y_0$.

1.3.6. ΟΡΙΣΜΟΣ . Ας είναι $\varphi = \varphi(x, y)$ μια συνάρτηση δυο μεταβλητών, της οποίας το πεδίο ορισμού $S (\subseteq \mathbb{R}^2)$ περιέχει όλα τα σημεία της παραπάνω καμπύλης c . Το όριο

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi[x(t), y(t)]$$

ονομάζουμε όριο της συνάρτησης φ κατά μήκος της καμπύλης c , όταν $t \rightarrow t_0$.

1.3.7. ΘΕΩΡΗΜΑ . Ας είναι $\varphi = \varphi(x, y) : S \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^2$, μια συνάρτηση δυο μεταβλητών και

$$c : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b]$$

μια καμπύλη του επιπέδου η οποία έχει τις ιδιότητες :

(α) όλα τα σημεία της ανήκουν στο σύνολο S

(β) για τις συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ ισχύουν $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$

(γ) περνά (η καμπύλη c) από το σημείο (x_0, y_0) .

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \varphi(x, y)$ και είναι ίσο με λ , τότε υπάρχει και το όριο της συ-

νάρτησης φ όταν το σημείο (x, y) κινούμενο επί της καμπύλης c τείνει προς το (x_0, y_0) και ισούται με λ , δηλ. τότε είναι και

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi[x(t), y(t)] = \lambda.$$

1.3.8. ΠΟΡΙΣΜΑ . (Σπουδαίο στις εφαρμογές)

Ας είναι $\varphi = \varphi(x, y) : S \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^2$, μια συνάρτηση δυο μεταβλητών και

$$c_1: x = x_1(u), y = y_1(u), \quad u \in [a, \beta],$$

$$c_2: x = x_2(v), y = y_2(v), \quad v \in [\gamma, \delta]$$

δυο καμπύλες οι οποίες έχουν τις ιδιότητες της καμπύλης c του παραπάνω Θεωρήματος. Αν είναι

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \varphi[x_1(u), y_1(u)] = \lambda_1, \quad \lim_{v \rightarrow v_0} \varphi[x_2(v), y_2(v)] = \lambda_2 \quad \text{και} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \varphi(x, y)$, της συνάρτησης φ όταν $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

1.3.9. Παράδειγμα. Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

όταν $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Λύση. Υπενθυμίζουμε πρώτα ότι στον συμβολισμό του ορίου $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ μιας συ-

νάρτησης εννοούμε πάντοτε ότι είναι $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Παρατηρούμε στη συνέχεια ότι η καμπύλη $c_1 : y = 2x$ (ευθεία) περνά από το σημείο $(0, 0)$ και ότι σαν παραμετρικές της εξισώσεις μπορούμε να πάρουμε τις $x = x$ και $y = 2x$. Το όριο της συνάρτησης φ κατά μήκος της ευθείας ε είναι το

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=2x)}} \varphi(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=2x)}} \left[\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \left[\frac{x^2 \cdot 2x}{x^4 + (2x)^2} \right] = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \left[\frac{2x^3}{x^4 + 4x^2} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \left[\frac{2x}{x^2 + 4} \right] = 0. \end{aligned}$$

Ανάλογα, το αντίστοιχο όριο της συνάρτησης φ κατά μήκος της παραβολής $c_2 : y = x^2$ είναι το

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=x^2)}} \varphi(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=x^2)}} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{x^4}{2x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Τέλος, επειδή είναι

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=2x)}} \varphi(x,y) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=x^2)}} \varphi(x,y),$$

το ζητούμενο όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x,y)$ δεν υπάρχει.

1.3.10. ΘΕΩΡΗΜΑ . (Οι ιδιότητες των ορίων των συναρτήσεων μιας μεταβλητής μεταφέρονται και στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών).

Ας είναι $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^m$ και δυο συναρτήσεις $\varphi, \sigma : S \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε να είναι

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M) = \lambda_1 \quad \text{και} \quad \lim_{M \rightarrow M_0} \sigma(M) = \lambda_2,$$

όπου $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S$, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ είναι σημείο συσσωρεύσεως του S και οι λ_1, λ_2 είναι πραγματικοί αριθμοί ή $\pm \infty$. Τότε είναι :

- (1) $\lim_{M \rightarrow M_0} [\varphi(M) \pm \sigma(M)] = \lim_{M \rightarrow M_0} [\varphi(M)] \pm \lim_{M \rightarrow M_0} [\sigma(M)] = \lambda_1 \pm \lambda_2$
- (2) $\lim_{M \rightarrow M_0} [\varphi(M) \cdot \sigma(M)] = \left[\lim_{M \rightarrow M_0} [\varphi(M)] \right] \cdot \left[\lim_{M \rightarrow M_0} [\sigma(M)] \right] = \lambda_1 \cdot \lambda_2$
- (3) $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\varphi(M)}{\sigma(M)} = \frac{\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M)}{\lim_{M \rightarrow M_0} \sigma(M)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, εφόσον είναι $\lambda_2 \neq 0$.
- (4) $\lim_{M \rightarrow M_0} \sqrt[n]{\varphi(M)} = \sqrt[n]{\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M)} = \sqrt[n]{\lambda_1}$, όπου $n \in \mathbb{N}$, εφόσον είναι $\sqrt[n]{\lambda_1} \in \mathbb{R}$
- (5) $\lim_{M \rightarrow M_0} [\alpha^{\varphi(M)}] = \alpha^{\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M)} = \alpha^{\lambda_1}$, όπου $\alpha > 0$.

1.3.11. ΟΡΙΣΜΟΙ. Ας είναι $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^2$, $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, (α, β) ένα σημείο συσσωρεύσεως του S και ας συμβολίσουμε με

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \beta \\ (x = \sigma\tau)}} \varphi(x,y) \quad \text{ή (απλά) με} \quad \lim_{y \rightarrow \beta} \varphi(x,y)$$

το όριο της τιμής $\varphi(x,y)$ καθώς το $y \rightarrow \beta$ και το x κρατείται σταθερό.

Υποθέτουμε τώρα ότι το παραπάνω όριο υπάρχει για κάθε $x \neq a$. Τότε το όριο αυτό είναι προφανώς συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x , δηλ. υπάρχει συνάρτηση $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ τέτοια ώστε να είναι $\lim_{y \rightarrow \beta} \varphi(x, y) = \varphi_1(x)$. Το όριο $\lim_{x \rightarrow a} \varphi_1(x)$, της συνάρτησης $\varphi_1(x)$ καθώς το $x \rightarrow a$, εφόσον βέβαια υπάρχει, λέγεται διπλό yx – όριο της συνάρτησης $\varphi(x, y)$ στο σημείο (a, β) .

Με εναλλαγή των ρόλων των μεταβλητών x και y στον παραπάνω ορισμό έχουμε το διπλό xy – όριο της συνάρτησης $\varphi(x, y)$ στο σημείο (a, β) .

Τα δυο αυτά διπλά όρια συμβολίζουμε

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow \beta} \varphi(x, y) \right] \text{ το πρώτο και με } \lim_{y \rightarrow \beta} \left[\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x, y) \right] \text{ το δεύτερο .}$$

1.3.12. Παράδειγμα. Να βρεθούν τα διπλά όρια της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \frac{2x+3y}{2x-5y},$$

στην αρχή $O(0,0)$ του συστήματος συντεταγμένων του Καρτεσιανού επιπέδου.

Λύση. Παρατηρούμε πρώτα ότι στο διπλό yx – όριο, απαιτείται να υπάρχει το όριο $\lim_{y \rightarrow \beta} \varphi(x, y)$ για κάθε $x \neq a$, δηλ. απαιτείται να υπάρχει το όριο

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \beta \\ (x \neq a)}} \varphi(x, y).$$

Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, έχουμε

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{2x+3y}{2x-5y} \right) \equiv \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \left(\frac{2x+3y}{2x-5y} \right) = \left(\frac{2x+3 \cdot 0}{2x-5 \cdot 0} \right)_{(x \neq 0)} = \left(\frac{2x}{2x} \right)_{(x \neq 0)} = 1$$

και άρα το διπλό yx – όριο της φ στο σημείο $O(0,0)$ είναι το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{2x+3y}{2x-5y} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι

⁽³⁾ Στο όριο αυτό το x θεωρείται σταθερό .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x + 3y}{2x - 5y} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \left(\frac{2x + 3y}{2x - 5y} \right) = \left(\frac{2 \cdot 0 + 3y}{2 \cdot 0 - 5y} \right)_{(y \neq 0)} = \left(\frac{3y}{-5y} \right)_{(y \neq 0)} = -\frac{3}{5}$$

και άρα το διπλό xy - όριο της φ στο σημείο $O(0,0)$ είναι το

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+3y}{2x-5y} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{3}{5} \right) = -\frac{3}{5}.$$

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν και τα δύο διπλά όρια, στο σημείο $O(0,0)$ της συνάρτησης που δόθηκε και ότι αυτά **δεν είναι ίσα** (μεταξύ τους).

1.3.13. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ας είναι $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^2$, $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και (α, β) ένα σημείο συσσωρεύσεως του S . Αν :

(I) υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} \varphi(x, y)$ της συνάρτησης φ στο σημείο (α, β)

(II) υπάρχουν και τα δύο διπλά της όρια της φ στο σημείο (α, β)

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow \beta} \varphi(x, y) \right] \text{ και } L_2 = \lim_{y \rightarrow \beta} \left[\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x, y) \right],$$

τότε τα δύο διπλά όρια της φ είναι ίσα μεταξύ τους, δηλ. τότε είναι $L_1 = L_2$.

1.3.11. ΠΟΡΙΣΜΑ . Ας είναι $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^2$, $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και (α, β) ένα σημείο συσσωρεύσεως του S . Αν υπάρχουν τα διπλά της όρια

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow \beta} \varphi(x, y) \right] \text{ και } L_2 = \lim_{y \rightarrow \beta} \left[\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x, y) \right]$$

και είναι διάφορα μεταξύ τους, τότε **δεν υπάρχει το όριο** $\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} \varphi(x, y)$ της φ καθώς το

$(x, y) \rightarrow (\alpha, \beta)$.

1.3.12. ΟΡΙΣΜΟΣ . Ας είναι $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Η συνάρτηση φ λέγεται **συνεχής στο σημείο συσσωρεύσεως** M_0 του S αν :

(i) το σημείο M_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της φ , δηλ. αν $M_0 \in S$

(ii) υπάρχει το όριο $\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M) = \lambda$ ($\in \mathbb{R}$)

(iii) το παραπάνω όριο ισούται με την τιμή της συνάρτησης φ στο σημείο M_0 , δηλ.

είναι

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M) = \varphi(M_0).$$

Η συνάρτηση φ λέγεται **συνεχής στο πεδίο ορισμού της** S , αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο συσσωρεύσεως M_0 του S .

1.3.13. Παρατήρηση. Επειδή οι παραπάνω συνθήκες (i) και (ii) περιλαμβάνονται στην (iii), στην πράξη λέμε ότι η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο σημείο M_0 , αν είναι

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M) = \varphi(M_0).$$

1.3.14. Παράδειγμα. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση δυο μεταβλητών

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι συνεχής στην αρχή $O(0,0)$ του συστήματος συν/ων στο επίπεδο $Oxy (\equiv \mathbb{R}^2)$.

Λύση. Για να βρούμε το όριο της παράστασης

$$|\varphi(x, y) - \varphi(0,0)| = \left| \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} - 0 \right| = \left| \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \right|, \quad (\alpha)$$

καθώς $M(x, y) \rightarrow O(0,0)$, παρατηρούμε ότι είναι

$$|2x^2y^3| = 2 \cdot x^2 \cdot y^2 |y| \leq 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x^2 + y^2) \cdot |y|,$$

αφού είναι $x^2 \leq x^2 + y^2$ και $y^2 \leq x^2 + y^2$ και άρα έχουμε

$$\left| \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq \left| 2 \cdot \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} \right| \cdot |y| = 2 \cdot |y| \leq 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 2\|MO\|. \quad (\beta)$$

Πήραμε σιωπηρά υπόψη μας ότι $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ (Βλέπε Πρότ. 1.1.1). Από τις (α) και (β) προκύπτει ότι είναι

$$|\varphi(x, y) - \varphi(0,0)| \leq 2\|MO\|.$$

Θεωρούμε τώρα θετικό ε και εκλέγουμε σαν θετικό $\delta(\varepsilon)$ τον $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε

$$0 < \|MO\| < \delta \Rightarrow |\varphi(x, y) - \varphi(0,0)| \leq 2\|MO\| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

για όλα τα σημεία $M(x, y)$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3.1, είναι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x, y) = \varphi(0,0)$$

και άρα η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο σημείο $O(0,0)$.

1.4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τιμών των αντίστροφων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$(α) \quad y = \eta\mu x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], \quad (β) \quad y = \sigma\upsilon\nu x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1],$$

$$(γ) \quad y = \varepsilon\varphi x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad (δ) \quad y = \sigma\varphi x : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}.$$

(Απάντηση :

$$(α) \quad y = \tau\omicron\xi\eta\mu x : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (β) \quad y = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

$$(γ) \quad y = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi x : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (δ) \quad y = \tau\omicron\xi\sigma\varphi x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi).$$

(Βλέπε Βιβλιογραφία [2;] Σελ. 84).

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι αριθμητικές τιμές των παρακάτω συναρτήσεων δύο μεταβλητών στα σημεία που γράφονται δίπλα.

$$(i) \quad \sigma(x, y) = \left(\frac{e^{\tau\omicron\xi\eta\mu(x+y)}}{\tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu(x-y)}\right)^3 : M_1\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}, \frac{1-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$(ii) \quad \varphi(x, y) = \left(\frac{\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi(x+y)}{\tau\omicron\xi\sigma\varphi(x-y)}\right)^2 : M_2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(iii) \quad \tau(x, y) = e^{\eta\mu(x+y)} + e^{\sigma\upsilon\nu(x+y)} : M_3\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(iv) \quad \omega(x, y) = x^{y^2-1} + y^{x^2-1} : M_4(2,2), M_5(1,2), M_6(2,1).$$

Λύση.

$$(i) \quad \text{Στο σημείο } M_1(x_1, y_1) \text{ έχουμε } x_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{4}, y_1 = \frac{1-\sqrt{2}}{4}, x_1 + y_1 = \frac{1}{2}, x_1 - y_1 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και άρα } \sigma(M_1) = \sigma(x_1, y_1) = \left(\frac{e^{\tau\omicron\xi\eta\mu(x_1+y_1)}}{\tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu(x_1-y_1)}\right)^3 = \left(\frac{e^{\tau\omicron\xi\eta\mu\left(\frac{1}{2}\right)}}{\tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right)^3 = \left(\frac{\frac{e^{\frac{\pi}{6}}}{\frac{\pi}{4}}}{\frac{\pi}{4}}\right)^3 = \frac{64}{\pi^3} \cdot e^{\frac{\pi}{2}}.$$

(ii) Στο σημείο $M_2(x_2, y_2)$ έχουμε $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 + y_2 = 1$, $x_2 - y_2 = \sqrt{3}$ και άρα $\varphi(M_2) = \varphi(x_2, y_2) = \left(\frac{\tau_{\text{οξεφ}}(x_2+y_2)}{\tau_{\text{οξσφ}}(x_2-y_2)}\right)^2 = \left(\frac{\tau_{\text{οξεφ}}(1)}{\tau_{\text{οξσφ}}(\sqrt{3})}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

(iii) Στο σημείο $M_3(x_3, y_3)$ έχουμε $x_3 = \frac{\pi}{2}$, $y_3 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 + y_3 = \pi$ και άρα

$$\tau(M_3) = \tau(x_3, y_3) = e^{\eta\mu(x_3+y_3)} + e^{\sigma\upsilon\nu(x_3+y_3)} = e^{\eta\mu\pi} + e^{\sigma\upsilon\nu\pi} = e^0 + e^{-1} = 1 + \frac{1}{e}.$$

(iv) Στο σημείο $M_4(x_4, y_4)$ έχουμε $x_4 = 2$, $y_4 = 2$ και άρα

$$\omega(M_4) = \omega(x_4, y_4) = \omega(2, 2) = 2^{2^2-1} + 2^{2^2-1} = 2^3 + 2^3 = 16,$$

στο σημείο $M_5(1, 2)$ έχουμε $x_5 = 1$, $y_5 = 2$ και άρα

$$\omega(M_5) = \omega(x_5, y_5) = \omega(1, 2) = 1^{2^2-1} + 2^{1^2-1} = 1^3 + 2^0 = 1 + 1 = 2.$$

Τέλος, ανάλογα βρίσκουμε ότι $\omega(M_6) = 2$.

Άσκηση 3

Μια συνάρτηση δυο μεταβλητών $\varphi = \varphi(x, y)$ λέγεται ομογενής βαθμού κ , όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$, αν ισχύει

$$\varphi(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\kappa \varphi(x, y), \text{ για όλα τα } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\alpha)$$

Να δειχτεί ότι μια ομογενής συνάρτηση κ βαθμού μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\varphi = x^\kappa \cdot \Phi\left(\frac{y}{x}\right),$$

όπου Φ είναι συνάρτηση μόνο του πηλίκου $\frac{y}{x}$.

Λύση. Θέτοντας στην (1) $\lambda = \frac{1}{x}$ έχουμε, διαδοχικά,

$$\varphi\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x} \cdot y\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^\kappa \varphi(x, y), \quad \varphi\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^\kappa} \varphi(x, y), \quad x^\kappa \cdot \varphi\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi(x, y) \quad \eta$$

$$\varphi = x^\kappa \cdot \Phi\left(\frac{y}{x}\right),$$

όπου $\Phi\left(\frac{y}{x}\right) \equiv \varphi\left(1, \frac{y}{x}\right)$ είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής ($u = \frac{y}{x}$).

Άσκηση 4

Ο ορισμός της ομογενούς συνάρτησης δυο μεταβλητών επεκτείνεται και σε συνάρτηση τριών μεταβλητών.

Μια συνάρτηση τριών μεταβλητών $\varphi = \varphi(x, y, z)$ λέγεται ομογενής βαθμού κ , όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$, αν ισχύει

$$\varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\kappa \varphi(x, y, z), \text{ για όλα τα } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\beta)$$

Να δειχτεί ότι μια ομογενής συνάρτηση τριών μεταβλητών $\varphi = \varphi(x, y, z)$, κ βαθμού, μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\varphi = x^\kappa \cdot \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

όπου $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \equiv \varphi\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ είναι συνάρτηση των δυο μεταβλητών $u = \frac{y}{x}$ και $v = \frac{z}{x}$.

(Απόδειξη : Επαφίεται στον αναγνώστη, γιατί χρησιμοποιεί την ίδια τεχνική με εκείνη της προηγούμενης Άσκησης.)

Άσκηση 5

Οι μεταβλητές x, y, z, t, u, v, ω συνδέονται με τις σχέσεις

$$z = \frac{u+v}{uv}, \quad u = \omega^t, \quad v = \omega^{-t}, \quad \omega = \sqrt{x+y}, \quad t = 3(x-y), \quad \text{όπου } x+y > 0.$$

Να εξεταστεί αν μπορεί η z να εκφραστεί απ' ευθείας (χωρίς δηλ. άλλες ενδιάμεσες μεταβλητές) σαν συνάρτηση :

(α) των μεταβλητών ω και t

(β) των μεταβλητών x και y .

Λύση.

(α) Επειδή $u \cdot v = \omega^t \cdot \omega^{-t} = \omega^{t-t} = \omega^0 = 1$, η ισότητα $z = \frac{u+v}{uv}$ γράφεται, διαδοχικά,

$$z = \frac{u+v}{1}, \quad z = u + v, \quad z = \omega^t + \omega^{-t}.$$

Στην τελευταία σχέση η z εκφράστηκε σαν απ' ευθείας συνάρτηση των μεταβλητών ω και t .

(β) Θέτοντας $\omega = \sqrt{x+y}$ στην ισότητα $z = \omega^t + \omega^{-t}$ έχουμε

$$z = (\sqrt{x+y})^t + (\sqrt{x+y})^{-t} \quad \text{ή} \quad z = (x+y)^{\frac{t}{2}} + (x+y)^{-\frac{t}{2}}.$$

Τέλος, θέτοντας $t = 3(x-y)$ στην τελευταία ισότητα έχουμε τη ζητούμενη έκφραση

$$z = (x+y)^{\frac{3(x-y)}{2}} + (x+y)^{-\frac{3(x-y)}{2}}.$$

Άσκηση 6

Οι μεταβλητές $u, \theta, \eta, \varphi, \omega, x, y, z$ συνδέονται με τις σχέσεις

$$u = (\theta + \eta)^2 - \theta^3 - \eta^3, \quad \theta = \frac{e^\varphi + e^\omega}{2}, \quad \eta = \frac{e^\varphi - e^\omega}{2},$$

$$\varphi = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{και} \quad \omega = 2\ln(x + y + z),$$

όπου $\ln A = \ln_e A = \langle \text{λογάρ. του } A \text{ με βάση το } e \rangle = \langle \text{Νεπέριος λογάρ. του } A \rangle$.

Να εκφραστεί η u σαν απ' ευθείας συνάρτηση των x, y, z .

Λύση. Επειδή $\theta^3 + \eta^3 = (\theta + \eta)(\theta^2 - \theta\eta + \eta^2) = (\theta + \eta)[(\theta + \eta)^2 - 3\theta\eta]$ και

$$\theta + \eta = e^\varphi, \quad \theta\eta = \left(\frac{e^\varphi + e^\omega}{2}\right)\left(\frac{e^\varphi - e^\omega}{2}\right) = \frac{1}{4}[(e^\varphi)^2 - (e^\omega)^2] = \frac{1}{4}(e^{2\varphi} - e^{2\omega}),$$

έχουμε

$$\begin{aligned} u &= (\theta + \eta)^2 - \theta^3 - \eta^3 = (\theta + \eta)^2 - (\theta^3 + \eta^3) = \\ &= (\theta + \eta)^2 - (\theta + \eta)[(\theta + \eta)^2 - 3\theta\eta] = e^{2\varphi} - e^\varphi \left[e^{2\varphi} - \frac{3}{4}(e^{2\varphi} - e^{2\omega}) \right] = \\ &= e^{2\varphi} - e^\varphi \left(\frac{1}{4}e^{2\varphi} + \frac{3}{4}e^{2\omega} \right) = e^{2\varphi} - \frac{1}{4}e^{3\varphi} - \frac{3}{4}e^\varphi e^{2\omega}. \end{aligned}$$

Ακόμη, επειδή $e^{\ln A} = A, \forall A > 0$, έχουμε

$$e^\varphi = e^{\ln(x^2 + y^2 + z^2)} = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$e^{2\varphi} = e^{2\ln(x^2 + y^2 + z^2)} = e^{\ln[(x^2 + y^2 + z^2)^2]} = (x^2 + y^2 + z^2)^2, \quad e^{3\varphi} = (x^2 + y^2 + z^2)^3$$

$$e^{2\omega} = e^{2 \cdot 2 \cdot \ln(x+y+z)} = e^{\ln[(x+y+z)^4]} = (x + y + z)^4$$

και άρα

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)^3 - \frac{3}{4} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x + y + z)^4.$$

Άσκηση 7

Να γραφεί η συνάρτηση

$$\varphi = \left(\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} \right)^2 + x^2 + y^2$$

σαν σύνθετη συνάρτηση των x, y με ένα (μόνο) ζεύγος ενδιάμεσων μεταβλητών.

Λύση. Θέτοντας $u = x^2 + y^2$ και $v = xy$ έχουμε

$$\varphi = \left(\frac{u+v}{u-v} \right)^2 + u \quad \text{ή} \quad \varphi = \sigma(u, v), \quad \text{όπου} \quad \sigma(u, v) = \left(\frac{u+v}{u-v} \right)^2 + u.$$

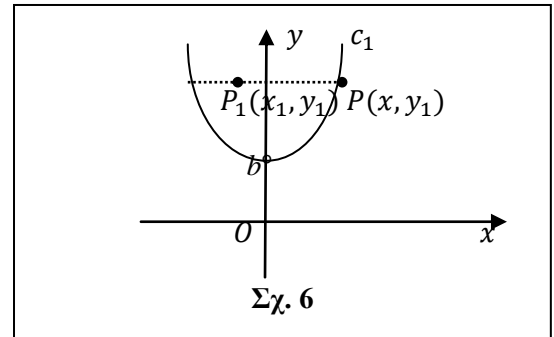
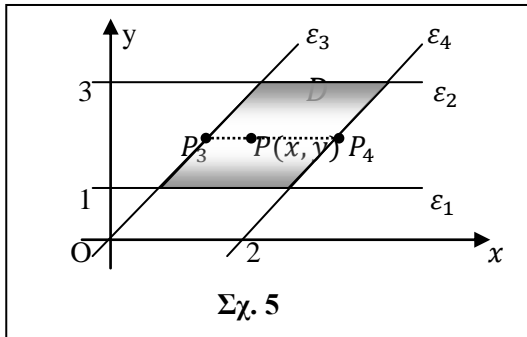
Από τις ισότητες $\varphi = \sigma(u, v)$ και $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$,

η φ εκφράζεται σαν σύνθετη συνάρτηση των x, y με ενδιάμεσες μεταβλητές τις u, v .

Άσκηση 8

Η περιοχή D του επιπέδου Oxy , σχήματος παραλληλογράμμου, περιορίζεται από τις ευθείες $\varepsilon_1: y = 1$, $\varepsilon_2: y = 3$, $\varepsilon_3: y = x$, $\varepsilon_4: y = x - 2$ και σ' αυτήν δεν περιλαμβάνονται τα συνοριακά της σημεία. Να γραφεί η περιοχή D σαν σύνολο σημείων με χρήση ανισοτήτων.

Λύση. Η περιοχή D είναι το σύνολο των εσωτερικών σημείων του παραλληλογράμμου του Σχ. (5). Επειδή το τυχαίο σημείο $P(x, y)$ της περιοχής D βρίσκεται μεταξύ των ευθειών



$\varepsilon_1: y = 1$ και $\varepsilon_2: y = 3$, η τεταγμένη y του P επαληθεύει τη διπλή ανισότητα $1 < y < 3$. Ακόμη, επειδή το σημείο $P(x, y)$ βρίσκεται και μεταξύ των ευθειών $\varepsilon_3: y = x$ και $\varepsilon_4: y = x - 2$, η τετμημένη x του P μεταβάλλεται από την τετμημένη $x_3 = y$ του P_3 ως την τετμημένη $x_4 = y + 2$ του P_4 . Με άλλα λόγια, στην περιοχή D το y μεταβάλλεται από 1 έως 3 και για μια τιμή του y το x μεταβάλλεται από $x = y$ έως $x = y + 2$. Επομένως είναι

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < y < 3, y < x < y + 2\}.$$

Άσκηση 9

Όπως είναι φανερό, κάθε παραβολή χωρίζει το επίπεδο Oxy το σε δύο τμήματα. Το τμήμα προς το οποίο η παραβολή στρέφει τα κοίλα της λέγεται εσωτερικό της παραβολής και το τμήμα προς το οποίο η παραβολή στρέφει τα κυρτά της λέγεται εξωτερικό της παραβολής.

Να δειχτεί ότι για κάθε σημείο $M_1(x_1, y_1)$ εσωτερικό της παραβολής

$$c_1: y = ax^2 + b \quad (\text{αντ. } c_2: x = ay^2 + b) \quad (1)$$

ισχύει

$$(i) \quad y_1 - ax_1^2 - b > 0 \quad (\text{αντ. } x_1 - ay_1^2 - b > 0), \text{ αν είναι } a > 0$$

$$(ii) \quad y_1 - ax_1^2 - b < 0 \quad (\text{αντ. } x_1 - ay_1^2 - b < 0), \text{ αν είναι } a < 0,$$

ενώ οι παραπάνω ανισότητες αντιστρέφονται όταν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι εξωτερικό της παραβολής (1).

Λύση. (i) Θεωρούμε την παραβολή c_1 και υποθέτουμε ότι είναι $a > 0$. Επειδή από την εξίσωσή της έχουμε $y' = 2ax$, $y'' = 2a > 0$, η παραβολή c_1 στρέφει τα κοίλα προς τα θετικά y . Το γράφημά της δίνεται στο Σχ. 6, όπου θεωρήθηκε ότι είναι $b > 0$. Για το τυχαίο εσωτερικό σημείο $P_1(x_1, y_1)$ της παραβολής έχουμε $|x_1| < |x|$, όπου x είναι η τετμημένη του σημείου $P(x, y_1)$ της παραβολής. Αλλά,

$$\begin{aligned} |x_1| < |x| &\Rightarrow x_1^2 < x^2 \Rightarrow ax_1^2 < ax^2 \Rightarrow -ax_1^2 > -ax^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_1 - ax_1^2 - b > y_1 - ax^2 - b \end{aligned} \quad (2)$$

και επειδή το $P(x, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής έχουμε

$$y_1 = ax^2 + b \quad \text{ή} \quad y_1 - ax^2 - b = 0. \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι είναι $y_1 - ax_1^2 - b > 0$, ότι θέλαμε να δείξουμε.

Αν είναι $a < 0$, τότε

$$\begin{aligned} |x_1| < |x| &\Rightarrow x_1^2 < x^2 \Rightarrow ax_1^2 > ax^2 \Rightarrow -ax_1^2 < -ax^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_1 - ax_1^2 - b < y_1 - ax^2 - b \stackrel{(y_1 - ax^2 - b = 0)}{\Rightarrow} y_1 - ax_1^2 - b < 0. \end{aligned}$$

Η απόδειξη για την παραβολή c_2 είναι ανάλογη και επαφίεται στον αναγνώστη.

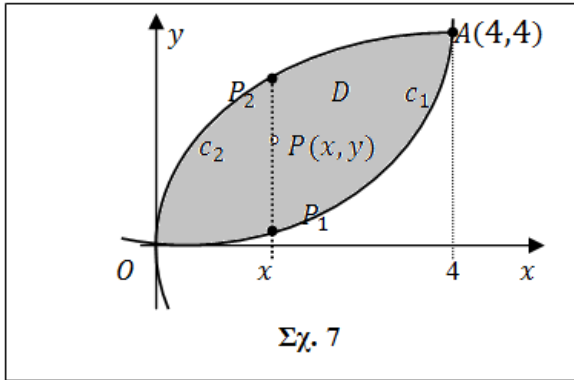
Άσκηση 10

Η περιοχή D του επιπέδου Oxy περιορίζεται από τις παραβολές

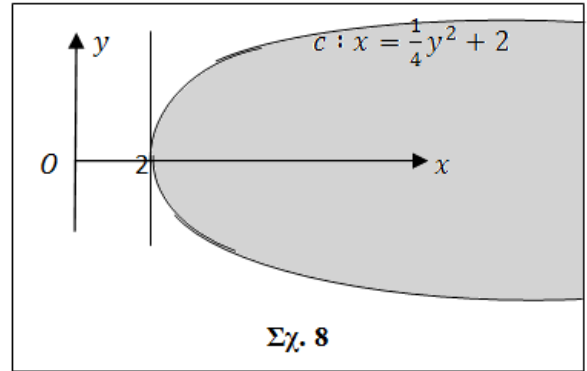
$$c_1 : y = \frac{1}{4}x^2 \quad \text{και} \quad c_2 : x = \frac{1}{4}y^2$$

και σ' αυτήν περιλαμβάνονται τα συνοριακά της σημεία τα οποία είναι σημεία της παραβολής c_1 , αλλά δεν περιλαμβάνονται εκείνα τα οποία είναι σημεία της παραβολής c_2 . Να γραφεί η περιοχή D σαν σύνολο σημείων με χρήση ανισοτήτων.

Λύση. Το σύστημα των εξισώσεων $\left\{ y = \frac{1}{4}x^2, x = \frac{1}{4}y^2 \right\}$ των δυο παραβολών έχει δυο πραγματικές λύσεις $(x_1 = 0, y_1 = 0)$ και $(x_1 = 4, y_1 = 4)$ και άρα οι δυο παραβολές έχουν δυο κοινά σημεία $O(0,0)$ και $A(4,4)$. Η γραφική παράσταση των παραβολών δίνεται στο Σχ. 7 και η περιοχή D είναι το τμήμα του επιπέδου το οποίο ανήκει στο εσωτερικό και των δύο παραβολών. Η τετμημένη x , του τυχαίου σημείου $P(x, y)$ της περιοχής D , μετα-



Σχ. 7



Σχ. 8

βάλλεται από $x = 0$ (σημείο O) έως $x = 4$ (σημείο A) και για μια τιμή του x , μεταξύ των 0 και 4 , η τεταγμένη y του P μεταβάλλεται από την τεταγμένη $y_1 = \frac{1}{4}x^2$ του σημείου $P_1(x, y_1)$ της παραβολής $c_1 : y = \frac{1}{4}x^2$ ως την τεταγμένη $y_2 = 2\sqrt{x}$ του σημείου $P_2(x, y_2)$ της παραβολής $c_2 : x = \frac{1}{4}y^2$. Τέλος, σημειώνουμε ότι τα σημεία του τόξου $\widehat{OP_1A}$ της παραβολής c_1 περιλαμβάνονται στην περιοχή, ενώ τα σημεία του τόξου $\widehat{OP_2A}$ της παραβολής c_2 δεν περιλαμβάνονται στην περιοχή. Επομένως, είναι

$$D = \left\{ (x, y) / 0 < x < y, \frac{1}{4}x^2 \leq y < 2\sqrt{x} \right\}.$$

Άσκηση 11

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8).$$

Λύση.

Επειδή ο λογάριθμος ενός αριθμού ω είναι πραγματικός αριθμός μόνο όταν αυτός είναι θετικός, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι το σύνολο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - 4x + 8 > 0\}$$

των σημείων του επιπέδου Oxy . Ακόμη, εξ αιτίας του ότι

$$y^2 - 4x + 8 > 0 \Leftrightarrow 4x < y^2 + 8 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}y^2 + 2 \Leftrightarrow x - \frac{1}{4}y^2 - 2 < 0,$$

είναι

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - \frac{1}{4}y^2 - 2 < 0 \right\}.$$

Τέλος, επειδή (Βλέπε Άσκ. 9) οι συντεταγμένες ενός σημείου $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ επαληθεύουν την ανισότητα $x - \frac{1}{4}y^2 - 2 < 0$ αν, και μόνο αν, το P είναι εσωτερικό σημείο της καμπύ-

λης (παραβολής) $c : x = \frac{1}{4}y^2 + 2$, το σύνολο D ταυτίζεται με το εσωτερικό της παραβολής c (Βλέπε Σχ. 8).

Άσκηση 12

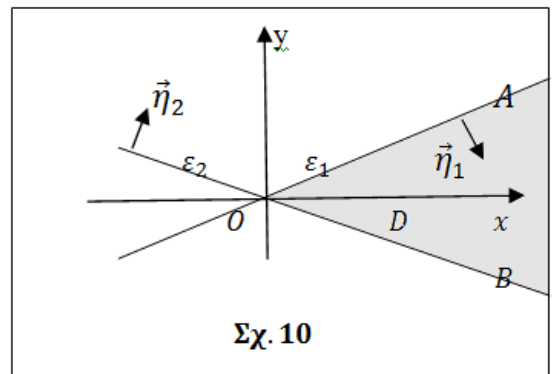
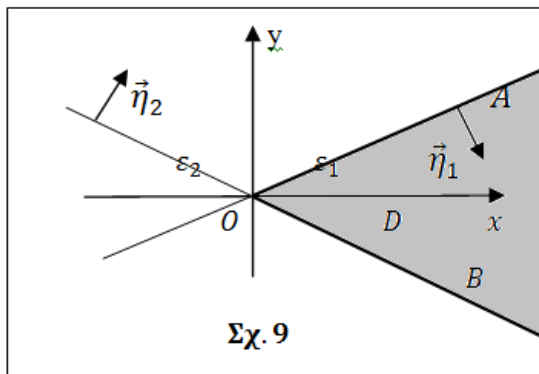
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$(α) \quad \varphi(x, y) = \sqrt{x - 2y} + \sqrt{x + 2y} \quad (β) \quad \sigma(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{\sqrt{x+2y}}.$$

Λύση. (α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι το

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y \geq 0 \text{ και } x + 2y \geq 0\},$$

δηλ. είναι το κοινό μέρος του θετικού ημιεπιπέδου της ευθείας $\varepsilon_1 : x - 2y = 0$ και του θετικού ημιεπιπέδου της ευθείας $\varepsilon_2 : x + 2y = 0$, στο οποίο περιλαμβάνονται τα σημεία των δύο ευθειών, δηλ. το σύνολο $[(\varepsilon_1)^+ \cup \varepsilon_1] \cap [(\varepsilon_2)^+ \cup \varepsilon_2]$ (Σχ. 9). Τα κάθετα πάνω στις



ε_1 και ε_2 διανύσματα είναι, αντίστοιχα, τα $\vec{\eta}_1(1, -2)$ και $\vec{\eta}_2(1, 2)$ (Σχ. 9). Επομένως είναι το εσωτερικό της κοίλης γωνίας \widehat{BOA} και τα σημεία των δύο ημιευθειών OA και OB .

(β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι το

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y > 0 \text{ και } x + 2y > 0\},$$

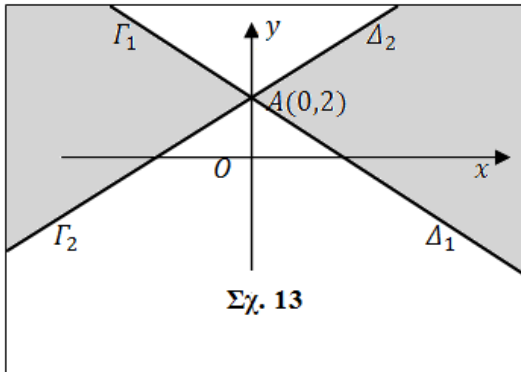
δηλ. είναι το κοινό μέρος του θετικού ημιεπιπέδου της ευθείας $\varepsilon_1 : x - 2y = 0$ και του θετικού ημιεπιπέδου της ευθείας $\varepsilon_2 : x + 2y = 0$, στο οποίο δεν περιλαμβάνονται τα σημεία των δύο ημιευθειών OA και OB , δηλ. το σύνολο $[(\varepsilon_1)^+] \cap [(\varepsilon_2)^+]$. Επομένως είναι το εσωτερικό της κοίλης γωνίας \widehat{BOA} (Βλέπε Σχ. 10).

Άσκηση 13

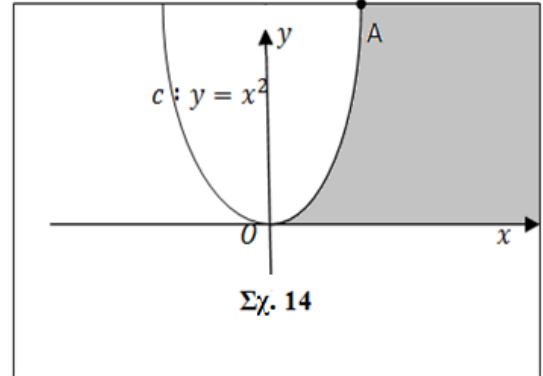
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \text{τοξημ}\left(\frac{y-2}{x}\right).$$

Το κοινό μέρος $D_1 \cap D_2$ των δύο περιοχών D_1 και D_2 είναι οι δύο κατακορυφήν γωνίες $\widehat{\Delta_1 A \Delta_2}$ και $\widehat{\Gamma_1 A \Gamma_2}$ στις οποίες περιέχονται και οι πλευρές τους $A\Delta_2, A\Delta_1, A\Gamma_1, A\Gamma_2$ εκτός του σημείου A .



Σχ. 13



Σχ. 14

Άσκηση 14

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

Λύση. Επειδή $x - \sqrt{y} \geq 0$ και $y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{y}$ και $y \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq y, x \geq 0, y \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y - x^2 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0,$

το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ

$$D = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - x^2 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0\}$$

είναι (Βλέπε Άσκηση 9) το εξωτερικό μέρος της παραβολής $c : y = x^2$ το οποίο βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο. Όλα τα συνοριακά σημεία της περιοχής D , δηλ. τα σημεία του τόξου \widehat{OA} της παραβολής και τα σημεία του θετικού ημιάξονα Ox , περιλαμβάνονται σ' αυτήν. Η γραφική παράσταση της περιοχής D δίνεται στο Σχ. 14.

Άσκηση 15

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}.$$

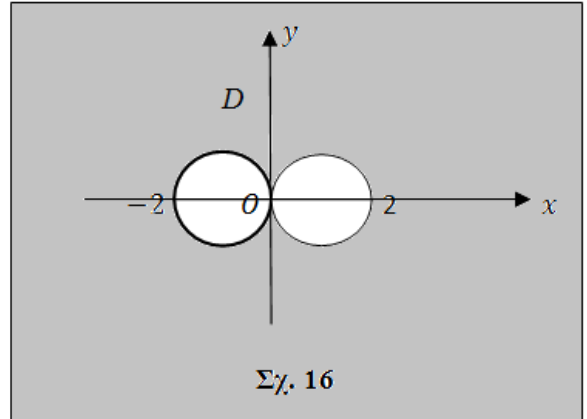
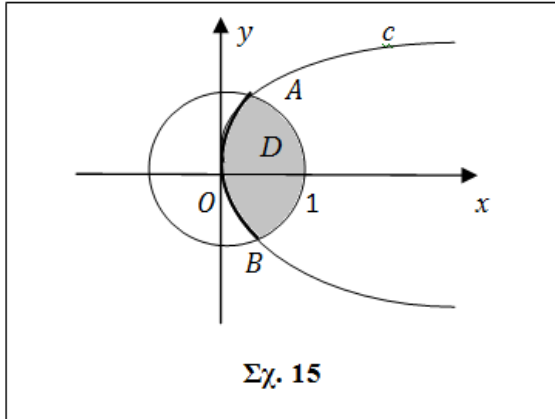
Λύση. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι το σύνολο

$$D = \{P(x, y) \in \mathbb{R} / 4x - y^2 \geq 0 \text{ και } 1 - x^2 - y^2 > 0\}.$$

Επειδή $4x - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{4}y^2 \geq 0$, τα σημεία του D βρίσκονται επί της παραβολής $c : x = \frac{1}{4}y^2$ και (Άσκηση 9) στο εσωτερικό αυτής και επειδή

$$1 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow 1 > x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1,$$

τα σημεία του D βρίσκονται και στο εσωτερικό του κύκλου $\kappa : x^2 + y^2 = 1$. Στο Σχ. 15



είναι το σκιασμένο τμήμα του επιπέδου, στο οποίο περιλαμβάνεται το τόξο \widehat{AOB} της παραβολής c αλλά δεν περιλαμβάνεται το τόξο \widehat{AB} του κύκλου κ .

Άσκηση 16

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}.$$

Λύση. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 + y^2 - 1}{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 1} = \frac{(x + 1)^2 + y^2 - 1}{(x - 1)^2 + y^2 - 1}$$

και ότι είναι $\frac{(x+1)^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2-1} \geq 0$ στις παρακάτω δύο περιπτώσεις (α) και (β) :

(α) $(x + 1)^2 + y^2 - 1 \geq 0$ και $(x - 1)^2 + y^2 - 1 > 0$

(β) $(x + 1)^2 + y^2 - 1 \leq 0$ και $(x - 1)^2 + y^2 - 1 < 0$.

Στην περίπτωση (α) τα σημεία $P(x, y)$ του επιπέδου βρίσκονται επί της περιφέρειας του κύκλου

$$\kappa_1 : (x + 1)^2 + y^2 = 1$$

και στο εξωτερικό αυτού και στο εξωτερικό του κύκλου

$$\kappa_2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1 ,$$

ενώ στην περίπτωση (β) βρίσκονται επί της περιφέρειας του κύκλου κ_1 και στο εσωτερικό αυτού και στο εσωτερικό του κύκλου κ_2 . Επειδή κανένα εσωτερικό σημείο του κύκλου κ_2 δεν ανήκει στον κυκλικό δίσκο $\Delta_1 : (x + 1)^2 + y^2 \leq 1$, στην περίπτωση (β) δεν υπάρχουν σημεία του επιπέδου που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της φ . Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι το κοινό εξωτερικό μέρος των δύο κύκλων στο οποίο περιλαμβάνονται τα σημεία της περιφέρειας του κύκλου κ_1 (το σκιασμένο τμήμα στο Σχ. 16, δηλ. είναι το σύνολο

$$D = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x + 1)^2 + y^2 \geq 1, (x - 1)^2 + y^2 > 1\} .$$

Άσκηση 17

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \sqrt{\ln\left(\frac{a^2}{x^2+y^2}\right)} + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} .$$

Λύση. Επειδή $\ln\left(\frac{a^2}{x^2+y^2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2+y^2} \geq 1 \Leftrightarrow a^2 \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq a^2$

και $x^2 + y^2 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq a^2$,

το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι η τομή των δύο υποσυνόλων

$$\{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\} \quad \text{και} \quad \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq a^2\} .$$

Η τομή των δύο αυτών υποσυνόλων είναι το σύνολο $\{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = a^2\}$, δηλ. ο κύκλος $\kappa : x^2 + y^2 = a^2$ (εννοείται η περιφέρεια του κύκλου κ) και άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι η περιφέρεια του κύκλου κ .

Άσκηση 18

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}, \quad |a| > |b| .$$

Λύση. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ αποτελείται από όλα τα σημεία $P(x, y)$ του επιπέδου \mathbb{R}^2 για τα οποία έχουμε $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$ και $x^2 + y^2 - b^2 > 0$.

Επειδή $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq a^2$,

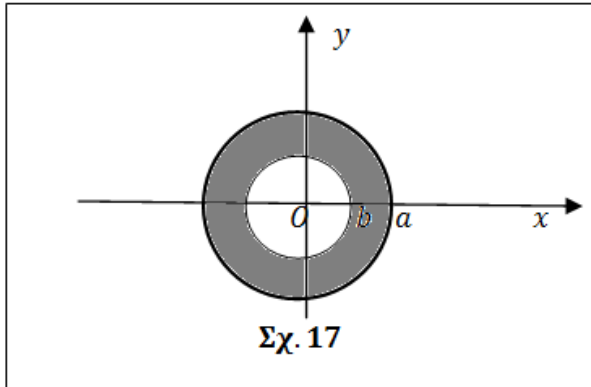
τα σημεία του επιπέδου \mathbb{R}^2 για τα οποία έχουμε $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $\kappa_1 : x^2 + y^2 = a^2$ και πάνω στην περιφέρειά του και επειδή

$$x^2 + y^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > b^2,$$

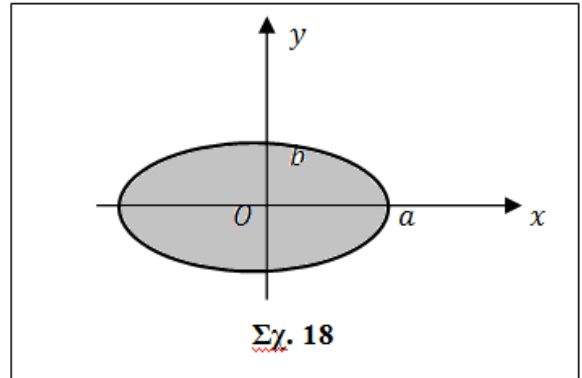
τα σημεία του επιπέδου \mathbb{R}^2 για τα οποία έχουμε $x^2 + y^2 - b^2 > 0$ είναι τα εξωτερικά σημεία του κύκλου $\kappa_2 : x^2 + y^2 = b^2$, πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι ο δακτύλιος

$$\{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / b^2 < x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

μεταξύ των δύο κύκλων, στον οποίο περιέχονται μόνο τα σημεία του μεγάλου κύκλου (Βλέπε Σχ. 17).



Σχ. 17



Σχ. 18

Άσκηση 19

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad 0 < b < a.$$

Λύση. Επειδή $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι το σύνολο

$$D = \left\{ P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Ακόμη, η καμπύλη $c : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ είναι έλλειψη η οποία έχει άξονες συμμετρίας τους άξονες συντεταγμένων και για ένα σημείο $P(x, y)$ του επιπέδου έχουμε $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ αν, και μόνο αν, αυτό βρίσκεται στο εσωτερικό της έλλειψης (να δειχτεί !) και άρα το σύνολο D αποτελείται από όλα τα σημεία της έλλειψης c και τα εσωτερικά της σημεία, δηλ. είναι ο ελλειπτικός δίσκος της c (Βλέπε Σχ. 18).

Άσκηση 20

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$$

Λύση. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος, του οποίου ζητούμε το όριο, επί την συζυγή παράσταση του παρονομαστή, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} &= \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{2(x^2+y^2) \cdot (\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1) \cdot (\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \\ &= \frac{2(x^2+y^2) \cdot (\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1})^2 - 1^2} = \frac{2(x^2+y^2) \cdot (\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} = \\ &= \frac{2(x^2+y^2) \cdot (\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Επειδή στο συμβολισμό $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ εννοούμε ότι είναι $(x, y) \neq (0, 0)$ και επειδή $(x, y) \neq (0, 0) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 0$, στο τελευταίο κλάσμα επιτρέπεται η απλοποίηση με το $x^2 + y^2$, όταν παίρνουμε το όριο του κλάσματος, καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{Έτσι, έχουμε} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(x^2+y^2) \cdot (\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2} \stackrel{(x^2+y^2 \neq 0)}{\cong} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2 \left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1 \right) = 2(\sqrt{0+0+1}+1) = 2(1+1) = 4. \end{aligned}$$

Άσκηση 21

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$.

Λύση. Παρατηρούμε αρχικά ότι είναι $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 (y^2 + x^2)}{x^2 + y^2} = x^2$, θεωρούμε θετικό ε , παίρνουμε σαν θετικό $\delta(\varepsilon)$ τον $\sqrt{\varepsilon}$ και ονομάζουμε P και O τα σημεία του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) και $(0, 0)$. Τότε επειδή είναι

$$x^2 \leq x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = \|PO\|^2, \forall x, y,$$

από τη σχέση $\|PO\| < \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ προκύπτει ότι είναι και $\|PO\|^2 < (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$. Επομένως

$$0 < \|PO\| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 \leq \|PO\|^2 < \varepsilon,$$

δηλ. για κάθε θετικό ε υπάρχει θετικός $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ τέτοιος ώστε

$$0 < \|PO\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3.1, είναι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Άσκηση 22

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$.

Λύση. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος επί την συζυγή παράσταση του αριθμητή, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} &= \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1} = \frac{(\sqrt{x^2 y^2 + 1})^2 - 1^2}{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1)} = \\ &= \frac{x^2 y^2 + 1 - 1}{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1)} = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Παρατηρούμε στη συνέχεια ότι τα όρια

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1}$$

των δύο συναρτήσεων στο β' μέλος της ισότητας (1) υπάρχουν και είναι (Άσκηση 21)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.10 (2), είναι

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1} = \\ &= \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right] \cdot \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} + 1} \right] = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

και άρα έχουμε $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} = 0$.

Άσκηση 23

Να δειχτεί, με μετασχηματισμό του κλάσματος σε πολικές συντεταγμένες, ότι είναι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Λύση. Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) ενός σημείου P του επιπέδου εκφράζονται σαν συναρτήσεις των πολικών του συντεταγμένων (r, θ) από τις ισότητες

$$x = r \sigma\upsilon\nu\theta, \quad y = r \eta\mu\theta, \quad (1)$$

όπου $\theta \in (0, 2\pi]$. (Βλέπε [] Σελ. 14). Από τις ισότητες (1) παίρνουμε

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{r}, \quad \eta\mu\theta = \frac{y}{r}. \quad (2)$$

Όπως είναι φανερό, $(x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow r \rightarrow 0$. Μετασχηματίζοντας τη συνάρτηση, της οποίας ζητούμε το όριο, σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 \sigma\upsilon\nu^3\theta + r^3 \eta\mu^3\theta}{r^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta + r^2 \eta\mu^2\theta} = \frac{r^3 (\sigma\upsilon\nu^3\theta + \eta\mu^3\theta)}{r^2 (\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta)} = \frac{r^3 (\sigma\upsilon\nu^3\theta + \eta\mu^3\theta)}{r^2 \cdot 1} = r (\sigma\upsilon\nu^3\theta + \eta\mu^3\theta)$$

και άρα

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} [r (\sigma\upsilon\nu^3\theta + \eta\mu^3\theta)]. \quad (3)$$

Ακόμη, επειδή ισχύει

$$-2 \leq \sigma\upsilon\nu^3\theta + \eta\mu^3\theta \leq 2, \quad \forall \theta \in (0, 2\pi],$$

έχουμε

$$-2r \leq r (\sigma\upsilon\nu^3\theta + \eta\mu^3\theta) \leq 2r, \quad \forall r > 0, \theta \in (0, 2\pi].$$

Τέλος, επειδή υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{r \rightarrow 0} (-2r) = -2 \left[\lim_{r \rightarrow 0} r \right] = (-2) \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{r \rightarrow 0} (2r) = 2 \left[\lim_{r \rightarrow 0} r \right] = 2 \cdot 0 = 0$$

και είναι ίσα μεταξύ τους, υπάρχει και το όριο (3) και είναι ίσο μ' αυτά (Βλέπε [] Σελ. 52), δηλ. είναι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} [r (\sigma\upsilon\nu^3\theta + \eta\mu^3\theta)] = 0.$$

Άσκηση 24

Να υπολογιστεί, με χρήση του συμπεράσματος της Άσκησης 23, το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\eta\mu(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}.$$

Λύση. Επειδή $\frac{\eta\mu(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = \frac{\eta\mu(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} \cdot \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ και υπάρχουν τα δύο όρια

$$\underbrace{\lim}_{(x,y) \rightarrow (0,0)}^4 \frac{\eta\mu(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = 1 \text{ και } \underbrace{\lim}_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \stackrel{\text{(Ασκ.23)}}{=} 0,$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.10 έχουμε

$$\begin{aligned} \underbrace{\lim}_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\eta\mu(x^3+y^3)}{x^2+y^2} &= \underbrace{\lim}_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{\eta\mu(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right] = \\ &= \underbrace{\lim}_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{\eta\mu(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \right] \cdot \underbrace{\lim}_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right] = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 25

(α) Ναδειχτεί ότι $\underbrace{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ell n(1+x)}{x} = 1.$

(β) Να υπολογιστεί το όριο $\underbrace{\lim}_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$

Λύση. (α) Όταν $x \rightarrow 0^+$, τότε το κλάσμα $\frac{\ell n(1+x)}{x}$ τείνει στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\ell n(1+x)}{x} = \frac{\ell n 1}{0} = \frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του **L'Hospital** έχουμε

$$\underbrace{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ell n(1+x)}{x} = \underbrace{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ell n(1+x)]'}{x'} = \underbrace{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \underbrace{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1} = 1.$$

(β) Θέτουμε $A = (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ και λογαριθμίζοντας τα μέλη της ισότητας αυτής έχουμε

$$\ell n A = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \ell n(1+x^2y^2). \quad (1)$$

Επειδή, σύμφωνα με την (α) είναι $\underbrace{\lim}_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ell n(1+x^2y^2)}{x^2y^2} = 1$, γράφουμε

$$\ell n A = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{\ell n(1+x^2y^2)}{x^2y^2},$$

γράφουμε δηλ. τον $\ell n A$ σαν γινόμενο των συναρτήσεων $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ και $\frac{\ell n(1+x^2y^2)}{x^2y^2}$. Παρατηρούμε ακόμη ότι σύμφωνα με την Άσκηση 21, υπάρχει και το $\underbrace{\lim}_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ και είναι ίσο με 0 και άρα είναι

⁴ Είναι $\underbrace{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ (βλέπε [] Σελ. 59).

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln A &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\ln(1 + x^2 y^2)}{x^2 y^2} \right] = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right] \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{\ln(1 + x^2 y^2)}{x^2 y^2} \right] = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Τέλος, $A = e^{\ln A} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\ln A} = e^{\left[\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln A \right]} = e^0 = 1.$

Άσκηση 26

(α) Ναδειχτεί ότι η συνάρτηση $\varphi(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ μπορεί να τείνει προς οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -1$, όταν $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

(β) Να βρεθούν δύο μονοπάτια c_1, c_2 , τα οποία να περνούν από το σημείο $O(0, 0)$ και τέτοια ώστε να είναι

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_1}} \varphi(x, y) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_2}} \varphi(x, y) = 3.$$

Λύση. Το όριο της συνάρτησης φ κατά μήκος της ευθείας $\varepsilon : y = \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), η οποία περνά από το σημείο $(0, 0)$, είναι το

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=\lambda x}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\lambda x}{x+\lambda x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-\lambda)}{x(1+\lambda)} \stackrel{(x \neq 0)}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}.$$

Επειδή για τυχαίο πραγματικό $\alpha \neq -1$,

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \alpha \Leftrightarrow 1 - \lambda = \alpha(1 + \lambda) \Leftrightarrow 1 - \alpha = \lambda + \lambda\alpha \Leftrightarrow \lambda = \frac{1-\alpha}{1+\alpha},$$

το κλάσμα $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, άρα και το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$, παίρνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, εκτός της τιμής -1 .

(β) Για τον πραγματικό αριθμό $\alpha = 1$ έχουμε $\lambda = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0$ και για τον $\alpha = 3$ έχουμε

$$\lambda = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως τα ζητούμενα μονοπάτια είναι οι ευθείες $c_1 : y = 0$ και $c_2 : y = -\frac{1}{2}x$.

Άσκηση 27

(α) Να δειχτεί ότι $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\omega}{\omega^2} \right) = +\infty$.

(β) Να δειχτεί ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[e^{\frac{1}{x^2+y^2}} (x^4 + y^4) \right] = +\infty$.

Λύση. (α) Επειδή όταν $\omega \rightarrow +\infty$ τότε το κλάσμα $\frac{e^\omega}{\omega^2}$ τείνει στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$, εφαρμόζοντας τον κανόνα του **L'Hospital** έχουμε

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\omega}{\omega^2} \right) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{(e^\omega)'}{(\omega^2)'} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\omega}{2\omega} \right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\omega}{\omega} \right).$$

Με νέα εφαρμογή του ίδιου κανόνα έχουμε

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\omega}{\omega} \right) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{(e^\omega)'}{(\omega)'} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\omega}{1} \right) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} e^\omega = +\infty$$

και άρα $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\omega}{\omega^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\omega}{\omega} \right) = \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = +\infty$.

(β) Με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) έχουμε

$$A = e^{\frac{1}{x^2+y^2}} (x^4 + y^4) = e^{\frac{1}{r^2}} [(r \cos \theta)^4 + (r \sin \theta)^4] = e^{\frac{1}{r^2}} \cdot r^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$$

και επειδή $(x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow r^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow r \rightarrow 0$ έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} A = \lim_{r \rightarrow 0} A = \lim_{r \rightarrow 0} \left[e^{\frac{1}{r^2}} \cdot r^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \right].$$

Παρατηρούμε τώρα ότι θέτοντας $r^2 = \frac{1}{\omega}$ έχουμε,

$$r \rightarrow 0 \Leftrightarrow r^2 \left(= \frac{1}{\omega} \right) \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \omega \rightarrow +\infty$$

και σύμφωνα με την (α) είναι

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(e^{\frac{1}{r^2}} \cdot r^4 \right) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\omega}{\omega^2} \right) = +\infty. \quad (1)$$

Τέλος, επειδή για κάθε γωνία θ , με $0 \leq \theta < 2\pi$, είναι

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta = 1^2 - 2 \cdot \left[\frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2(2\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\eta\mu^2(2\theta) + \sigma\upsilon\nu^2(2\theta)] - \frac{1}{2}\eta\mu^2(2\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu^2(2\theta)] \geq \frac{1}{2},$$

άρα είναι και $e^{\frac{1}{r^2}} \cdot r^4(\sigma\upsilon\nu^4\theta + \eta\mu^4\theta) \geq e^{\frac{1}{r^2}} \cdot r^4 \cdot \frac{1}{2}$ και σαν συνέπεια

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} A &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[e^{\frac{1}{r^2}} \cdot r^4(\sigma\upsilon\nu^4\theta + \eta\mu^4\theta) \right] \geq \lim_{r \rightarrow 0} \left(e^{\frac{1}{r^2}} \cdot r^4 \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \left(e^{\frac{1}{r^2}} \cdot r^4 \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = +\infty, \end{aligned}$$

δηλ. είναι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} A = +\infty.$$

Άσκηση 28

Να δειχτεί ότι η συνάρτηση

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x \eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) + y \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & \text{αν } x \neq 0 \text{ και } y \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } y = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $O(0,0)$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι είναι $\varphi(0,0) = 0$ και ότι

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y) - \varphi(0,0)| &= |\varphi(x, y) - 0| = |\varphi(x, y)| = \left| x \eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) + y \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \\ &\leq \left| x \eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) \right| + \left| y \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \left| \eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) \right| + |y| \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \right|. \end{aligned}$$

Ακόμη, παίρνοντας υπόψη μας ότι είναι $\left| \eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) \right| \leq 1, \forall y \neq 0, \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1, \forall x \neq 0$ και το Πόρισμα 1.1.2, έχουμε

$$|x| \left| \eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) \right| + |y| \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| + |y| \leq 2\|MO\|, \forall x \neq 0 \text{ και } \forall y \neq 0$$

δηλ. έχουμε

$$|\varphi(x, y) - \varphi(0,0)| \leq 2\|MO\|, \forall y \neq 0, x \neq 0, \quad (1)$$

όπου $M(x, y)$ και $O(0,0)$. Η ανισότητα (1) ισχύει και για $x = 0$ ή $y = 0$, αφού τότε έχουμε $0 = 2 \cdot 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι μας δίνεται θετικός ε . Εκλέγουμε σαν θετικό $\delta = \delta(\varepsilon)$ τον $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ και τότε

$$0 < \|MO\| < \delta \Rightarrow |\varphi(x, y) - \varphi(0,0)| \leq 2\|MO\| = 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall M(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Άρα είναι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x, y) = \varphi(0,0)$ και η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο σημείο $O(0,0)$. (Για την ακρίβεια, η συνάρτηση φ είναι συνεχής σε όλο το επίπεδο).

Άσκηση 29

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x, y) = \frac{x+y^2}{x^2+y}$.

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

(β) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα διπλά της όρια στο σημείο $O(0,0)$.

(γ) Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης φ στο σημείο $O(0,0)$.

Λύση.

(α) Το πεδίο ορισμού της είναι το

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \neq -y\}.$$

Επειδή το σύνολο των σημείων του επιπέδου $c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = -y\}$ είναι παραβολή, το S περιέχει όλα τα σημεία του επιπέδου εκτός από εκείνα της παραβολής c .

(β) Έχουμε $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \varphi(x, y) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{x+y^2}{x^2+y} = \frac{\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} (x+y^2)}{\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} (x^2+y)} = \left(\frac{x+0^2}{x^2+0}\right)_{(x \neq 0)} = \left(\frac{x}{x^2}\right)_{(x \neq 0)} = \frac{1}{x}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \varphi(x, y) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right).$$

Αλλά επειδή είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)$ και σαν συνέπεια δεν υπάρχει και το διπλό yx - όριο της συνάρτησης φ στο σημείο $O(0,0)$.

Για το διπλό xy - όριο της συνάρτησης φ έχουμε

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \varphi(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \frac{x+y^2}{x^2+y} = \frac{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} (x+y^2)}{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} (x^2+y)} = \left(\frac{0+y^2}{0^2+y}\right)_{(y \neq 0)} = \left(\frac{y^2}{y}\right)_{(y \neq 0)} = y$$

και

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \varphi(x, y) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0 .$$

Επομένως το διπλό xy – όριο της συνάρτησης φ υπάρχει και είναι ίσο με 0 (μηδέν).

(γ) Επειδή το όριο της συνάρτησης φ κατά μήκος του μονοπατιού $\varepsilon_1 : y = x$ (ευθεία) , το οποίο περνά από το σημείο $O(0,0)$, είναι το

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=x)}} \varphi(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=x)}} \frac{x+y^2}{x^2+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{x^2+x} \stackrel{(x \neq 0)}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 ,$$

ενώ το όριό της κατά μήκος του μονοπατιού $\varepsilon_2 : y = 2x$ (ευθεία) , το οποίο επίσης περνά από το σημείο $O(0,0)$, είναι το

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=2x)}} \varphi(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=2x)}} \frac{x+y^2}{x^2+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4x^2}{x^2+2x} \stackrel{(x \neq 0)}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+4x}{2+x} = \frac{1+4 \cdot 0}{2+0} = \frac{1}{2} \neq 1 ,$$

σύμφωνα με το Πόρ. 1.3.8, δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης φ , καθώς $(x, y) \rightarrow (0,0)$.

Άσκηση 30

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα διπλά όρια και το όριο της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

στο σημείο $O(0,0)$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \varphi(x, y) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = \frac{\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} (x^2 y^2)}{\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} [x^2 y^2 + (x - y)^2]} = \\ &= \frac{x^2 \cdot 0}{x^2 \cdot 0 + (x - 0)^2} = \frac{0}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

και

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \varphi(x, y) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 .$$

$$\text{Ακόμη, } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \varphi(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \frac{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} (x^2 y^2)}{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} [x^2 y^2 + (x-y)^2]} = \frac{0}{(0-y)^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

$$\text{και } L_2 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \varphi(x, y) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 .$$

Επομένως υπάρχουν και τα δύο διπλά όρια της φ στο σημείο $O(0,0)$ και είναι ίσα μεταξύ τους .

Για να βρούμε αν υπάρχει ή όχι το όριο της φ στο σημείο $O(0,0)$, παρατηρούμε ότι το όριο αυτό κατά μήκος του μονοπατιού (ευθεία) $\varepsilon_1 : y = x$, το οποίο περνά από το $O(0,0)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \varepsilon_1}} \varphi(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x=y)}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{x^2 x^2}{x^2 x^2 + 0} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{x^4}{x^4} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} 1 = 1 , \end{aligned}$$

ενώ κατά μήκος του μονοπατιού (ευθεία) $\varepsilon_2 : y = 2x$, το οποίο περνά και αυτό από το $O(0,0)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \varepsilon_2}} \varphi(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=2x)}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{x^2 (2x)^2}{x^2 (2x)^2 + (x-2x)^2} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{4x^4}{4x^4 + x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{4x^2}{4x^2 + 1} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0 . \end{aligned}$$

Επειδή τα δύο όρια $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \varepsilon_1}} \varphi(x, y)$ και $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \varepsilon_2}} \varphi(x, y)$ είναι διάφορα μεταξύ τους, σύμφωνα με το Πόρ. 1.3.8 **δεν υπάρχει** το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x, y)$.

Άσκηση 31

Να εξεταστεί αν μπορεί να οριστεί η συνάρτηση δυο μεταβλητών

$$\varphi(x, y) = \frac{x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

στην αρχή $O(0,0)$ του συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε να είναι συνεχής σε όλο το επίπεδο \mathbb{R}^2 .

Λύση. Επειδή $x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0,0)$, η συνάρτηση φ ορίζεται σε κάθε σημείο του επιπέδου $M(x, y) \neq O(0,0)$ και επειδή αυτή είναι πηλίκo δυο πολυωνυμικών συναρτήσεων είναι και συνεχής σε κάθε $M \neq O$. Μένει επομένως να την ορίσουμε στο σημείο $O(0,0)$, έτσι ώστε αυτή να είναι συνεχής και στο O . Για το σκοπό αυτό μετασχηματίζουμε την παράσταση $\varphi(x, y)$ σε πολικές συντεταγμένες θέτοντας $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Τότε έχουμε $x^2 + y^2 = r^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και

$$\varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{(r \cos \theta)^3 (r \sin \theta)^3}{(r^2)^2} = \frac{r^6}{r^4} \cos^3 \theta \sin^3 \theta.$$

Ακόμη, $(x, y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0$ και άρα

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x, y) &= \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r^6}{r^4} \cos^3 \theta \sin^3 \theta \right) \stackrel{(r \neq 0)}{\cong} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} (r^2 \cos^3 \theta \sin^3 \theta). \end{aligned} \quad (1)$$

Επειδή είναι $-1 \leq \cos^3 \theta \sin^3 \theta \leq 1$ έχουμε $-r^2 \leq r^2 \cos^3 \theta \sin^3 \theta \leq r^2$, άρα έχουμε και

$$\lim_{r \rightarrow 0} (-r^2) \leq \lim_{r \rightarrow 0} (r^2 \cos^3 \theta \sin^3 \theta) \leq \lim_{r \rightarrow 0} (r^2).$$

Τέλος, επειδή είναι και $\lim_{r \rightarrow 0} (-r^2) = 0 = \lim_{r \rightarrow 0} (r^2)$, υπάρχει το $\lim_{r \rightarrow 0} (r^2 \cos^3 \theta \sin^3 \theta)$ και είναι ίσο με μηδέν. Εξαιτίας της (1) είναι τότε και

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x, y) = 0.$$

Επομένως θέτοντας $\varphi(0,0) = 0$, έχουμε και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x, y) = \varphi(0,0)$ και άρα η συνάρτηση

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{αν } x \neq 0 \text{ ή } y \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \text{ και } y = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής σε όλο το επίπεδο \mathbb{R}^2 .

Άσκηση 32

Να εξεταστεί αν μπορεί να οριστεί η συνάρτηση δυο μεταβλητών

$$\varphi(x, y) = \frac{3}{x^2 + y^2}$$

στο σημείο $O(0,0)$, έτσι ώστε αυτή να είναι συνεχής και στο O .

Λύση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\varphi(0,0) = A$ τέτοιος ώστε η συνάρτηση φ να είναι συνεχής στο σημείο $O(0,0)$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Εφόσον η φ είναι συνεχής στο O θα έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x, y) = A. \quad (1)$$

Κάνοντας μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες (όπως και στην προηγούμενη Άσκηση) βρίσκουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{3}{r^2} \right). \quad (2)$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι είναι

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{3}{r^2} \right) = +\infty. \quad (3)$$

Θεωρούμε θετικό αριθμό N οσονδήποτε μεγάλο και εκλέγουμε σαν θετικό $\delta = \delta(N)$ τον $\delta = \sqrt{\frac{3}{N}}$. Τότε,

$$r < \delta \Rightarrow r < \sqrt{\frac{3}{N}} \Rightarrow r^2 < \left(\sqrt{\frac{3}{N}} \right)^2 \Rightarrow r^2 < \frac{3}{N} \Rightarrow \frac{1}{r^2} > \frac{N}{3} \Rightarrow \frac{3}{r^2} > N$$

και άρα είναι $\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{3}{r^2} \right) = +\infty$. Εξαιτίας των (1), (2) και (3) έχουμε $A = +\infty$, άτοπο αφού το $+\infty$ δεν είναι πραγματικός αριθμός (αλλά ένα σύμβολο).

Άσκηση 33

Να εξεταστεί αν μπορεί να οριστεί η συνάρτηση δυο μεταβλητών

$$\varphi(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}$$

στην αρχή $O(0,0)$ του συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε να είναι συνεχής σε όλο το επίπεδο \mathbb{R}^2 .

Λύση. Ελέγχουμε πρώτα αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης φ καθώς $(x, y) \rightarrow (0,0)$. Το όριο της φ κατά μήκος του μονοπατιού $\varepsilon_1 : y = x$, το οποίο περνά από την αρχή $O(0,0)$, είναι το

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \varepsilon_1}} \varphi(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x=y)}} \varphi(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{x^4 - x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \left(\frac{0}{2x^4} \right) = 0$$

και το όριο της κατά μήκος του μονοπατιού $\varepsilon_2 : y = 2x$, το οποίο περνά κι αυτό από την αρχή $O(0,0)$, είναι το

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \varepsilon_2}} \varphi(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=2x)}} \varphi(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{x^4 - (2x)^4}{x^4 + (2x)^4} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \left(\frac{-15x^4}{17x^4} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \left(-\frac{15}{17} \right) = -\frac{15}{17}. \end{aligned}$$

Επειδή τα δυο αυτά όρια είναι διάφορα μεταξύ τους, σύμφωνα με το Πόρ.1.3.11, δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης φ , καθώς $(x, y) \rightarrow (0,0)$. Επομένως το ζητούμενο εγχείρημα δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί.

Άσκηση 34

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x, y) = \frac{xy^3}{(x+y^3)^2}$ και να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο της όταν $(x, y) \rightarrow (0,0)$.

Λύση. Πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq -y^3\}$. Για να εξετάσουμε την ύπαρξη του ορίου της συνάρτησης φ , καθώς $(x, y) \rightarrow (0,0)$, επιλέγουμε τα δυο μονοπάτια $c_1 : x = y^3$ και $c_2 : x = 2y^3$, τα οποία περνούν από το σημείο $O(0,0)$ και ανήκουν (πλην του σημείου τους $O(0,0)$) στο S και βρίσκουμε τα όρια

$$L_1 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_1}} \varphi(x, y) \quad \text{και} \quad L_2 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_2}} \varphi(x, y).$$

$$\text{Έχουμε} \quad L_1 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_1}} \frac{xy^3}{(x+y^3)^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x=y^3)}} \frac{xy^3}{(x+y^3)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3 y^3}{(y^3+y^3)^2} =$$

$$= \underbrace{\lim}_{y \rightarrow 0} \frac{y^6}{(2y^3)^2} = \underbrace{\lim}_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y^6}{4y^6} \right)^{(y \neq 0)} \cong \underbrace{\lim}_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

και

$$L_2 = \underbrace{\lim}_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_2}} \frac{xy^3}{(x+y^3)^2} = \underbrace{\lim}_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x=2y^3)}} \frac{xy^3}{(x+y^3)^2} = \underbrace{\lim}_{y \rightarrow 0} \frac{2y^3y^3}{(2y^3+y^3)^2} =$$

$$= \underbrace{\lim}_{y \rightarrow 0} \frac{2y^6}{(3y^3)^2} = \underbrace{\lim}_{y \rightarrow 0} \left(\frac{2y^6}{9y^6} \right)^{(y \neq 0)} \cong \underbrace{\lim}_{y \rightarrow 0} \left(\frac{2}{9} \right) = \frac{2}{9}.$$

Επειδή είναι $L_1 \neq L_2$, δεν υπάρχει (σύμφωνα με το Πόρ.1.3.1) το όριο της συνάρτησης φ , όταν $(x, y) \rightarrow (0,0)$.

Άσκηση 35

Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $\varphi(x, y) = \frac{2x^7 - 5xy^6 + 2y^7}{(x^2 + y^2)^2}$, καθώς $(x, y) \rightarrow (0,0)$.

Λύση. Έχουμε

$$|\varphi(x, y)| = \left| \frac{2x^7 - 5xy^6 + 2y^7}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \frac{|2x^7 - 5xy^6 + 2y^7|}{(x^2 + y^2)^2} \leq$$

$$\leq \frac{|2x^7| + |5xy^6| + |2y^7|}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2|x|(x^2)^3 + 5|x|(y^2)^3 + 2|y|(y^2)^3}{(x^2 + y^2)^3} \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)^3 + 5\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)^3 + 2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)^3}{(x^2 + y^2)^3} \stackrel{(x^2 + y^2 \neq 0)}{\cong}$$

$$= 9 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 9\|MO\|,$$

όπου $M(x, y)$ και $O(0,0)$. (Πήραμε σιωπηλά υπόψη μας ότι $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 \leq x^2 + y^2$, $y^2 \leq x^2 + y^2$ και ότι $|\alpha + \beta + \gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$).

Από τη σχέση $|\varphi(x, y)| \leq 9\|MO\|$ προκύπτει αμέσως ότι είναι $\underbrace{\lim}_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x, y) = 0$.

Άσκηση 36

Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = \frac{x^3y^4}{(2x+y^4)^4},$$

όταν $(x, y) \rightarrow (0,0)$.

Λύση. Όπως εργαστήκαμε και στην Άσκηση 34 επιλέγουμε δυο μονοπάτια, τα $c_1 : x = 2y^4$ και $c_2 : x = 3y^4$, τα οποία περνούν από το σημείο $O(0,0)$ και βρίσκουμε τα όρια

$$L_1 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_1}} \varphi(x,y) \quad \text{και} \quad L_2 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_2}} \varphi(x,y).$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε} \quad L_1 &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_1}} \left[\frac{x^3 y^4}{(2x+y^4)^4} \right] = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x=2y^4)}} \left[\frac{x^3 y^4}{(2x+y^4)^4} \right] = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \left[\frac{(2y^4)^3 y^4}{(2 \cdot 2y^4 + y^4)^4} \right] = \\ &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \left[\frac{2^3 y^{12} y^4}{5^4 (y^4)^4} \right] = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \left(\frac{8}{625} \frac{y^{16}}{y^{16}} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{8}{625} \right) = \frac{8}{625} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και} \quad L_2 &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_2}} \left[\frac{x^3 y^4}{(2x+y^4)^4} \right] = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x=3y^4)}} \left[\frac{x^3 y^4}{(2x+y^4)^4} \right] = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \left[\frac{(3y^4)^3 y^4}{(2 \cdot 3y^4 + y^4)^4} \right] = \\ &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \left[\frac{3^3 (y^4)^3 y^4}{7^4 (y^4)^4} \right] = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \left(\frac{27 y^{12} y^4}{7^4 y^{16}} \right) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (y \neq 0)}} \left(\frac{27 y^{16}}{7^4 y^{16}} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{27}{7^4} \right) = \frac{27}{2.401}. \end{aligned}$$

Τέλος, επειδή είναι $L_1 \neq L_2$ δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης φ , όταν $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

Άσκηση 37

Μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{x^5 y} \eta\mu^2(x^2 y), \quad \text{όπου } xy \neq 0$$

και στο σημείο $O(0,0)$ έτσι ώστε να είναι συνεχής σ' αυτό;

Λύση. Παρατηρούμε ότι είναι $\varphi(x,y) = \frac{1}{x^5 y} \cdot \frac{x^4 y^2}{x^4 y^2} \cdot \eta\mu^2(x^2 y) = \frac{y}{x} \cdot \left[\frac{\eta\mu(x^2 y)}{x^2 y} \right]^2$ και στη συνέχεια επιλέγουμε τα μονοπάτια $\varepsilon_1 : y = x$ και $\varepsilon_2 : y = 2x$, τα οποία περνούν από την αρχή O . Γι αυτά έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \varepsilon_1}} \varphi(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \varepsilon_1}} \left(\frac{y}{x} \right) \cdot \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \varepsilon_1}} \left[\frac{\eta\mu(x^2 y)}{x^2 y} \right]^2 = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \varepsilon_2}} \varphi(x,y) = \\ &= \dots = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Επειδή τα δυο αυτά όρια δεν είναι ίσα μεταξύ τους, δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης φ , όταν $(x,y) \rightarrow (0,0)$ και άρα δεν είναι δυνατό το ζητούμενο εγχείρημα.