ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Αριθμητική Ανάλυση είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με την ανάπτυξη, ανάλυση και εκτίμηση μεθόδων που χρησιμεύουν στην επίλυση προβλημάτων διαφόρων κλάδων των Μαθηματικών. Με άλλα λόγια η Αριθμητική Ανάλυση είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που έχει ως αντικείμενο τον σχεδιασμό και την κατασκευή αποτελεσματικών, στην πράξη, αριθμητικών μεθόδων (επαναληπτικών τύπων-αλγορίθμων) για την επίλυση προβλημάτων τα οποία μπορούν να εκφραστούν με μαθηματικά μοντέλα. Η ικανότητα μιας μεθόδου (αλγορίθμου) εξαρτάται από:

- την ακρίβεια που παρέχει,
- την ευκολία με την οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί, και
- τον χρόνο που χρειάζεται για να δώσει αποτελέσματα με ικανοποιητική ακρίβεια.

Η Αριθμητική Ανάλυση είχε αλματώδη ανάπτυξη, κυρίως μετά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο και πραγματοποιήθηκε παράλληλα με την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπου το ένα επηρέασε και βοήθησε το άλλο. Αυτό δεν σημαίνει ότι η Αριθμητική Ανάλυση ήταν άγνωστη πιο μπροστά. Απεναντίας μάλιστα, οι ρίζες της μπορούν να αναζητηθούν ακόμη και στην αρχαιότητα, όπως για παράδειγμα στον Ήρωνα, ο οποίος επινόησε έναν επαναληπτικό τύπο για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού.

Στο βιβλίο αυτό:

(α) περιέχονται τα πιο βασικά κεφάλαια της Αριθμητικής Ανάλυσης, δηλαδή αυτά που πληρούν τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω κριτήρια:

- είναι απαραίτητα για μια εισαγωγή και στοιχειώδη κατανόηση του αντικειμένου της Αριθμητικής Ανάλυσης,
- είναι χρήσιμα στην επίλυση προβλημάτων που συναντούμε συχνά στην πράξη.

(β) έμφαση δίνεται στην χρήση των αριθμητικών μεθόδων και στην αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που παρέχουν αυτές και όχι στην μαθηματική ανάλυση των ιδιοτήτων των μεθόδων. Δηλαδή, δεν είναι ένα βιβλίο θεωρητικής Αριθμητικής Ανάλυσης αλλά ένα βιβλίο, το οποίο προσπαθεί μεθοδικά να βοηθήσει για την κατανόηση και πρακτική εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων που περιέχει.

Μιχαήλ Ν. Κεσογλίδης
Ξάνθη 2005

ΠΡΩΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Πολλές φορές χρειάζεται να βρούμε λύσεις (ρίζες) μιας αλγεβρικής εξίσωσης. Αυτό μπορεί να είναι ένα ανεξάρτητο πρόβλημα ή ένα μέρος ενός πολυπλοκότερου προβλήματος. Η περίπτωση των γραμμικών εξισώσεων δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα. Πρόβλημα υπάρχει στην περίπτωση των μή γραμμικών εξισώσεων.

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε αριθμητικές μεθόδους προσδιορισμού ριζών μιας μη γραμμικής εξίσωσης $f(x) = 0$. *Πιο συγκεκριμένα θα περιγράψουμε μεθόδους με κάθε μια από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά μια ρίζα* ξ, *με κάποιο σφάλμα (ανοχή)* ε, *της προαναφερθείσας εξίσωσης, αφού προηγουμένως προσδιορίσουμε ένα διάστημα* $[a, b]$ *στο οποίο περιέχεται η ρίζα αυτή. Οι εν λόγω μέθοδοι, τις οποίες θα περιγράψουμε αμέσως παρακάτω, κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες:*

- *Μέθοδοι παρεμβολής*
- *Επαναληπτικές μέθοδοι*

1.1. ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Οι πραγματικές ρίζες μιας μη γραμμικής εξίσωσης

$$\boxed{f(x) = 0} \qquad (1/1)$$

είναι, ως γνωστόν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης $y = f(x)$ με τον άξονα των x.

Όλες οι αριθμητικές μέθοδοι που θα αναπτυχθούν στο κεφάλαιο αυτό προϋποθέτουν μια προκαταρκτική γνώση της θέσης των ριζών στον άξονα των x ή διαστήματα στα οποία υπάρχουν ρίζες.

Η γενική ιδέα της αντιμετώπισης του προβλήματος εύρεσης των ριζών της (1/1) στο R, στηρίζεται στην γνωστή ιδιότητα των εξισώσεων ότι ***περιττό πλήθος ριζών βρίσκεται σε ένα διάστημα [α,β] αν ισχύει ότι $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$.***

Παράδειγμα 1/1

Να προσδιοριστούν τα διαστήματα εντός των οποίων βρίσκονται οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 3x^3 - 9x + 5 = 0$.

Λύση:

Έχουμε ότι $f'(x) = 9x^2 - 9$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι οι $x = \pm 1$. Επειδή, όπως εύκολα διαπιστώνεται, είναι

$$f(-\infty) < 0, f(-1) > (1) < 0, f(+\infty) > 0,$$

παίρνουμε ότι:

$$f(-\infty)\ 0, f(-1) < 0, \quad f(-1)f(1) < 0, \quad f(1)f(+\infty) < 0$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η εξίσωση της εκφώνησης έχει τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες ξ_1, ξ_2, ξ_3 και εάν υποθέσουμε ότι $\xi_1<\xi_2<\xi_3$, τότε: $\xi_1 \in(-\infty, -1)$, $\xi_2 \in(-1,1)$, $\xi_3 \in(1, +\infty)$

1.1.1. Γραφική μέθοδος εντοπισμού ριζών

Ο εντοπισμός (αρχικών) προσεγγιστικών τιμών των ριζών της εξίσωσης f(x) = 0 επιτυγχάνεται με την χρησιμοποίηση και γραφικών μεθόδων.

Πρώτος τρόπος: Κατασκευάζουμε, κατά τα γνωστά, το διάγραμμα C_f της συνάρτησης y = f(x) και τότε οι τετμημένες των σημείων τομής του C_f με τον άξονα των x αποτελούν τις ζητούμενες προσεγγίσεις των ριζών. Οι προσεγγιστικές αυτές τιμές των ριζών χρησιμοποιούνται συνήθως σαν αρχικές τιμές από τις οποίες μπορούμε να βρούμε πιο ακριβείς προσεγγίσεις των ριζών με την βοήθεια επαναληπτικών μεθόδων, όπως θα δούμε παρακάτω.

Δεύτερος τρόπος: Πολλές φορές είναι προτιμότερο, αντί του διαγράμματος C_f της συνάρτησης y = f(x), να αντικαταστήσουμε την εξίσωση f(x) = 0 με μια ισοδύναμη g(x) = h(x), όπου οι συναρτήσεις g(x) και h(x) είναι απλούστερες από την f(x). Μετά κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων y = g(x) και y = h(x). Οι τετμημένες των σημείων τομής των δύο καμπυλών C_g και C_f αποτελούν τις προσεγγίσεις των ριζών της f(x) = 0. Τις προσεγγιστικές αυτές τιμές τις χρησιμοποιούμε όπως αναφέραμε στον προηγούμενο τρόπο.

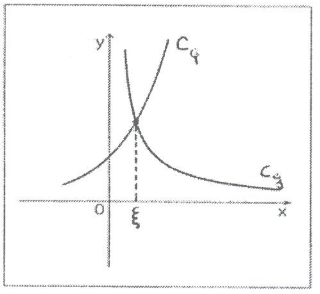
Παράδειγμα 1/2

Να λυθεί γραφικά η εξίσωση $f(x) = xe^{x} - 1 = 0$.

Λύση:

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται: $xe^{e} = 1 \Rightarrow e^{x} = \frac{1}{x}$ *θέτουμε* $\varphi(x) = e^{x}$ *και* $g(x) = \frac{1}{x}$

Η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι εκθετική και η γραφική παράσταση C_{φ} αυτής είναι γνωστή. Η συνάρτηση $g(x)$ παριστάνει, ως γνωστόν, υπερβολή και η γραφική παράσταση C_{g} είναι επίσης γνωστή. Η κατασκευή των C_{φ} και C_{g} σε ορθοκανονικό σύστημα xOy δίνει το διπλανό σχήμα. Από το σχήμα αυτό, εύκολα, φαίνεται, ότι η δοθείσα εξίσωση έχει μία μόνον λύση την $x = \xi$.

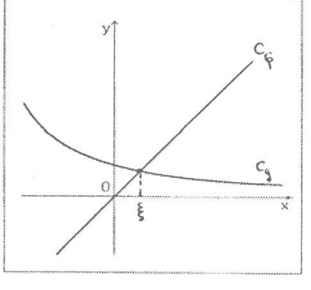


Σχ. 1/1

Άλλος τρόπος

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται: $xe^{x} = 1 \Rightarrow x = e^{-x}$ θέτουμε: $\varphi(x) = x$ και $g(x) = e^{-x}$

Η $\varphi(x)$ είναι γραμμική και η γραφική παράσταση C_{φ} αυτής είναι ευθεία γραμμή η οποία διχοτομεί, όπως ξέρουμε, την πρώτη και τρίτη γωνία των αξόνων στο οποίο σχεδιάζεται. Η $g(x)$ είναι εκθετική με: $g'(x) = -e^{-x} < 0$, αυτό σημαίνει ότι η $g(x)$ είναι μια γνήσια φθίνουσα συνάρτηση και η



Σχ. 1/2

γραφική παράσταση C_φ είναι επίσης γνωστή. Η κατασκευή των C_φ και C_g σε ορθοκανονικό σύστημα xOy δίνει το σχήμα που ακολουθεί. Από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι, η δοθείσα εξίσωση έχει μία μόνον λύση την $x = \xi$.

1.1.2. Θεωρητική μέθοδος εντοπισμού ριζών

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την μη γραμμική εξίσωση $f(x) = 0$ και γνωρίζουμε ή μπορούμε να βρούμε ένα διάστημα $[\alpha_0, \beta_0]$ στο οποίο η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι συνεχής και είναι $f(\alpha_0) \cdot f(\beta_0) < 0$ τότε, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, υπάρχει ξ με $\alpha_0 < \xi < \beta_0$ για το οποίο είναι $f(\xi) = 0$, δηλαδή ο αριθμός ξ είναι ρίζα της (1/1).

Αν με κάποιο τρόπο προσδιορίσουμε έναν αριθμό $x_0 \in (\alpha_0, \beta_0)$ και βρούμε ή αποδείξουμε ότι η ρίζα ξ ανήκει σε ένα από τα διαστήματα $[\alpha_0, x_0]$, $[x_0, \beta_0]$, τότε μπορούμε να πάρουμε το διάστημα:

$$\boxed{[\alpha_1,\beta_1] = \begin{cases} [\alpha_0, x_0] & \text{όταν } f(\alpha_0)f(x_0) \le 0 \\ x_0, \beta_0] & \text{όταν } f(x_0)f(\beta_0) \le 0 \end{cases}} \tag{1/2}$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, προσδιορίζεται μια ακολουθία διαστημάτων:

$$[\alpha_0, \beta_0], [\alpha_1, \beta_1], \ldots [\alpha_\nu, \beta_\nu], \ldots \tag{1/3}$$

καθώς και η αντίστοιχη ακολουθία προσεγγίσεων της ρίζας ξ:

$$x_0, x_1, \ldots, x_\nu, \ldots \text{ με } x_\nu \in [\alpha_\nu, \beta_\nu] \text{ και } f(\alpha_\nu)\, f(\beta_\nu) \le 0 \tag{1/4}$$

Όταν το πλάτος του διαστήματος $[\alpha_\nu,\beta_\nu] \to 0$ για $\nu \to \infty$, τότε $x_\nu \to \xi$ και έχουμε μια μέθοδο για τον προσδιορισμό της ρίζας ξ.

Κάθε τέτοια μέθοδος ονομάζεται μέθοδος παρεμβολής, ακριβώς επειδή σε κάθε διάστημα $[\alpha_\nu,\beta_\nu]$ μια νέα προσέγγιση x_ν της ρίζας ξ παρεμβάλλεται μεταξύ των άκρων του διαστήματος αυτού.

Πρέπει να σημειωθεί ότι σε κάποιο διάστημα $[\alpha_\nu,\beta_\nu]$, $\nu = 0,1,2,\ldots$ μπορεί η ρίζα ξ να συμπίπτει με ένα από τα άκρα του διαστήματος αυτού, τότε σταματάμε την διαδικασία, αφού έχουμε βρεί την ρίζα ξ ακριβώς.

Στην πράξη, όταν για κάποιο ν το διάστημα $[\alpha_\nu,\beta_\nu]$ γίνει αρκετά μικρό, σταματάμε την διαδικασία και σαν ρίζα της (1/1) παίρνουμε την προσεγγιστική τιμή x_ν του διαστήματος (α_ν,β_ν) που βρίσκουμε με την σχετική μέθοδο.

Επειδή, όπως θα δούμε παρακάτω, οποιαδήποτε μέθοδο και αν χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό της ρίζας ξ της εξίσωσης (1/1), πάντα με τον τρόπο που ορίζει η αντίστοιχη μέθοδος, θα κατασκευάζουμε μια ακολουθία $\{x_\nu\}$, $\nu = 0,1,2,\ldots$ και σαν ρίζα ξ της (1/1) θα παίρνουμε το $\lim x_\nu = \xi$. Θεωρούμε απαραίτητο, στο σημείο αυτό, να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Εστω $\{x_\nu\}$, $\nu = 0,1,2,\ldots$ μια ακολουθία τιμών που παράγεται για τον προσδιορισμό της ρίζας ξ και $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{|\varepsilon_{\nu+1}|}{|\varepsilon_\nu|^\rho} = \xi$. Αν υπάρχει ένας αριθμός $\rho \geq 1$ και μια σταθερά $C > 0$ (όταν $\rho = 1$, τότε $0 < C < 1$), τέτοια ώστε:

$$\boxed{\lim_{\nu\to\infty}\frac{|\varepsilon_{\nu+1}|}{|\varepsilon_\nu|^\rho} = C} \qquad (1/5)$$

όπου $\varepsilon_\nu = x_\nu - \xi$, τότε ο αριθμός ρ ονομάζεται τάξη συγκλίσεως της ακολουθίας (ή λέμε ότι η ταχύτητα συγκλίσεως της ακολουθίας είναι τάξεως ρ) και η σταθερά C ονομάζεται σταθερά του ασυμπτωτικού σφάλματός της.

Ειδικά για $\rho = 1,2,3$ η σύγκλιση λέγεται γραμμική, τετραγωνική και κυβική αντίστοιχα. Έχει αποδειχθεί ότι όσο πιο μεγάλη είναι η τάξη ρ, τόσο πιο πολύπλοκη είναι η μορφή της επαναληπτικής μεθόδου, με αποτέλεσμα να απαιτούνται περισσότεροι υπολογισμοί για κάθε επανάληψη. Γι' αυτόν τον λόγο, στην πράξη, χρησιμοποιούνται συνήθως μέθοδοι πρώτης και δεύτερης τάξης.

1.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

1.2.1. Μέθοδος της διχοτόμησης

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται έτσι ακριβώς επειδή κάθε ένα από τα διαστήματα της ακολουθίας (1/3) είναι το μισό του προηγουμένου του. Πράγματι, αν ονομάσουμε x_0 το μέσον του διαστήματος $[\alpha_0, \beta_0]$, τότε, όπως ξέρουμε, είναι $x_0 = \frac{1}{2}(\alpha_0+\beta_0)$ και φυσικά κάθε ένα από τα διαστήματα $[\alpha_0, x_0]$ και $[\alpha_0, \beta_0]$ είναι το μισό του διαστήματος $[\alpha_0, \beta_0]$ και τότε θα είναι:

$$f(x_0) = 0 \text{ ή } f(\alpha_0)\, f(x_0) < 0 \text{ ή } f(x_0)\, f(\beta_0) < 0 \tag{1/6}$$

Στην πρώτη περίπτωση είναι $\xi = x_0$ και τελειώσαμε. Σε διαφορετική περίπτωση, ορίζουμε ένα νέο διάστημα (βλέπε σχέση (1/2)):

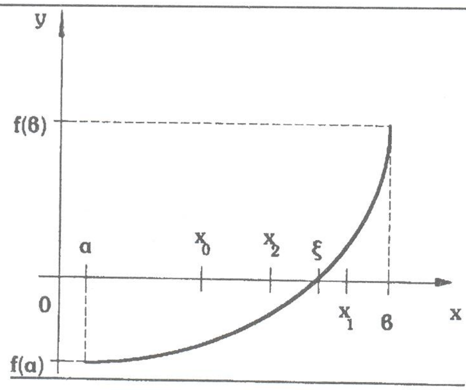
$$[\alpha_1,\beta_1]=\begin{cases}[\alpha_0,x_0] & \text{όταν } f(\alpha_0)f(x_0)\le 0\\ [x_0,\beta_0] & \text{όταν } f(x_0)f(\beta_0)\le 0\end{cases}$$

Το διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ είναι το μισό του διαστήματος $[\alpha_0, \beta_0]$ και περιέχει την άγνωστη ρίζα.

Συνεχίζοντας έτσι, μπορούμε να υποδιπλασιάζουμε συνεχώς το διάστημα στο οποίο βρίσκεται η ρίζα. Ετσι δημιουργείται μια ακολουθία διαστημάτων $[\alpha_0, \beta_0]$, $[\alpha_1, \beta_1]$,... $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$,... όπου κάθε διάστημα είναι το μισό του προηγουμένου του, και μια ακολουθία προσεγγίσεων της ρίζας

$$\boxed{x_0, x_1, \ldots x_\nu, \ldots \quad \mu\varepsilon \quad x_\nu = \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad f(\alpha_\nu) f(\beta_\nu) \le 0} \tag{1/7}$$

Όταν το διάστημα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ γίνει αρκετά μικρό, τότε μπορούμε να πάρουμε σαν προσεγγιστική τιμή της ά-γνωστης ρίζας το μέσον του διαστήματος αυτού. Αυτή είναι η μέθοδος της διχοτόμησης. Η μέθοδος αυτή ερμηνεύεται γεωμετρικά από το διπλανό σχήμα:



Σχήμα 1/3

Στη συνέχεια διατυπώνεται αλγόριθμος της μεθόδου της διχοτόμησης για τον προσδιορισμό μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$

Υπολογισμός μιας ρίζας $\xi \in [\alpha_0, \beta_0]$ της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha_0, \beta_0]$ κι ακόμη είναι $f(\alpha_0) f(\beta_0) \le 0$.

ΔΙΑΒΑΣΕ: Τα α_0, β_0, Το φράγμα ε, Τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων ν.

Βήμα 1 Θέσε $k = 1$ (k = δείκτης)

Βήμα 2 Όταν $k \le \nu$, τότε κάνε τα βήματα 3-6

Βήμα 3 Θέσε $x_0 = \xi = (\alpha_0 + \beta_0)/2$ (υπολόγισε το ξ)

Βήμα 4 Αν $f(\xi) = 0$ ή $[(\beta_0 - \alpha_0)/2] \le \varepsilon$ τότε

ΤΥΠΩΣΕ ζητουμένη ρίζα είναι το ξ και δώσε

ΤΕΛΟΣ στη διαδικασία

Βήμα 5 Θέσε $k = k + 1$

Βήμα 6 Αν $f(\alpha_0)\, f(x_0) < 0$ τότε θέσε $x_0 = \beta_1$ και $\alpha_0 = \alpha_1$ και

υπολόγισε τα β_k, α_k

διαφορετικά θέσε $x_0 = \alpha_1$ και $\beta_0 = \beta_1$ και

υπολόγισε τα β_k, α_k

Βήμα 7 ΤΥΠΩΣΕ δεν βρέθηκε προσέγγιση μετά από ν επαναλήψεις

ΤΕΛΟΣ στη διαδικασία

Θεωρητική απόδειξη της σύγκλισης της ακολουθίας $\{x_\nu\}$

Έχουμε $\beta_\nu - \alpha_\nu = \dfrac{1}{2}(\beta_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}) = \cdots = \dfrac{1}{2^\nu}(\beta_0 - \alpha_0)$, $\quad x_\nu = \dfrac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2}$ και

$\xi \in (\alpha_\nu, \beta_\nu)$ οπότε για κάθε $\nu \geq 1$ θα είναι:

$$\boxed{\left|x_\nu - \xi\right| = \left|\frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} - \xi\right| \leq \frac{\beta_\nu - \alpha_\nu}{2} = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^{\nu+1}}} \qquad (1/8)$$

και επειδή $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{2^{\nu+1}} = 0$, από την (1/8) προκύπτει ότι:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(x_\nu - \xi\right) = 0 \Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \xi$$

δηλαδή η ακολουθία $\{x_\nu\}$ συγκλίνει στην ρίζα ξ της (1/1).

Πλήθος επαναλήψεων για συγκεκριμένη ακρίβεια

Αν για τον υπολογισμό της ρίζας ξ θέλουμε να έχουμε ακρίβεια ε, δηλαδή |xν –ξ| (όπου ε δοσμένος θετικός αριθμός), τότε, όπως φαίνεται από την (1/8), πρέπει:

$$\boxed{\frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^{\nu+1}} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\ln(\beta_0 - \alpha_0) - \ln\varepsilon}{\ln 2} - 1} \qquad (1/9)$$

Η (1/9) μας δίνει το πλήθος των επαναλήψεων που χρειάζονται για να έχουμε ακρίβεια ε.

Παράδειγμα 1/3

Με την μέθοδο της διχοτόμησης να υπολογιστεί, με προσέγγιση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων, μια ρίζα της εξίσωσης:
$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ στο διάστημα $[\alpha, \beta] = [1, 2]$

Λύση:

Ο προσδιορισμός της ρίζας της δοθείσης εξίσωσης στο διάστημα [α, β] με την μέθοδο της διχοτόμησης επιτυγχάνεται με την δημιουργία της ακολουθίας:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots \text{ με } x_\nu = \frac{1}{2}(\alpha_\nu + \beta_\nu) \text{ και } f(\alpha_\nu)\, f(\beta_\nu) < 0$$

Έχουμε διαδιαδοχικά

Βήμα 1° = ***Θέτουμε $[\alpha_0, \beta_0] = [1, 2]$ είναι $f(\alpha_0) = f(\beta_0) = -5$ και***

$f(\beta_0) = f(2) = 14$, καθώς και $x_0 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0) = 1.5$, οπότε

$f(1.5) = \ldots 2.375 > 0$.

Επειδή τώρα είναι $f(1) < 0$ και $f(1.5) > 0 \Rightarrow$

η ζητουμένη ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[1, 1.5]$

Βήμα 2° = ***Θέτουμε $[\alpha_1, \beta_1] = [(1, 1.5]$ είναι $f(\alpha_1) = f(1) < 0$ και***

$f(\beta_1) = f(1.5) > 0$ καθώς και $x_1 = (1/2)\,(\alpha_1 + \beta_1) = 1.25$,

οπότε $f(1.25) = -1.796875 < 0$

Επειδή τώρα είναι $f(1.5) > 0$ και $f(1.25) < 0 \Rightarrow$

η ζητουμένη ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[1.5, 1.25]$

Βήμα 3^o = *Θέτουμε $[\alpha_2, \beta_2] = [1.5, 1.25]$ είναι $f(\alpha_2) = f(1.5) >$ και*

$f(\beta_2) = f(1.25) < 0$ καθώς και $x_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_2) = 1.375$,

οπότε $f(1.375) = ... = 0.162109 > 0$

Επειδή τώρα είναι $f(1.25) < 0$ και $f(1.375) > 0 \Rightarrow$

η ζητουμένη ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[1.25, 1.375]$

Προχωρώντας μ' αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε ότι:

Βήμα 4^o = *Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_4, \beta_4] = [1.3125, 1.375]$*

Βήμα 5^o = *Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_5, \beta_5] = [1.34375, 1.375]$*

Βήμα 6^o = *Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_6, \beta_6] = [1.359375, 1.375]$*

Βήμα 7^o = *Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_7, \beta_7] = [1.359375, 1.367188]$*

Βήμα 8^o = *Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_8, \beta_8] = [1.363282, 1.367188]$*

Βήμα 9^o = *Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_9, \beta_9] = [1.363282, 1.365235]$*

Βήμα 10^o = *Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_{10}, \beta_{10}] = [1.364259, 1.365235]$*

Βήμα 11^o = *Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_{11}, \beta_{11}] = [1.364747, 1.365235]$*

Βήμα 12^o = *Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_{12}, \beta_{12}] = [1.364991, 1.365235]$*

Βήμα 13^o = *Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_{13}, \beta_{13}] = [1.365113, 1.365235]$*

Βήμα 14º = ***Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα*** $[\alpha_{14}, \beta_{14}] = [1.365174, 1.365235]$

Βήμα 15º = ***Η ζητουμένη ρίζα της δοθείσης εξίσωσης θα βρίσκεται στο διάστημα*** $[\alpha_{15}, \beta_{15}] = [1.365205, 1.365235]$

Από το τελευταίο βήμα προκύπτει ότι, η προσέγγιση της ζητουμένης ρίζας με τέσσερα δεκαδικά ψηφία είναι:

$$\xi = 1.3652$$

με ένα σφάλμα $|\xi - x_{13}| = |1.365235 - 1.365220| = 0.000015$

Παρατήρηση

Η μέθοδος της διχοτόμησης αν και προφανής έχει ένα σημαντικό μειονέκτημα. Είναι πολύ αργή όσον αφορά τη σύγκλιση. Όμως η μέθοδος έχει την ενδιαφέρουσα ιδιότητα ότι πάντα συγκλίνει σε μια λύση της εξίσωσης και γι' αυτό το λόγο πολλές φορές χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό αρχικών προσεγγίσεων για πιο ικανές μεθόδους.

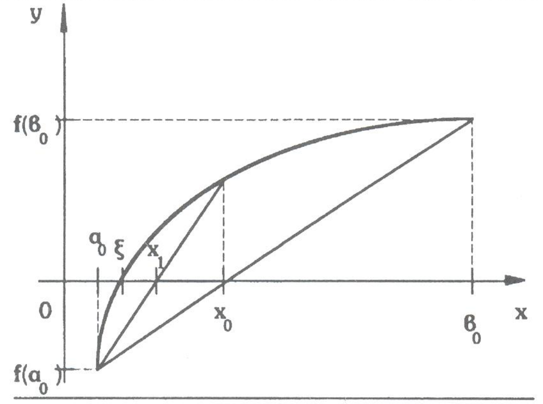
1.2.2. Μέθοδος της εσφαλμένης θέσης (Regula-Falsi)

Η μέθοδος της εσφαλμένης θέσης είναι και αυτή μια μέθοδος παρεμβολής, όπως και η μέθοδος της διχοτόμησης, με την διαφορά ότι το κάθε σημείο x_ν της ακολουθίας (1/4) τώρα προσδιορίζεται από την τομή του άξονα των x με την ευθεία την οποία ορίζουν τα σημεία $(\alpha_\nu, f(\alpha_\nu))$ και $(\beta_\nu, f(\beta_\nu))$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Ας δούμε την μέθοδο αυτή στο ξεκίνημά της.

Από την σχέση:

$f(\alpha_0)\, f(\beta_0) \le 0$ προκύπτει ότι τα σημεία $(\alpha_0, f(\alpha_0))$, $(\beta_0, f(\beta_0))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x και επομένως η ευθεία την οποία ορίζουν τα σημεία αυτά θα τέμνει τον άξονα των x σε ένα σημείο, έστω $(x_0, 0)$.



Σχήμα 1/4

Αφού τώρα τα σημεία $(\alpha_0, f(\alpha_0))$, $(\beta_0, f(\beta_0))$ και $(x_0, 0)$ είναι συνευθειακά θα ισχύει, όπως είναι γνωστό, η σχέση:

$$\begin{vmatrix} x_0 & 0 & 1 \\ \alpha_0 & f(\alpha_0) & 1 \\ \beta_0 & f(\alpha_0) & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{\alpha_0 f(\beta_0) - \beta_0 f(\alpha_0)}{f(\beta_0) - f(\alpha_0)}$$

και, φυσικά, θα είναι $f(x_0) = 0$ ή $f(\alpha_0)\, f(x_0) < 0$ ή $f(x_0)\, f(\beta_0) < 0$, θα ισχύει δηλαδή η σχέση (1/6). Στην πρώτη περίπτωση είναι $\xi = x_0$ και σταματούμε. Διαφορετικά ορίζουμε ένα νέο διάστημα:

$$[\alpha_1, \beta_1] = \begin{cases} [\alpha_0, x_0] & \text{όταν } f(\alpha_0) f(x_0) \le 0 \\ [x_0, \beta_0] & \text{όταν } f(x_0) f(\beta_0) \le 0 \end{cases}$$

Το διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ είναι υποδιάστημα του $[\alpha_0, \beta_0]$ και περιέχει την ρίζα ξ. Προφανώς η επανάληψη της διαδικασίας στο $[\alpha_1, \beta_1]$ θα δώσει καλύτερη προσέγγιση x_1 της άγνωστης ρίζας ξ.

Συνεχίζοντας έτσι θα πάρουμε:

- Την ακολουθία των διαστημάτων $[\alpha_0, \beta_0]$, $[\alpha_1, \beta_1]$,..., $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$,..., όπου κάθε ένα είναι υποδιάστημα του προηγουμένου του.

- Την αντίστοιχη ακολουθία των προσεγγίσεων x_0, x_1,..., x_ν..., με $x_\nu \in [\alpha_\nu, \beta_\nu]$ και $f(\alpha_\nu)\, f(\beta_\nu) \leq 0$, της ρίζας ξ, και
- Για κάθε $\boldsymbol{\nu}$ η προσεγγιστική τιμή $\boldsymbol{x_\nu}$ της ρίζας $\boldsymbol{\xi}$ θα δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{x_\nu = \frac{\alpha_\nu f(\beta_\nu) - \beta_\nu f(\alpha_\nu)}{f(\beta_\nu) - f(\alpha_\nu)}} \qquad (1/10)$$

Αποδεικνύεται ότι, όταν $\boldsymbol{\nu} \to \infty$ τότε $[\alpha_\nu, \beta_\nu] \to 0$ και $x_\nu \to \xi$. Στην πράξη, όταν το διάστημα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ είναι αρκετά μικρό σταματούμε και σαν ρίζα ξ της $f(x) = 0$ παίρνουμε την προσεγγιστική τιμή $\boldsymbol{x_\nu}$ η οποία δίνεται από την (1/10).

Παρατήρηση

Γενικά η μέθοδος της εσφαλμένης θέσης έχει τα ίδια μειονεκτήματα με την μέθοδο της διχοτόμησης, πράγμα που σημαίνει ότι πολλές φορές, στην πράξη, είναι ασύμφορη η χρησιμοποίησή της. Σημειώνεται τέλος ότι μέθοδοι διχοτόμησης και εσφαλμένης θέσης λέγονται μέθοδοι παρεμβολής ακριβώς επειδή σε κάθε διάστημα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ μια νέα προσέγγιση x_ν της ρίζας ξ παρεμβάλλεται μεταξύ των άκρων του διαστήματος αυτού.

Στη συνέχεια διατυπώνεται αλγόριθμος της μεθόδου της εσφαλμένης θέσης για τον προσδιορισμό μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$

Υπολογισμός μιας ρίζας $\xi \in [\alpha_0, \beta_0]$ της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha_0, \beta_0]$ κι ακόμη είναι $f(\alpha_0) f(\beta_0) \leq 0$

ΔΙΑΒΑΣΕ: Τα α_0, β_0, ένα φράγμα ε, μέγιστο αριθμό επαναλήψεων ν.

Βήμα 1 Θέσε $k = 1$ (k= δείκτης)

Βήμα 2 Όταν $k \leq \nu$ τότε κάνε τα βήματα 3-6

Βήμα 3 Θέσε $x_0 = \xi = [\alpha_0 f(\beta_0) - \beta_0 f(\alpha_0)] \,/\, [f(\beta_0) - f(\alpha_0)]$ και υπολόγισε το ξ

Βήμα 4 Αν $f(\xi) = 0$ *ή* $|\xi - (\alpha_0 + \beta_0) / 2| \leq \varepsilon$ τότε

ΤΥΠΩΣΕ Ζητουμένη ρίζα είναι το ξ, και δώσε

ΤΕΛΟΣ στη διαδικασία.

Βήμα 5 Θέσε $k = k + 1$

Βήμα 6 Αν $f(\alpha_0) f(x_0) < 0$ τότε θέσε $x_0 = \beta_1$ και $\alpha_0 = \alpha_1$ και υπολόγισε τα α_k, β_k

διαφορετικά θέσε $x_0 = \alpha_1$ και $\beta_0 = \beta_1$ και

υπολόγισε τα α_k, β_k

Βήμα 7 ΤΥΠΩΣΕ Δεν βρέθηκε προσέγγιση μετά από ν επαναλήψεις

ΤΕΛΟΣ στη διαδικασία.

☞ *Παράδειγμα 1/4*

Με την μέθοδο της εσφαλμένης θέσης να προσδιοριστεί στο διάστημα $[\alpha, \beta] = [1, 2]$ και με προσέγγιση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ (Ε/1)

Λύση:

Ξέρουμε ότι, ο προσδιορισμός της ρίζας μιας εξίσωσης $f(x) = 0$ με την μέθοδο της εσφαλμένης θέσης στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ επιτυγχάνεται με τη δημιουργία της ακολουθίας των προσεγγίσεων: x_0, x_1, x_2,..., x_ν,... με $x_\nu \in [\alpha_\nu, \beta_\nu]$ και $f(\alpha_\nu) \cdot f(\beta_\nu) < 0$, της ρίζας ξ, και για κάθε ν η προσεγγιστική τιμή x_ν, της ρίζας ξ θα δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{x_\nu = \frac{\alpha_\nu f(\beta_\nu) - \beta_\nu f(\alpha_\nu)}{f(\beta_\nu) - f(\alpha_\nu)}} \qquad \text{(T/1)}$$

Βήμα 1°: ***Έχουμε: $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 2$ και $f(\alpha_0) = f(1) = -5$, $f(\beta_0) = f(2) = 14$***

Οπότε, από τον τύπο (Τ/1) για $\nu = 0$ βρίσκουμε:

$x_0 = 1.263158$.

Βήμα 2°: ***Επειδή $f(1.263158) = -1.602273 < 0$ και $f(2) = 14 > 0$ συμπεραίνουμε ότι, η ρίζα της (Ε/1) βρίσκεται στο διάστημα $[1.263158, 2]$***

Έχουμε λοιπόν στο βήμα αυτό: $\alpha_1 = 1.263158$, $\beta_1 = 2$ και $f(\alpha_1) = f(1.263158) = -1.602273 < 0$ και $f(\beta_1) = f(2) = 14 > 0$

Οπότε, από τον τύπο (Τ/1) για $\nu = 1$ βρίσκουμε:

$x_1 = 1.338828$.

Βήμα 3°: ***Επειδή $f(1.338828) = -0.430362 < 0$ και $f(2) = 14 > 0$ συμπεραίνουμε ότι, η ρίζα της (Ε/1) βρίσκεται στο διάστημα $[1.338828, 2]$***

Έχουμε λοιπόν στο βήμα αυτό: $\alpha_2 = 1.338828$, $\beta_2 = 2$ και $f(\alpha_2) = f(1.338828) = -0.430362 < 0$ και $f(\beta_2) = f(2) = 14 > 0$

Οπότε, από τον τύπο (Τ/1) για $\nu = 2$ βρίσκουμε:

$x_2 = 1.358546$.

Βήμα 4^0: ***Επειδή $f(1.358546) = -0.110014 < 0$ και $f(2) = 14 > 0$ συμπεραίνουμε ότι, η ρίζα της (Ε/1) βρίσκεται στο διάστημα $[1.358546, 2]$***

Έχουμε λοιπόν στο βήμα αυτό: $\alpha_3 = 1.358546$, $\beta_3 = 2$ και $f(\alpha_3) = f(1.358546) = -0.110014 < 0$ και $f(\beta_3) = f(2) = 14$

Οπότε, από τον τύπο (Τ/1) για $\nu = 3$ βρίσκουμε:

$x_3 = 1.363547$.

Προχωρώντας μ' αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε:

Βήμα 5^o: ***$x_4 = 1.3648077$.***

Βήμα 6^o: ***$x_5 = 1.365124$.***

Βήμα 7^o: ***$x_6 = 1.365203$.***

Βήμα 8^o: ***$x_7 = 1.365223$.***

Βήμα 8^o: ***$x_8 = 1.365228$.***

Από τα δύο τελευταία βήματα προκύπτει ότι, η ζητουμένη ρίζα με την προσέγγιση των τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων (που θέλαμε) είναι η:

$$\xi = 1.3652$$

1.3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

Επαναληπτικές λέγονται οι μέθοδοι οι οποίες, για τον υπολογισμό ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, βασίζονται γενικά σε ένα τύπο της μορφής:

$$x_{\nu+1} = \varphi(x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots) \qquad (1/11)$$

όπου το δεξιό μέλος της (1/11) εξαρτάται από τις τιμές x_ν, $x_{\nu-1}$,... καθώς και τις αντίστοιχες (στα x_ν, $x_{\nu-1}$,...) τιμές των $f(x)$ και $f'(x)$. Στην απλούστερη περίπτωση, ο τύπος (1/11) παίρνει την μορφή:

$$x_{\nu+1} = \varphi(x_\nu) \tag{1/12}$$

δηλαδή το $x_{\nu+1}$ εξαρτάται μόνο από την προηγούμενη τιμή x_ν.

1.3.1. Μέθοδος του σταθερού σημείου

Έστω η μη γραμμική εξίσωση $f(x) = 0$. Αν αντικαταστήσουμε την $f(x) = 0$ με μια άλλη ισοδύναμη της μορφής:

$$x = \varphi(x) \tag{1/13}$$

όπου η $\varphi(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε μια λύση της $f(x) = 0$ λέμε ότι είναι ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης $\varphi(x)$, όπου $\varphi(x) = x - f(x)$. Για τον λόγο αυτό η αντίστοιχη μέθοδος υπολογισμού ριζών της $f(x) = 0$ ονομάζεται ***μέθοδος σταθερού σημείου***.

Το σταθερό σημείο της συνάρτησης $\varphi(x)$ είναι το όριο σύγκλισης της ακολουθίας:

$$x_0, x_1, \ldots x_\nu, \ldots \tag{1/14}$$

που κατασκευάζεται από την αναδρομική σχέση:

$$x_{\nu+1} = \varphi(x), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{1/15}$$

Ο περιορισμός που προσδιορίζει την αντικατάσταση της $f(x) = 0$ με την $x = \varphi(x)$ είναι ότι η ακολουθία (1/14) που κατασκευάζεται από την αναδρομική σχέση (1/15), με x_0 δοσμένο, πρέπει να είναι συγκλίνουσα.

Είναι προφανές ότι οι ρίζες της (1/13) είναι τετμημένες των σημείων τομής της ευθείας $y = x$ και της γραμμής την οποία παριστάνει η $y = \varphi(x)$. Στο σχήμα 1/3 δίδεται γεωμετρική εξήγηση για την περίπτωση που η ακολουθία $\{x_\nu\}$ συγκλίνει στην ρίζα ξ της εξίσωσης (1/13), που είναι και ρίζα της (1/1), αφού οι εξισώσεις αυτές, όπως