ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ο χειρισμός αντικειμένων και εργαλείων από έναν ρομποτικό βραχίονα σημαίνει ότι το ρομπότ πρέπει να είναι ικανό να τοποθετεί και να προσανατολίζει κατάλληλα το άκρο του στο χώρο εργασίας· π.χ., για να βιδώσει ένα καπάκι, το ρομπότ θα πρέπει να κρατά το καπάκι με τον κατάλληλο προσανατολισμό. Επομένως στη ρομποτική είναι πρωταρχικά αναγκαίο να μπορούμε να περιγράψουμε θέσεις και προσανατολισμούς αντικειμένων, εργαλείων αλλά και του ίδιου του ρομπότ στον καρτεσιανό χώρο, δηλαδή στον γνωστό τρισδιάστατο χώρο στον οποίο το ρομπότ εργάζεται. Η μελέτη της κινηματικής των ρομπότ έχει τη βάση της στη μελέτη της κίνησης ενός στερεού σώματος, η οποία περιλαμβάνει τη μαθηματική περιγραφή της θέσης και του προσανατολισμού του στερεού σώματος σε κάθε χρονική στιγμή.

Με τον όρο στερεό σώμα εννοούμε ένα μη παραμορφώσιμο σώμα, δηλαδή ένα στερεό σώμα ορίζεται ως ένα σύνολο σωματιδίων των οποίων η απόσταση του ενός από το άλλο (για οποιοδήποτε δύο σωματίδια) παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη από τις κινήσεις του σώματος ή τις δυνάμεις που εφαρμόζονται πάνω στο σώμα.

Εποπτικό παράδειγμα: Συναρμολόγηση

2.1 Θέση σημείου του σώματος και ελεύθερα ανύσματα

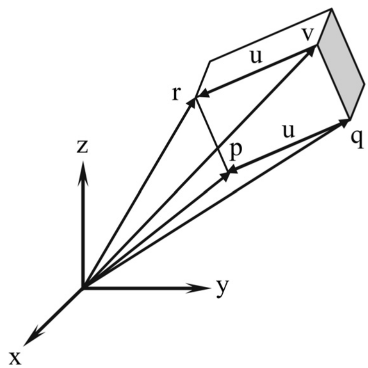
Η κίνηση ενός σωματιδίου ή σημείου στον ευκλείδειο χώρο περιγράφεται από τη θέση του σημείου κάθε χρονική στιγμή αναφορικά με ένα αδρανειακό καρτεσιανό πλαίσιο συντεταγμένων έστω $\{A\}$. Ειδικότερα, η τριάδα $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ των συντεταγμένων της θέσης του σημείου εκφράζει την προβολή της θέσης του σημείου στους άξονες του αδρανειακού πλαισίου. Η τροχιά του σημείου περιγράφεται από την παραμετροποιημένη καμπύλη $p(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathbb{R}^3$. Η μαθηματική περιγραφή της θέσης ενός σημείου του σώματος γίνεται είτε με το άνυσμα στήλη $p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ είτε με το ανυσματικό άθροισμα $p = x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}$ όπου $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ τα μοναδιαία ανύσματα του πλαισίου αναφοράς.

Η κίνηση ενός στερεού σώματος είναι η κίνηση του συνόλου σωματιδίων ή σημείων που αποτελούν το σώμα, έτσι ώστε, αν p και q είναι δύο οποιαδήποτε σημεία του σώματος, καθώς το σώμα κινείται οι θέσεις των σημείων p και q ικανοποιούν τη σχέση

$$||p(t) - q(t)|| = ||p(0) - q(0)|| = \sigma\tau\alpha\theta.$$

όπου $||\,.\,||$ το ευκλείδειο μέτρο ή η νόρμα ενός ανύσματος. Το αποτέλεσμα της κίνησης είναι η μετατόπιση του στερεού σώματος σε μία νέα θέση και έναν νέο προσανατολισμό.

Αν p και q είναι δύο οποιαδήποτε σημεία του σώματος, τότε το άνυσμα $u \in \mathbb{R}^3$ που συνδέει τα p και q ορίζεται ως το κατευθυνόμενο τμήμα γραμμής που συνδέει τα δύο σημεία, δηλαδή $u = p - q \in \mathbb{R}^3$. Παρόλο που τόσο τα σημεία p και q όσο και το άνυσμα $u \in \mathbb{R}^3$ περιγράφονται από τις τριάδες των συντεταγμένων τους, η εννοιολογική διαφορά τους είναι σημαντική.

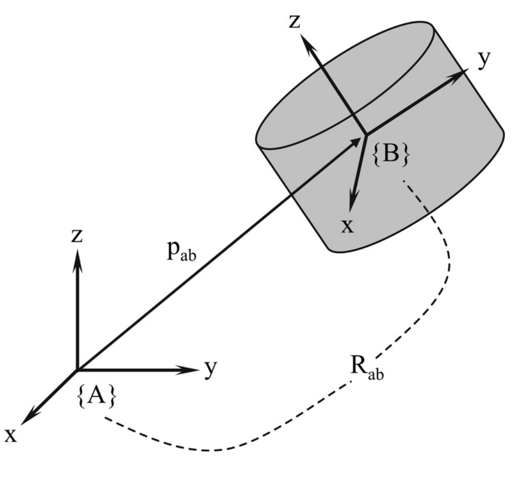


ΣΧΗΜΑ 2.1

Το άνυσμα $u \in \mathbb{R}^3$, που ορίζεται ως διαφορά των θέσεων δύο σημείων, έχει διεύθυνση και μέτρο, αλλά δεν είναι προσαρτημένο στο σώμα, εφόσον μπορεί να υπάρχουν και άλλες δυάδες σημείων του σώματος που να συνδέονται από το ίδιο άνυσμα. Έστω, π.χ., οι θέσεις των σημείων του σώματος r και v είναι τέτοιες ώστε $r - v = u \in \mathbb{R}^3$ (Σχήμα 2.1). Τα ανύσματα αυτά αποκαλούνται πολλές φορές ελεύθερα, εφόσον μπορούν να τοποθετηθούν στο χώρο ελεύθερα χωρίς να αλλάξουν. Σε αντίθεση, τα ανύσματα που περιγράφουν θέσεις σημείων αλλάζουν με τη μετατόπιση του στερεού σώματος και δεν πρέπει να συγχέονται με τα ελεύθερα ανύσματα.

2.2 Περιγραφή της θέσης και του προσανατολισμού ενός στερεού σώματος

Η θέση και ο προσανατολισμός ενός στερεού σώματος στο χώρο αναφορικά με ένα αδρανειακό καρτεσιανό πλαίσιο συντεταγμένων $\{A\}$ γίνεται με την περιγραφή της θέσης και του προσανατολισμού ενός καρτεσιανού πλαισίου συντεταγμένων $\{B\}$, το οποίο στερεώνουμε σε ένα αυθαίρετο σημείο του σώματος, π.χ. στο κέντρο του σώματος (Σχήμα 2.2). Το άνυσμα θέσης της αρχής του πλαισίου $\{B\}$ στο αδρανειακό πλαίσιο $\{A\}$ $p_{ab} \in \mathbb{R}^3$ περιγράφει τη θέση του στερεού σώματος και ο πίνακας στροφής R_{ab} του πλαισίου $\{B\}$ σε σχέση με το πλαίσιο $\{A\}$ περιγράφει τον προσανατολισμό του. Ο πίνακας στροφής R_{ab} είναι ένας πίνακας 3×3 του οποίου η κατασκευή και οι ιδιότητες περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο. Επομένως, μια μορφή περιγραφής της θέσης και του προσανατολισμού του στερεού σώματος στο χώρο αποτελείται από το ζεύγος (p_{ab}, R_{ab})



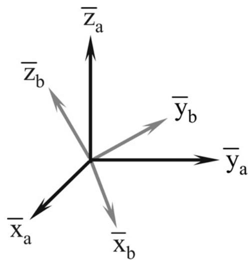
ΣΧΗΜΑ 2.2

Σχόλιο: Στον διπλό δείκτη ab που εμφανίζεται στο συμβολισμό της θέσης και του προσανατολισμού του σώματος, το πρώτο στοιχείο είναι το καρτεσιανό πλαίσιο αναφοράς, στο οποίο γίνεται η περιγραφή, ενώ το δεύτερο στοιχείο είναι το πλαίσιο που περιγράφεται.

Εποπτικό παράδειγμα: Θέση Αντικειμένου

2.2.1 Πίνακας στροφής

Ο πίνακας στροφής R_{ab} κατασκευάζεται από τα μοναδιαία ανύσματα του {B} έστω $\bar{x}_b$, $\bar{y}_b$, $\bar{z}_b$ εκφρασμένα στο {A}. Οι συντεταγμένες αυτών των ανυσμάτων στο {A} βρίσκονται από τις προβολές του κάθε μοναδιαίου ανύσματος πάνω στους τρεις άξονες του {A} (Σχήμα 2.3). Η προβολή αυτή εκφράζεται με το εσωτερικό γινόμενο κάθε μοναδιαίου ανύσματος του {B} με κάθε μοναδιαίο άνυσμα του {A} έστω $\bar{x}_a$, $\bar{y}_a$, $\bar{z}_a$. Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε τα $\bar{x}_b$, $\bar{y}_b$, $\bar{z}_b$ στο {A}:



ΣΧΗΜΑ 2.3

$$x_{ab} := \begin{bmatrix} \bar{x}_a \cdot \bar{x}_b \\ \bar{y}_a \cdot \bar{x}_b \\ \bar{z}_a \cdot \bar{x}_b \end{bmatrix}, \quad y_{ab} := \begin{bmatrix} \bar{x}_a \cdot \bar{y}_b \\ \bar{y}_a \cdot \bar{y}_b \\ \bar{z}_a \cdot \bar{y}_b \end{bmatrix}, \quad z_{ab} := \begin{bmatrix} \bar{x}_a \cdot \bar{z}_b \\ \bar{y}_a \cdot \bar{z}_b \\ \bar{z}_a \cdot \bar{z}_b \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας στροφής κατασκευάζεται από τις παραπάνω τρεις στήλες:

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} x_{ab} & y_{ab} & z_{ab} \end{bmatrix}$$

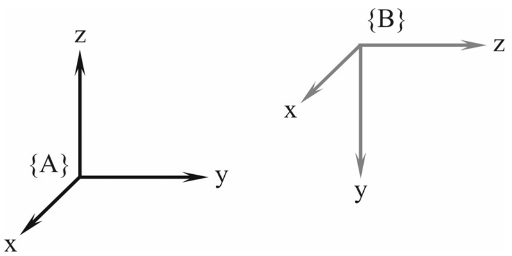
Κάθε στοιχείο του πίνακα στροφής είναι επομένως το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των μοναδιαίων ανυσμάτων (ή των αξόνων) του {A} και του {B}, δηλ. τα στοιχεία του πίνακα στροφής είναι τα $\cos\theta_{ij}$, $i = x_a, y_a, z_a \quad j = x_b, y_b, z_b$.

Στα εσωτερικά γινόμενα ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, και επομένως από τον ορισμό του πίνακα στροφής παρατηρούμε ότι $R_{ab} = (R_{ba})^T$, δηλαδή ο προσανατολισμός του πλαισίου {B} ως προς το {A} είναι ο ανάστροφος του προσανατολισμού του {A} ως προς το

$\{B\}$. Επομένως, κάθε γραμμή του πίνακα στροφής εκφράζει την προβολή κάθε μοναδιαίου ανύσματος του $\{A\}$ $\bar{x}_a, \bar{y}_a, \bar{z}_a$ πάνω στους τρεις άξονες του πλαισίου $\{B\}$.

Παραδειγμα 2.1

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα πλαίσια $\{A\}$ και $\{B\}$. Να βρεθεί ο πίνακας στροφής R_{ab} που περιγράφει τον προσανατολισμό του $\{B\}$ ως προς το $\{A\}$.



Απάντηση: Για να βρούμε τον πίνακα στροφής R_{ab}, απαιτείται ο υπολογισμός των x_{ab}, y_{ab}, z_{ab}. Σε αυτή την περίπτωση, τα δύο πλαίσια συντεταγμένων έχουν παράλληλους άξονες, ιδιότητα που μας επιτρέπει τον εύκολο υπολογισμό των x_{ab}, y_{ab}, z_{ab}. Πράγματι, από το σχήμα λαμβάνουμε ότι $x_{ab} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ το οποίο εκφράζει το μοναδιαίο άνυσμα του πλαισίου $\{B\}$ εκφρασμένο στο πλαίσιο $\{A\}$. Με τον ίδιο τρόπο λαμβάνουμε ότι $y_{ab} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $z_{ab} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Επομένως, ο πίνακας στροφής R_{ab} είναι: $R_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2.2.2 Ιδιότητες του πίνακα στροφής

Έστω $R \in \mathbb{R}^{3\times3}$ είναι ένας πίνακας στροφής με στήλες r_1, r_2, $r_3 \in \mathbb{R}^3$. Κάθε στήλη του πίνακα στροφής εκφράζει ένα μοναδιαίο άνυσμα ενός καρτεσιανού πλαισίου συντεταγμένων. Οι στήλες ενός πίνακα στροφής έχουν επομένως μέτρο ίσο με τη μονάδα και είναι κάθετες μεταξύ τους, άρα ικανοποιούν τους εξής περιορισμούς:

$$r_i^T r_j = \begin{cases} 0, & \text{αν } i \neq j \\ 1, & \text{αν } i = j \end{cases} \tag{2.1}$$

Η (2.1) γράφεται συνοπτικά ως εξής:

$$R^T R = R R^T = I$$

όπου I μοναδιαίος πίνακας διάστασης τρία.
Από αυτή συνάγεται ότι $R^{-1} = R^T$ και $|R| = \pm 1$.

Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $|R| = r_1^T(r_2 \times r_3)$. Εφόσον το σύστημα συντεταγμένων είναι δεξιόστροφο $r_2 \times r_3 = r_1$ και επομένως συνάγεται ότι στους πίνακες στροφής $|R| = +1$. Οι ορθογώνιοι πίνακες με ορίζουσα -1 περιγράφουν την ανάκλαση ενός στερεού σώματος.

Ορισμός 2.1:
Το σύνολο όλων των ορθογωνίων πινάκων διάστασης 3 με ορίζουσα $+1$ αποτελεί την ειδική ορθογώνια ομάδα (Special Orthogonal), η οποία συμβολίζεται με $SO(3)$ και η οποία περιγράφει το χώρο των στροφών ενός στερεού σώματος:

$$SO(3) \triangleq \{R \in \mathbb{R}^{3\times 3} : RR^T = I, |R| = 1\}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Είναι προφανές ότι ο μοναδιαίος πίνακας 3×3 εκφράζει την έλλειψη στροφής, δηλαδή τη μηδενική στροφή, $I \in SO(3)$.
2. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί από την ιδιότητα $R^T R = RR^T = I$ ότι ο αντίστροφος του πίνακα στροφής ισούται με τον ανάστροφό του. Επομένως

$$R_{ab}^{-1} = R_{ab}^T = R_{ba}$$

2.2.3 Βασικοί πίνακες στροφής

Αν ο προσανατολισμός του πλαισίου $\{B\}$ έχει προκύψει από στροφή του $\{A\}$ κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα z (Σχήμα 2.4) ή γύρω από τον x ή y, τότε ο πίνακας στροφής είναι αντίστοιχα:

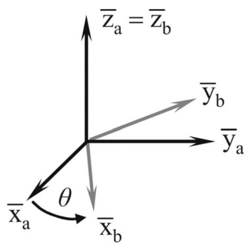
$$\mathrm{Rot}(z,\theta)=\begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathrm{Rot}(y,\theta)=\begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Rot}(x,\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

όπου $c_\theta = \cos\theta$ και $s_\theta = \sin\theta$.

Οι πίνακες αυτοί είναι πίνακες βασικών στροφών.

Εποπτικό παράδειγμα: Βασικές στροφές 2π



ΣΧΗΜΑ 2.4

Μία σύνθετη στροφή μπορεί να προέλθει από την κατάλληλη σύνθεση βασικών στροφών.

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Rot}(i,\theta)^{-1} = \mathrm{Rot}(i,-\theta)\ i = x,y,z \\ &\mathrm{Rot}(i,\theta_1)\mathrm{Rot}(i,\theta_2) = \mathrm{Rot}(i,\theta_1+\theta_2)\ i = x,y,z \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2.4 Μετασχηματισμός συντεταγμένων της θέσης ενός σημείου με τον πίνακα στροφής

Ένας πίνακας στροφής χρησιμεύει στο μετασχηματισμό των συντεταγμένων ενός σημείου από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο. Έστω η θέση ενός σημείου q στο πλαίσιο $\{B\}$ $q_b = [x_b\ y_b\ z_b]^T$ (Σχ. 2.5) την οποία θέλουμε να εκφράσουμε στο $\{A\}$, ζητάμε δηλαδή το

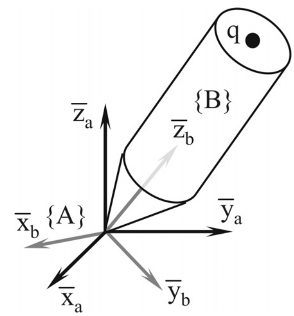
$$q_a = [x_a\ y_a\ z_a]^T$$

Οι συντεταγμένες του q_a δίνονται από τα εσωτερικά γινόμενα $x_a = \bar{x}_a \cdot q_b$, $y_a = \bar{y}_a \cdot q_b$, $z_a = \bar{z}_a \cdot q_b$ και αντικαθιστώντας το q_b στη μορφή του ανυσματικού αθροίσματος $q_b = x_b\bar{x}_b + y_b\bar{y}_b + z_b\bar{z}_b$ βρίσκουμε ότι:

$$q_a = [x_{ab}\ y_{ab}\ z_{ab}]q_b$$

Τελικά:

$$q_a = R_{ab}q_b \tag{2.4}$$



ΣΧΗΜΑ 2.5

Επομένως, ο πίνακας στροφής R_{ab} **μετασχηματίζει τις συντεταγμένες ενός σημείου από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο διαφορετικού προσανατολισμού.**

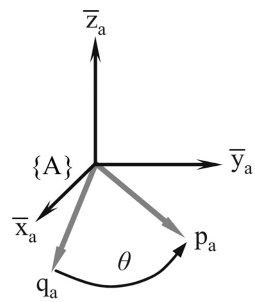
Σχόλιο: Ο δείκτης που εμφανίζεται στο συμβολισμό της θέσης ενός σημείου, όπως π.χ. στις θέσεις q_a, q_b, είναι το καρτεσιανό πλαίσιο αναφοράς στο οποίο γίνεται η περιγραφή του σημείου.

2.2.5 Στροφή της θέσης ενός σημείου

Έστω η θέση ενός σημείου $q_a = [x_a\ y_a\ z_a]^T$ και ένας πίνακας στροφής R, π.χ. $R = \mathrm{Rot}(z, \theta)$. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής της στροφής R στη θέση q_a είναι η νέα θέση

$$p_a = Rq_a \tag{2.5}$$

που έχει προέλθει από τη στροφή του q_a κατά θ γύρω από τον άξονα z (Σχήμα 2.6). Μπορούμε να φανταστούμε τα q_a, p_a σαν την αρχική και την τελική θέση ενός σημείου του σώματος έπειτα από μία πεπερασμένη στροφή.



ΣΧΗΜΑ 2.6

2.2.6 Σύνθεση πινάκων στροφής

Έστω η θέση ενός σημείου p_a που προέρχεται από στροφή της θέσης ενός σημείου q_a κατά γωνία θ_1 γύρω από τον άξονα z ενός αδρανειακού πλαισίου και κατόπιν από στροφή κατά θ_2 γύρω από τον άξονα x του αδρανειακού πλαισίου. Η νέα θέση μετά την πρώτη στροφή σύμφωνα με τη (2.5) θα είναι $q'_a = \mathrm{Rot}(z, \theta_1) q_a$, η οποία με την επόμενη στροφή δίνει το άνυσμα της τελικής θέσης

$$p_a = \mathrm{Rot}(x, \theta_2) q'_a \Rightarrow p_a = \mathrm{Rot}(x, \theta_2)\mathrm{Rot}(z, \theta_1) q_a$$

Επομένως, η σύνθετη στροφή δίνεται από τη σχέση

$$R = \mathrm{Rot}(x, \theta_2)\mathrm{Rot}(z, \theta_1)$$

Έστω τώρα ο προσανατολισμός ενός πλαισίου {B} ως προς το πλαίσιο {A}, ο οποίος έχει προέλθει από σύνθετη στροφή του {B} ως εξής: Αρχικά το πλαίσιο {B} ταυτίζεται με το πλαίσιο {A}. Από την αρχική αυτή θέση στρέφουμε το {B} γύρω από τον άξονα z του {A} κατά γωνία θ_1 και έπειτα γύρω από τον άξονα x του {A} κατά γωνία θ_2. Κάθε μοναδιαίο άνυσμα του πλαισίου {B} εκτελεί τη σύνθετη στροφή $\mathrm{Rot}(x, \theta_2)\mathrm{Rot}(z, \theta_1) = R_{ab}$, η οποία και αποτελεί τον τελικό προσανατολισμό του {B}.

Εποπτικό παράδειγμα: $\mathrm{Rot}(x, \pi/2)\mathrm{Rot}(z, \pi/2)$

Επομένως, καταλήγουμε στον εξής κανόνα σύνθεσης στροφών:

Πρώτος κανόνας σύνθεσης στροφών:
Η σύνθετη στροφή που ορίζεται από μια σειρά στροφών γύρω από τους άξονες του αδρανειακού πλαισίου σχηματίζεται με τον κατά σειρά πολλαπλασιασμό από αριστερά με τον πίνακα της αντίστοιχης βασικής στροφής.

Έστω τώρα ο προσανατολισμός ενός πλαισίου {B} ως προς το πλαίσιο {A}, ο οποίος έχει προέλθει από σύνθετη στροφή του {B} ως εξής. Αρχικά το πλαίσιο {B} ταυτίζεται με το πλαίσιο {A}. Από την αρχική αυτή θέση στρέφουμε το {B} γύρω από τον άξονα z του {A}, που συμπίπτει με τον άξονα z του {B} κατά γωνία θ_1, και έπειτα γύρω από τον (νέο) άξονα x του {B} κατά γωνία θ_2. Για να βρούμε τη σύνθετη στροφή, θεωρούμε τις αντίθετες βασικές στροφές με το {B} ακίνητο στην τελική του θέση και το {A} να περιστρέφεται γύρω από τους ακίνητους άξονες του {B}. Με άμεση εφαρμογή του πρώτου κανόνα σύνθεσης στροφών βρίσκουμε ότι $R_{ba} = \mathrm{Rot}(x, -\theta_2)\mathrm{Rot}(z, -\theta)$. Τέλος, αντιστρέφουμε και βρίσκουμε τον προσανατολισμό του {B} με χρήση της (2.3) $R_{ab} = R_{ba}^{-1} = \mathrm{Rot}(z, \theta_1)\mathrm{Rot}(x, \theta_2)$.

Εποπτικό παράδειγμα: $\mathrm{Rot}(z, a)\mathrm{Rot}(x, b)$ & $\mathrm{Rot}(x, -b)\mathrm{Rot}(z, -a)$

Έτσι, καταλήγουμε στον εξής κανόνα σύνθεσης στροφών:

Δεύτερος κανόνας σύνθεσης στροφών:
Η σύνθετη στροφή που ορίζεται από μια σειρά στροφών γύρω από τους άξονες του κινούμενου πλαισίου σχηματίζεται με τον κατά σειρά πολλαπλασιασμό από δεξιά με τον πίνακα της αντίστοιχης βασικής στροφής.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο προσανατολισμός του πλαισίου {B} που προέκυψε από στροφές γύρω από τους άξονες του κινούμενου πλαισίου και δίνεται, π.χ. όπως παραπάνω από το γινόμενο $\mathrm{Rot}(z, \theta_1)\mathrm{Rot}(x, \theta_2)$, θα μπορούσε να προέλθει από σύνθετη στροφή ως προς τους άξονες του αδρανειακού πλαισίου, δηλαδή από την αρχική θέση στρέφουμε το {B} γύρω από τον άξονα x του {A} κατά γωνία θ_2 και έπειτα γύρω από τον άξονα z του {A} κατά γωνία θ_1. Επομένως, σε μια σύνθετη στροφή, η σειρά των στροφών από δεξιά προς τα αριστερά ορίζει στροφές γύρω από τους άξονες του αδρανειακού συστήματος και η σειρά των στροφών από αριστερά προς τα δεξιά ορίζει στροφές γύρω από τους άξονες του κινούμενου πλαισίου.

Εποπτικό παράδειγμα: $\mathrm{Rot}(x, b)\mathrm{Rot}(z, a)$

Στη σύνθεση στροφών είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι η **αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει**. Αν αντιμεταθέσουμε τις στροφές από τις οποίες προήλθε π.χ. η θέση $p_a = \mathrm{Rot}(x, \theta_2)\mathrm{Rot}(z, \theta_1)q_a$, δηλαδή αν στρέψουμε τη θέση q_a κατά θ_2 γύρω από τον άξονα x του αδρανειακού πλαισίου και κατόπιν κατά γωνία θ_1 γύρω από τον άξονα z του αδρανειακού πλαισίου, η θέση που προκύπτει $\mathrm{Rot}(z, \theta_1)\mathrm{Rot}(x, \theta_2)q_a$ είναι διαφορετική από την p_a.

Εποπτικό παράδειγμα: $\mathrm{Rot}(z, \pi/2)\mathrm{Rot}(x, \pi/2)$

Αν τώρα ένα πλαίσιο {C} έχει προσανατολισμό R_{bc} ως προς ένα πλαίσιο {B} και το {B} έχει προσανατολισμό R_{ab} ως προς ένα πλαίσιο $\{A\}$, τότε ο προσανατολισμός του $\{C\}$ ως προς $\{A\}$ βρίσκεται από τη σχέση:

$$R_{ac} = R_{ab}R_{bc} \tag{2.6}$$

Πράγματι, αν η θέση ενός σημείου είναι γνωστή στο πλαίσιο $\{C\}$, έστω q_c, τότε σύμφωνα με τη (2.4), η έκφραση του σημείου αυτού στο πλαίσιο $\{A\}$ είναι $q_a = R_{ac}q_c$ και στο πλαίσιο $\{B\}$ $q_b = R_{bc}q_c$. Επιπλέον, η θέση q_b εκφρασμένη στο πλαίσιο $\{A\}$ δίνεται από τη σχέση $q_a = R_{ab}q_b$ και αντικαθιστώντας την q_b βρίσκουμε $q_a = R_{ab}R_{bc}q_c$, η οποία σε συνδυασμό με την $q_a = R_{ac}q_c$ δίνει τη σχέση σύνθεσης:

$$R_{ac} = R_{ab}R_{bc}$$

2.3 Εναλλακτικοί τρόποι περιγραφής προσανατολισμού

Ο προσανατολισμός ενός πλαισίου $\{B\}$ ως προς ένα πλαίσιο $\{A\}$ μπορεί να περιγραφεί με άλλους τρόπους εκτός από τον πίνακα στροφής. Οι τρόποι αυτοί εμπλέκουν τρεις μόνο παραμέτρους και ονομάζονται τοπικές παραμετροποιήσεις ενός προσανατολισμού. Πράγματι, τα εννέα στοιχεία του πίνακα στροφής λόγω των ιδιοτήτων του πίνακα στροφής υπόκεινται στους έξι περιορισμούς (2.1), και επομένως μόνο τρία από τα στοιχεία αυτά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Οι τοπικές παραμετροποιήσεις περιέχουν *ιδιάζοντα σημεία*, δηλαδή σε κάποιες τιμές του πίνακα στροφής αντιστοιχούν άπειρες τιμές των παραμέτρων προσανατολισμού.

2.3.1 Γωνίες περιστροφής γύρω από τους άξονες του ακίνητου πλαισίου αναφοράς

Αν θεωρήσουμε ότι αρχικά το πλαίσιο $\{B\}$ ταυτίζεται με το πλαίσιο $\{A\}$ και το στρέψουμε γύρω από τον άξονα x του $\{A\}$ κατά γωνία γ, έπειτα το στρέψουμε γύρω από τον άξονα y του $\{A\}$ κατά γωνία β και μετά γύρω από τον άξονα z του $\{A\}$ κατά γωνία α, καταλήγουμε σε ένα πλαίσιο με προσανατολισμό $R_{ab}(\gamma, \beta, \alpha)$. Εφόσον όλες οι στροφές είναι βασικές στροφές που γίνονται γύρω από τους κύριους άξονες του ακίνητου συστήματος, η σύνθετη στροφή βρίσκεται εύκολα με τον κατά σειρά πολλαπλασιασμό από αριστερά με τον πίνακα της αντίστοιχης βασικής στροφής, δηλαδή: $\mathrm{R_{ab}}(\gamma,\beta,\alpha)_{\mathrm{xyz}} = \mathrm{Rot}(\mathrm{z},\alpha)\mathrm{Rot}(\mathrm{y},\beta)\mathrm{Rot}(\mathrm{x},\gamma)$

$$\mathrm{R_{ab}}(\gamma,\beta,\alpha)_{\mathrm{XYZ}} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_\alpha\mathrm{c}_\beta & \mathrm{c}_\alpha\mathrm{s}_\beta\mathrm{s}_\gamma - \mathrm{s}_\alpha\mathrm{c}_\gamma & \mathrm{c}_\alpha\mathrm{s}_\beta\mathrm{c}_\gamma + \mathrm{s}_\alpha\mathrm{s}_\gamma \\ \mathrm{s}_\alpha\mathrm{c}_\beta & \mathrm{s}_\alpha\mathrm{s}_\beta\mathrm{s}_\gamma + \mathrm{c}_\alpha\mathrm{c}_\gamma & \mathrm{s}_\alpha\mathrm{s}_\beta\mathrm{c}_\gamma - \mathrm{c}_\alpha\mathrm{s}_\gamma \\ -\mathrm{s}_\beta & \mathrm{c}_\beta\mathrm{s}_\gamma & \mathrm{c}_\beta\mathrm{c}_\gamma \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Οι τρεις γωνίες μπορούν να περιγράψουν πλήρως τον προσανατολισμό και ονομάζονται γωνίες XYZ γύρω από σταθερούς άξονες. Διαφορετικά διατεταγμένα σύνολα αξόνων περιστροφής (π.χ. ZYZ) καταλήγουν σε άλλες παραμετροποιήσεις αυτής της κατηγορίας. Αυτός ο τρόπος περιγραφής του προσανατολισμού δεν είναι δόκιμος στη Ρομποτική.

2.3.2 Γωνίες Euler

Ο τρόπος περιγραφής του προσανατολισμού με τρεις γωνίες Euler είναι ο συνηθέστερος στα βιομηχανικά ρομπότ. Αν θεωρήσουμε ότι αρχικά το πλαίσιο {B} ταυτίζεται με το πλαίσιο {A} και το στρέψουμε γύρω από τον άξονα z του {B} κατά γωνία α (η γύρω από τον άξονα z του {A} που συμπίπτει με τον άξονα z του {B} στην αρχή), έπειτα το στρέψουμε γύρω από τον (νέο) άξονα y του {B} κατά γωνία β και μετά γύρω από τον (νέο) άξονα x του {B} κατά γωνία γ, καταλήγουμε σε ένα πλαίσιο με προσανατολισμό $\mathrm{R_{ab}}(\alpha,\beta,\gamma)$. Εφόσον όλες οι στροφές είναι βασικές στροφές που γίνονται γύρω από τους κύριους άξονες του κινούμενου συστήματος, η σύνθετη στροφή βρίσκεται με τον κατά σειρά πολλαπλασιασμό από δεξιά με τον πίνακα της αντίστοιχης βασικής στροφής, δηλαδή:

$$\mathrm{R_{ab}}(\alpha,\beta,\gamma)_{\mathrm{ZYX}} = \mathrm{Rot}(\mathrm{z},\alpha)\mathrm{Rot}(\mathrm{y},\beta)\mathrm{Rot}(\mathrm{x},\gamma)$$

Οι τρεις αυτές γωνίες μπορούν να περιγράψουν πλήρως τον προσανατολισμό και ονομάζονται *γωνίες Euler ZYX*. Γενικά, οι γωνίες Euler αντιστοιχούν σε βασικές στροφές γύρω από τους κύριους άξονες του κινούμενου συστήματος. Οι γωνίες Euler ZYX λέγονται επίσης και γωνίες *roll, pitch, yaw*. Παρατηρήστε ότι καταλήγουν στον ίδιο πίνακα στροφής με τις XYZ γύρω από σταθερούς άξονες (2.7).

Εποπτικό παράδειγμα: ZYX Euler, XYZ στροφή

Αναλυτικά:

$$R_{ab}(\alpha,\beta,\gamma)_{ZYX} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

Ένα **ιδιάζον σημείο** στην περιγραφή με γωνίες **Euler ZYX** είναι ο προσανατολισμός στον οποίο αντιστοιχεί η $\boldsymbol{\beta = -\pi/2}$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι γωνίες της μορφής $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{-\pi/2},\ \boldsymbol{\gamma})$ δίνουν πίνακα στροφής:

$$R_{ab}\left(\alpha,-\frac{\pi}{2},\gamma\right)_{ZYX} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\alpha+\gamma) & -\cos(\alpha+\gamma) \\ 0 & \cos(\alpha+\gamma) & -\sin(\alpha+\gamma) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\sin\psi & -\cos\psi \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η ιδιάζουσα αυτή περίπτωση σημαίνει ότι σε ένα μεταβαλλόμενο προσανατολισμό R(t), η συνεχής και ομαλή απεικόνιση των γωνιών Euler ZYX ως συνάρτηση του προσανατολισμού R μπορεί να χαθεί στο σημείο ψ διότι υπάρχουν άπειρες λύσεις για τις γωνίες που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\psi = \alpha + \gamma$$

Άλλες συνήθεις παραμετροποιήσεις γωνιών Euler χρησιμοποιούν διαφορετικά διατεταγμένα σύνολα αξόνων περιστροφής· η πιο συνηθισμένη είναι η περιγραφή με γωνίες **Euler ZYZ**:

$$R_{ab}(\alpha,\beta,\gamma)_{ZYZ} = \mathrm{Rot}(z,\alpha,\mathrm{Rot}(y,\beta)\mathrm{Rot}(z,\gamma)$$

Αναλυτικά:

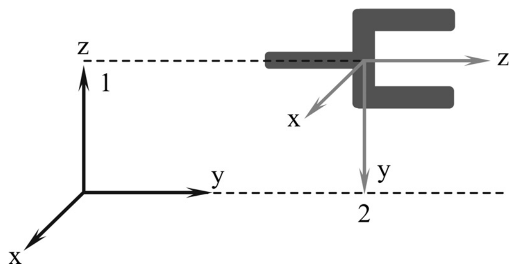
$$R_{ab}(\alpha,\beta,\gamma)_{ZYZ} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

Εποπτικό παράδειγμα: ZYZ Euler

Ιδιάζον σημείο στην περιγραφή με γωνίες Euler ZYZ είναι ο προσανατολισμός R $=$ I. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι γωνίες της μορφής $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}, -\boldsymbol{a})$ δίνουν $\mathrm{R}_{\mathrm{ab}}(a, 0, -a)_{\mathrm{ZYZ}} = \mathrm{I}$ και άρα υπάρχουν άπειρες περιγραφές για τον μοναδιαίο προσανατολισμό. Επομένως, σε ένα μεταβαλλόμενο προσανατολισμό R(t) η συνεχής και ομαλή απεικόνιση των γωνιών Euler ZYZ ως συνάρτηση του προσανατολισμού R μπορεί να χαθεί στο σημείο R $=$ I.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2

Περιγράψτε τη θέση και τον προσανατολισμό της αρπάγης του ρομπότ στο σχήμα με: (i) το άνυσμα θέσης και τις γωνίες στροφής γύρω από τους σταθερούς XYZ άξονες, (ii) το άνυσμα θέσης και τις ZYZ γωνίες Euler, (iii) το άνυσμα θέσης και τον πίνακα στροφής.



Απάντηση:

$$(i) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, (-90^\circ \quad 0 \quad 0), \qquad (ii) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, (90^\circ \quad 90^\circ \quad -90^\circ),$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

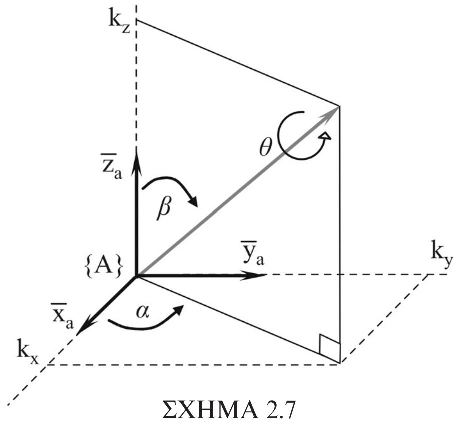
2.3.3 Γωνία στροφής γύρω από ισοδύναμο άξονα

Σύμφωνα με το θεώρημα του Euler, κάθε προσανατολισμός $\mathrm{R} \in SO(3)$ μπορεί να εκφραστεί από μία στροφή κατά μία γωνία $\theta \in (0, 2\pi)$ γύρω από έναν κατάλληλο σταθερό άξονα $k \in \mathbb{R}^3$. Έστω

$$k = [k_x \; k_y \; k_z]^T$$

είναι ένα μοναδιαίο άνυσμα εκφρασμένο στο πλαίσιο {A} γύρω από το οποίο θέλουμε να στραφούμε κατά γωνία θ (Σχήμα 2.7).

Εποπτικό παράδειγμα: Rot(k, a)



ΣΧΗΜΑ 2.7

Ο ευκολότερος τρόπος για να παράγουμε τον πίνακα στροφής $R_{k,\theta}$ είναι να στρέψουμε το άνυσμα k ώστε να ταυτιστεί με έναν από τους κύριους άξονες του {A}, έστω τον z, μετά να στραφούμε κατά γωνία θ και έπειτα να στρέψουμε τον k πίσω στη θέση του. Σύμφωνα με το σχήμα η ταύτιση του k με τον z γίνεται με μία στροφή γύρω από τον z κατά $-\alpha$, ακολουθούμενη με μία στροφή γύρω από τον y κατά γωνία $-\beta$. Καθώς όλες οι στροφές γίνονται γύρω από τους άξονες του σταθερού πλαισίου {A}, ο πίνακας στροφής δίνεται από την παρακάτω σύνθεση βασικών στροφών:

$$R_{k,\theta} = \mathrm{Rot}(z,\alpha)\mathrm{Rot}(y,\beta)\mathrm{Rot}(z,\theta)\mathrm{Rot}(y,-\beta)\mathrm{Rot}(z,-\alpha)$$

Μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι:

$$\sin\alpha = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}},$$

$$\sin\beta = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \qquad \cos\beta = k_z$$

και, αντικαθιστώντας αυτά τα μεγέθη στην παραπάνω έκφραση μετά από πράξεις, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$R_{k,\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2 v_\theta + c_\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c_\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

όπου $v_\theta = 1 - c_\theta$.

Έστω ένας πίνακας $R \in SO(3)$ με στοιχεία (r_{ij}), τότε στην ισοδύναμη έκφραση άξονα-γωνίας, ο άξονας περιστροφής k και η γωνία θ αποδεικνύεται ότι δίνονται από τις σχέσεις:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{Tr(R) - 1}{2}\right), \quad k = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

όπου Tr(R) είναι το ίχνος του πίνακα R, δηλαδή

$$Tr(R) = r_{11} + r_{22} + r_{33}$$

Παρατηρούμε ότι στην εύρεση του θ θα μπορούσαν να επιλεγούν τιμές $\theta \pm 2\pi n$ ή $-\theta \pm 2\pi n$, και επομένως η αντιστοιχία του πίνακα στροφής με την έκφραση άξονα-γωνίας δεν είναι μοναδική. Εάν στις προηγούμενες σχέσεις επιλεχθεί η γωνία $2\pi - \theta$, τότε ο άξονας που βρίσκουμε είναι ο $-k$. Επίσης, αν $R = I$, $Tr(R) = 3$, και άρα $\theta = 0$ και ο k μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα. Επομένως:

1. Η περιγραφή ενός προσανατολισμού με μια γωνία γύρω από ισοδύναμο άξονα **δεν είναι μοναδική**: $R_{k,\theta} = R_{-k,-\theta}$.
2. **Ιδιάζοντα σημεία:** Για $R_{k,\theta} = I$, $\theta = 0$ και τότε ο άξονας περιστροφής k μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3

Το πλαίσιο {B} έχει προέλθει από το πλαίσιο {A} με δύο στροφές ως προς άξονες που ορίζονται με τον εξής τρόπο: η πρώτη στροφή γίνεται γύρω από έναν γενικευμένο άξονα k κατά γωνία θ και η δεύτερη στροφή γύρω από τον άξονα z του κινούμενου πλαισίου κατά γωνία φ. Ο γενικευμένος άξονας k προκύπτει από τη στροφή του άξονα y του