Κεφάλαιο 3

Οικονομική Ανάπτυξη

Στη ανάλυση του βασικού μοντέλου υποθέσαμε ότι η μακροπρόθεσμη ισορροπία της οικονομίας θα είναι στατική. Μια πιο ρεαλιστική περιγραφή της πραγματικότητας μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι περισσότερες οικονομίες είναι αναπτυσσόμενες μέσα στο χρόνο και μακροπρόθεσμα το ρυθμός ανάπτυξης είναι θετικός και σταθερός. Με άλλα λόγια, η κατάσταση ισορροπίας αποτελεί ένα δρόμο που περιέχει ανάπτυξη.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως πρέπει να τροποποιήσουμε τη προηγούμενη ανάλυση για να συμπεριλάβουμε την *ισορροπημένη ανάπτυξη*. Έτσι θα μπορέσουμε να μεθερμηνεύσουμε το βασικό μοντέλο σαν το εργαλείο που αναπαριστά τη συμπεριφορά της οικονομίας γύρω από το δρόμο της ισορροπημένης ανάπτυξης.

Υπάρχουν τρεις βασικές αιτίες για την οικονομική ανάπτυξη. Η αύξηση του κεφαλαίου, η πρόοδος της τεχνολογίας και η εξέλιξη των *παραγωγικών δυνάμεων*. Οι ώρες εργασίας τείνουν προς συρρίκνωση αλλά θα θεωρήσουμε ότι είναι σταθερές. Θα μπορούσαμε να επιχειρηματολογήσουμε ότι οι τεχνολογικές αλλαγές σχετίζονται με την ανάπτυξη των παραγωγικών δυνάμεων μέσω εκπαίδευσης και έρευνας. Επομένως η οικονομική ανάπτυξη μπορεί να χρεωθεί στην εργασία και όχι στο κεφάλαιο. Αυτή είναι η βάση των ενδογενών θεωριών της οικονομικής ανάπτυξης.

Παρόλα αυτά, θα προχωρήσουμε θεωρώντας ότι η *τεχνική πρόοδος* είναι εξωγενής με σταθερό ρυθμό μ. Η αύξηση του πληθυσμού έχει επηρεάσει διάφορες χώρες σε διάφορες εποχές. Άλλοτε αυτή η αύξηση συμβάλει καθοριστικά στην ανάπτυξη, άλλες φορές δεν είναι σημαντική σε σχέση με τη συγκέντρωση κεφαλαίου. Θα θεωρήσουμε ότι ο πληθυσμός αυξάνεται με σταθερό ρυθμό n.

3.1 Διαδικασία ανάπτυξης

Τώρα θα ασχοληθούμε με τη τροποποίηση της προηγούμενης ανάλυσης που υπέθετε μηδενική ανάπτυξη. Συγκεκριμένα θα κάνουμε τρεις αλλαγές. Όλες επηρεάζουν τη συνάρτηση παραγωγής που τώρα παίρνει τη μορφή $Y_t = F(K_t, N_t, t)$. Χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για το συνολικό εισόδημα, κεφάλαιο και εργασία και μικρά γράμματα για τις αντίστοιχες τιμές κατά κεφαλήν. Προηγούμενα, το εισόδημα και το κεφάλαιο εμφανίζονταν σε κατά κεφαλήν μορφή. Πρώτα, παίρνουμε υπόψη το μέγεθος του πληθυσμού N_t και υποθέτουμε ότι όλος ο πληθυσμός εργάζεται. Μετά εισάγουμε το συνολικό εισόδημα της οικονομίας Y_t και το συνολικό κεφάλαιο K_t. Στη συνέχεια επιτρέπουμε η συνάρτηση παραγωγής να αυξάνει με το χρόνο με σταθερό ρυθμό μ, επομένως ο χρόνος t συμπεριλαμβάνεται μέσα στη συνάρτηση παραγωγής. Αυτό το κάνουμε για να περιγράψουμε τη τεχνολογική πρόοδο. Με αυτή τη διατύπωση δεχόμαστε ότι η τεχνική πρόοδος είναι εξωγενής. Δηλαδή δεν είναι αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης οικονομικής απόφασης και δεν υπάρχει κόστος εισαγωγής της.

Για να κάνουμε τα πράγματα πιο ξεκάθαρα, θα δεχθούμε ότι η συνάρτηση παραγωγής έχει τη μορφή Cobb-Douglas $Y_t = (1+\mu)^t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$. Αυτή η έκφραση σημαίνει ότι η τεχνική πρόοδος είναι ουδέτερη και όχι μεροληπτική ή σχετιζόμενη με κάποιο πολλαπλασιαστικό παράγοντα. Έτσι αυξάνει τη παραγωγή και με τους δύο παράγοντες.

Η συνάρτηση παραγωγής μπορεί να γραφεί σε κατά κεφαλήν όρους ως εξής

$$y_t = (1+\mu)^t \, k_t^{\alpha}\,, \tag{3.1.1}$$

όπου $y_t = Y_t/N_t$ και $k_t = K_t/N_t$.

Η ταυτότητα του εθνικού εισοδήματος γίνεται $Y_t = C_t + I_t$, όπου το C_t είναι η συνολική κατανάλωση και το I_t είναι η συνολική επένδυση και η εξίσωση της συσσώρευσης κεφαλαίου είναι $\Delta K_{t+1} = I_t - \delta\, K_t$. Καθώς ισχύει $\Delta N_{t+1}/N_t = n$, παίρνουμε $N_t = (1+n)^t\, N_0$, όπου το N_0 παριστά τον πληθυσμό στην αρχική χρονική περίοδο.

3.2 Μοντέλο ανάπτυξης Solow-Swan

Η *Θεωρία Solow-Swan* για την ανάπτυξη είναι παρόμοια με τον χρυσού κανόνα. Η αρχική ιδέα ήταν να δώσει ένα μοντέλο ισορροπημένης ανάπτυξης σε συνθήκες εξωγενούς τεχνολογικής μεταβολής.

Ο *ρυθμός αποταμίευσης* στην οικονομία είναι

$$s_t = 1 - \frac{C_t}{Y_t} = 1 - \frac{c_t}{y_t}\,.$$

Η βασική υπόθεση στο μοντέλο Solow-Swan είναι ότι η οικονομία έχει σταθερό ρυθμό αποταμίευσης, έτσι ώστε να ισχύει $s_t = s$.

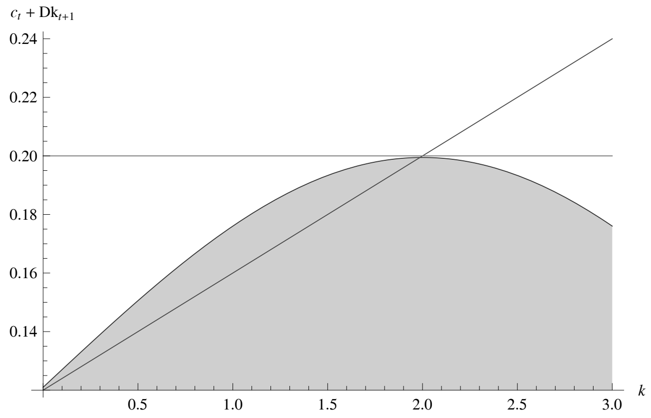
Εάν όλες οι αποταμιεύσεις επενδυθούν έχουμε

$$s_t = \frac{I_t}{Y_t} = i_t\,.$$

Καθώς ο ρυθμός αποταμίευσης είναι σταθερός, το ίδιο σταθερός είναι και ο ρυθμός επένδυσης.

Ο *ρυθμός συσσώρευσης κεφαλαίου* γίνεται

$$\frac{\Delta K_{t+1}}{K_t} = \frac{I_t}{K_t} - \delta = \frac{I_t/Y_t}{K_t/Y_t} - \delta = s\,\frac{Y_t/N_t}{K_t/N_t} - \delta = s\frac{y_t}{k_t} - \delta\,.$$



Σχήμα 3.1: Συσσώρευση κεφαλαίου με $\widetilde{k} = 2.0$ και $\gamma\widetilde{k} = 2.0$.

Επομένως ο ρυθμός αύξησης του κατά κεφαλήν κεφαλαίου είναι

$$\frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} = \frac{\Delta K_{t+1}}{K_t} - \frac{\Delta N_{t+1}}{N_t} = s\,\frac{y_t}{k_t} - (\delta + n)\,,$$

και έτσι η εξίσωση συσσώρευσης κεφαλαίου παίρνει τη μορφή

$$\Delta k_{t+1} = s\,y_t - (\delta + n)\,k_t\,. \tag{3.2.1}$$

Η εξίσωση (3.2.1) δηλώνει ότι η μεταβολή του κατά κεφαλήν κεφαλαίου ισούται με τη μικτή επένδυση κατά κεφαλή μείον τη υποτίμηση και μια προσαρμογή που επιτρέπει να παραμείνει μπροστά από την αύξηση του πληθυσμού, λόγω του ότι το κατά κεφαλήν κεφάλαιο πρέπει να αυξάνει πολύ γρήγορα.

Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής του κατά κεφαλήν κεφαλαίου k_t, που η οικονομία μπορεί να αντέξει;

Στο Σχήμα 3.1 φαίνεται η καμπύλη της $\Delta k_{t+1} = s\,y_t - (\delta + n)\,k_t$ ως προς το κατά κεφαλήν κεφάλαιο k_t. Η κλίση της ευθείας γραμμής $\Delta k_{t+1} = \gamma\,k_t$ που περνά από την αρχή των αξόνων συμβολίζει τον ρυθμό συσσώρευσης κεφαλαίου, που είναι ίσος με γ. Ο μέγιστος ρυθμός συσσώρευσης παρατηρείται στην αρχή των αξόνων, όταν $k_t = 0$. Το υψηλότερο σημείο της καμπύλης αναπαριστά τη μέγιστη τιμή του Δk_{t+1} που είναι πραγματοποιήσιμη, αλλά όχι με το μέγιστο ρυθμό συσσώρευσης. Η ευθεία γραμμή από την αρχή των αξόνων περνά από αυτό το σημείο. Ας υποθέσουμε ότι η τιμή του κατά κεφαλήν κεφαλαίου σε αυτό το σημείο είναι $\widetilde{k}$. Επιλέγοντας ένα $k_t > \widetilde{k}$ θα είναι υποβέλτιστο καθώς ο ρυθμός συσσώρευσης του k_t θα είναι χαμηλότερος απ΄ ότι χρειάζεται. Επιλέγοντας $k_t < \widetilde{k}$ θα έδινε μεγαλύτερο ρυθμό συσσώρευσης του k_t αλλά αυτό δεν θα ήταν βιώσιμο διότι το εισόδημα θα ήταν σε χαμηλότερο επίπεδο.

Η σχέση μεταξύ του ρυθμού συσσώρευσης κεφαλαίου και του επιπέδου του φαίνεται τυπικά χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο ρυθμός συσσώρευσης κεφαλαίου είναι συνάρτηση του μεγέθους του κεφαλαίου

$$\gamma(k_t) = s\,\frac{y_t}{k_t} - (\delta + n)\,.$$

Τότε βρίσκουμε

$$\frac{d\gamma(k_t)}{dk_t} = \frac{s}{k_t}\left[\frac{\partial y_t}{\partial k_t} - \frac{y_t}{k_t}\right] = -\frac{s\,y_t}{k_t^2}\left[1 - \frac{k_t}{y_t}\frac{\partial y_t}{\partial k_t}\right] < 0\,,$$

καθώς η *ελαστικότητα του κεφαλαίου* ικανοποιεί την ανισότητα

$$\frac{k_t}{y_t}\frac{\partial y_t}{\partial k_t} < 1\,.$$

Δηλαδή, εξ αιτίας της φθίνουσας παραγωγής του κεφαλαίου, όσο μεγαλύτερο είναι το κεφάλαιο τόσο μικρότερος γίνεται ο ρυθμός συσσώρευσής του.

Ας δούμε μερικές συνέπειες σε σχέση με την οικονομική ανάπτυξη. Εφόσον

$$\frac{\partial \gamma}{\partial k} < 0\,,$$

η οικονομία είναι λιγότερο αναπτυγμένη αλλά αναπτύσσεται γρηγορότερα από τις πιο αναπτυγμένες χώρες.

Εφόσον

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial k} &= \frac{y}{k} > 0\,,\\ \frac{\partial\gamma}{\partial\delta} &= \frac{\partial\gamma}{\partial n} < 0\,,\end{aligned}$$

ένας υψηλότερος ρυθμός αποταμίευσης και χαμηλότερο επιτόκιο υποτίμησης και πληθυσμιακή αύξηση εξασφαλίζουν αύξηση του γ.

Η τεχνική πρόοδος θα μετατοπίσει τη συνάρτηση παραγωγής προς τα πάνω σε κάθε χρονική περίοδο και θα μεγαλώσει τον λόγο y/k. Εφόσον

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y/k} = s > 0\,,$$

θα έχουμε αύξηση του γ.

Υψηλότεροι ρυθμοί τεχνικής προόδου στις αναπτυγμένες οικονομίες εξασφαλίζει τη διατήρηση των ρυθμών οικονομικής ανάπτυξης.

Ο ρυθμός αύξησης του κατά κεφαλήν εισοδήματος ισούται με

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y_{t+1}}{y_t} &= \frac{\Delta Y_{t+1}}{Y_t} - \frac{\Delta N_{t+1}}{Nt} = \mu + \alpha\left[\frac{\Delta K_{t+1}}{K_t} - \frac{\Delta N_{t+1}}{N_t}\right]\\ &= \mu + \alpha\,\frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} = \mu + \alpha\left[s\frac{y_t}{k_t} - (\delta + n)\right] = \mu + \alpha\,\gamma\,.\end{aligned}$$

Καθώς $c_t = (1-\gamma)\,y_t$, ο ρυθμός αύξησης της κατά κεφαλήν κατανάλωσης δίνεται από

$$\frac{\Delta c_{t+1}}{c_t} = \frac{\Delta y_{t+1}}{y_t}\,.$$

Επομένως, ενώ ο ρυθμός αύξησης του κατά κεφαλήν εισοδήματος και της κατά κεφαλήν κατανάλωσης είναι τα ίδια, ο ρυθμός συσσώρευσης του κατά κεφαλήν κεφαλαίου μπορεί να είναι διαφορετικός. Αυτή η περίπτωση ονομάζεται *ανισόρροπη ανάπτυξη*.

Η ισορροπημένη ανάπτυξη της οικονομίας απαιτεί οι ρυθμοί αύξησης του εισοδήματος, της κατανάλωσης και του κεφαλαίου να είναι ίσοι. Καθότι,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y_{t+1}}{y_t} &= \frac{\Delta c_{t+1}}{c_t} = \mu + \alpha\,\gamma\,,\\ \frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} &= \gamma\,,\end{aligned}$$

η ισορροπημένη ανάπτυξη προϋποθέτει ότι

$$\gamma = \frac{\mu}{1-\alpha}\,.$$

Άρα, σε αυτό το μοντέλο η ισορροπημένη ανάπτυξη δεν είναι δυνατή παρά μόνο εάν υπάρχει τεχνική πρόοδος.

3.3 Θεωρία βέλτιστης ανάπτυξης

Η θεωρία της βέλτιστης ανάπτυξης αποτελεί γενίκευση της μεθόδου της βέλτιστης λύσης. Αντί να εξετάσουμε πως να μεγιστοποιήσουμε το κατά κεφαλήν εισόδημα, θα προσπαθήσουμε να βελτιστοποιήσουμε το επίπεδο της κατά κεφαλήν κατανάλωσης όταν υπάρχει τεχνική πρόοδος και αύξηση πληθυσμού. Στο βασικό στατικό μοντέλο υποθέσαμε ότι δεν υπάρχει ούτε τεχνική πρόοδος ούτε αύξηση του πληθυσμού. Έτσι η μακροπρόθεσμη λύση ήταν μια στατική ισορροπία, ενώ τώρα αναζητούμε μια *αναπτυξιακή ισορροπία*. Με άλλα λόγια η προηγούμενη λύση $\left(\widetilde{c}, \widetilde{k}\right)$ θα γίνει $\left(\widetilde{c}_t, \widetilde{k}_t\right)$ καθώς η ισορροπία αναπτύσσεται μέσα στο χρόνο.

Το κλειδί για την εύρεση της αναπτυξιακής λύσης είναι να αναλύσουμε πάλι το προηγούμενο μοντέλο κλειστής οικονομίας παίρνοντας υπόψη τις αλλαγές που έγιναν στο μοντέλο. Κάνοντας αυτή την ανάλυση, μπορεί να φανεί ότι οι δύο λύσεις είναι στην ουσία ίδιες. Στην αρχή θα ξαναγράψουμε τη συνάρτηση παραγωγής στη μορφή

$$Y_t = K_t^{\alpha}\,\left[(1+\mu)^{t/(1-\alpha)}\,N_t\right]^{1-\alpha} = K_t^{\alpha}\,\left[\widehat{N}_t\right]^{1-\alpha}\,,$$

όπου το $\widehat{N}_t = (1+\mu)^{t/(1-\alpha)}\, N_t$ αναπαριστά τις αποτελεσματικές παραγωγικές δυνάμεις. Αυτό ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι η τεχνική πρόοδος προάγει την εργασιακή παραγωγικότητα. Ας θυμηθούμε ότι κάθε άτομο από τον πληθυσμό θεωρείται εργαζόμενο και ότι το εργατικό δυναμικό ικανοποιεί τη σχέση $N_t = (1+n)^t\, N_0$, επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\widehat{N}_t = \left[(1+\mu)^{1/(1-\alpha)}\right]^t (1+n)^t\, N_0 \cong (1+\eta)^t\, N_0\,,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό και παραπέρα έχουμε τη προσέγγιση

$$\begin{aligned} (1+\mu)^{1/(1-\alpha)}\,(1+n) &= 1+\eta\,, \\ \eta &\cong n + \frac{\mu}{1-\alpha}\,. \end{aligned}$$

Τώρα ορίζουμε το εισόδημα και το κεφάλαιο ανά μονάδα παραγωγικής δύναμης, που δίνει

$$\begin{aligned} \widehat{y}_t &= \frac{Y_t}{\widehat{N}_t} = \frac{Y_t}{\left[(1+\mu)^{1/(1-\alpha)}\,(1+n)\right]^t\, N_t} = \frac{Y_t}{(1+\eta)^t\, N_0}\,, \\ \widehat{k}_t &= \frac{K_t}{\widehat{N}_t} = \frac{K_t}{\left[(1+\mu)^{1/(1-\alpha)}\,(1+n)\right]^t\, N_t} = \frac{K_t}{(1+\eta)^t\, N_0}\,. \end{aligned}$$

Οπότε η συνάρτηση παραγωγής γράφεται σαν $\widehat{y}_t = F(\widehat{k}_t) = \widehat{k}_t^{\,\alpha}$. Έτσι εργαζόμενοι στο εισόδημα και το κεφάλαιο ανά μονάδα παραγωγικής δύναμης, η συνάρτηση παραγωγής πήρε την ίδια μορφή που είχαμε χρησιμοποιήσει προηγουμένως (βλέπε σχέση (3.1.1)).

Η ταυτότητα του εθνικού εισοδήματος δεν επηρεάζεται και παραμένει στη μορφή $\widehat{y}_t = \widehat{c}_t + \widehat{i}_t$, όπου

$$\begin{aligned} \widehat{c}_t &= \frac{C_t}{\widehat{N}_t} = \frac{C_t}{(1+\eta)^t\, N_0}\,, \\ \widehat{i}_t &= \frac{I_t}{\widehat{N}_t} = \frac{I_t}{(1+\eta)^t\, N_0}\,. \end{aligned}$$

Διαιρώντας την εξίσωση συσσώρευσης κεφαλαίου $K_{t+1} = I_t + (1-\delta)\, K_t$, με το $\widehat{N}_t$ βρίσκουμε $\left[(1+n)\,(1+\mu)^{1/(1-\alpha)}\right]\widehat{k}_{t+1} = \widehat{i}_t + (1-\delta)\,\widehat{k}_t$. Επομένως έχουμε $(1+\eta)\,\widehat{k}_{t+1} = \widehat{i}_t + (1-\delta)\,\widehat{k}_t$.

Η οικονομία προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το άθροισμα

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\iota)^s}\, u(C_{t+s})\,,$$

υπό τον περιορισμό $F(K_t) = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)\, K_t$. Η συνάρτηση ωφελιμότητας $u(C_t)$ μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση του c_t. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση ωφελιμότητας σε μορφή δύναμης

$$\begin{aligned} u(C_t) &= \frac{C_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} = \frac{\left[(1+\eta)^t\, N_0\, \widehat{c}_t\right]^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \\ &= \left(\frac{\widehat{c}_t^{\,1-\sigma} - \left[(1+\eta)^t\, N_0\right]^{-(1-\sigma)}}{1-\sigma}\right) \left[(1+\eta)^t\, N_0\right]^{1-\sigma} . \end{aligned}$$

Θέτοντας $N_0 = 1$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το πρόβλημα της οικονομίας διατυπώνεται ως εξής

$$\max_{c_{t+s},\, k_{t+s}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1+\eta)^{(1-\sigma)\, s}}{(1+\iota)^s} \left(\frac{\widehat{c}_{t+s}^{\,1-\sigma} - (1+\eta)^{-(1-\sigma)(t+s)}}{1-\sigma}\right) (1+\eta)^{(1-\sigma)t}$$

υπό τον περιορισμό $\widehat{k}_t^{\,\alpha} = \widehat{c}_t + (1+\eta)\, \widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\, \widehat{k}_t$.

Η συνάρτηση Lagrange συνάρτηση είναι στη μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t &= \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{(1+\eta)^{(1-\sigma)\, s}}{(1+\iota)^s} \left(\frac{\widehat{c}_{t+s}^{\,1-\sigma} - (1+\eta)^{-(1-\sigma)\,(t+s)}}{1-\sigma}\right) (1+\eta)^{(1-\sigma)\, t} \right. \\ & \left. +\lambda_{t+s} \left[\widehat{k}_{t+s}^{\alpha} - \widehat{c}_{t+s} - (1+\eta)\, \widehat{k}_{t+s+1} + (1-\delta)\, \widehat{k}_{t+s}\right] \right\}. \end{aligned}$$

Έτσι οι πρώτης τάξης συνθήκες γίνονται

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \widehat{c}_{t+s}} &= \frac{(1+\eta)^{(1-\sigma)\, s}}{(1+\iota)^s}\, \widehat{c}_{t+s}^{\,-\sigma}\, (1+\eta)^{(1-\sigma)\, t} - \lambda_{t+s} = 0\,, \qquad s \geq 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \widehat{k}_{t+s}} &= \lambda_{t+s} \left(\alpha\, \widehat{k}_{t+s}^{\alpha-1} + 1 - \delta\right) - \lambda_{t+s-1}\, (1+\eta) = 0\,, \qquad s > 0\,. \end{aligned}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι για εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας παίρνουμε

$$\frac{(1+\eta)^{(1-\sigma)\,s}\,u'_{t+1}}{(1+\iota)^s\,u'_t} = \frac{(1+\eta)^{(1-\sigma)\,s}}{(1+\iota)^s}\left(\frac{\widehat{c}_{t+1}}{\widehat{c}_t}\right)^{-\sigma},$$

οπότε η εξίσωση Euler βρίσκεται στη μορφή

$$\frac{(1+\eta)^{1-\sigma}}{1+\iota}\left(\frac{\widehat{c}_{t+1}}{\widehat{c}_t}\right)^{-\sigma}\left(\alpha\,\widehat{k}_{t+s}^{\alpha-1}+1-\delta\right) = 1+\eta\,.$$

Αυτή είναι παρόμοια με την εξίσωση Euler στη στατική οικονομία που είδαμε στη σχέση (1.4.1) και συμπίπτει για $\eta = 0$.

Υπό συνθήκες ανάπτυξης η συνθήκη ευσταθούς ισορροπίας είναι το γεγονός ότι οι ρυθμοί ανάπτυξης της κατανάλωσης και του κεφαλαίου ανά μονάδα παραγωγικής δύναμης είναι μηδέν. Δηλαδή $\Delta\widehat{c}_{t+1} = \Delta\widehat{k}_{t+1} = 0$ για κάθε χρονική περίοδο. Σε συνθήκες απουσίας ανάπτυξης αυτή γίνεται $\Delta c_{t+1} = \Delta k_{t+1} = 0$, που είναι η συνθήκη ισορροπίας στη στατική οικονομία. Επομένως στην ευσταθή ανάπτυξη παίρνουμε

$$\frac{(1+\eta)^{1-\sigma}}{1+\iota}\left(\alpha\,\widehat{k}_{t+s}^{\alpha-1}+1-\delta\right) = 1+\eta\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} F'\left(\widetilde{\widehat{k}}\right) &= \alpha\,\widetilde{\widehat{k}}^{\alpha-1} = \delta - 1 + \frac{(1+\eta)\,(1+\iota)}{(1+\eta)^{1-\sigma}} \\ &\cong \delta + \iota + \sigma\left(n + \frac{\mu}{1-\alpha}\right), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανάπτυξη κατά Taylor πρώτης τάξης

$$\eta = n + \frac{\mu}{1-\alpha}\,.$$

Το βέλτιστο επίπεδο του $\widetilde{\widehat{k}}$ μπορεί να συγκριθεί με το μοντέλο χωρίς ανάπτυξη θέτοντας $n = \mu = 0$. Αυτό θα έδινε πάλι το $F'\left(\widetilde{\widehat{k}}\right) = \delta + \iota$.

Έχουμε εξειδικεύσει αρκετά το μοντέλο ώστε να είμαστε σε θέση να πάρουμε μια έκφραση του $\widehat{\widetilde{k}}$ σε κλειστή μορφή. Η προσέγγιση αυτή δίνει

$$\widetilde{\widehat{k}} \cong \left(\frac{\sigma \left[n + \dfrac{\mu}{1-\alpha} \right] + \delta + \iota}{\alpha} \right)^{-1/(1-\alpha)} .$$

Αν και το κεφάλαιο ανά μονάδα παραγωγικής δύναμης είναι σταθερό σε όλη τη διαδρομή της ισορροπίας, το κατά κεφαλήν κεφάλαιο K_t/N_t αυξάνει με τη παρέλευση του χρόνου. Καθώς έχουμε

$$\widehat{k}_t = \frac{K_t}{\left([1+\mu]^{1/(1-\alpha)} \right)^t N_t} ,$$

έπεται ότι η βέλτιστη διαδρομή για το κατά κεφαλήν κεφάλαιο είναι

$$\frac{K_t}{N_t} = \left(\frac{\sigma \left[n + \dfrac{\mu}{1-\alpha} \right] + \delta + \iota}{\alpha} \right)^{-1/(1-\alpha)} \left([1+\mu]^{1/(1-\alpha)} \right)^t .$$

Άρα το K_t/N_t αυξάνει με ρυθμό περίπου $\mu/(1-\alpha)$.

Ο βέλτιστος ρυθμός αύξησης του κατά κεφαλήν εισοδήματος Y_t/N_t προσδιορίζεται από τον τύπο

$$\widehat{y}_t = \frac{Y_t}{\left([1+\mu]^{1/(1-\alpha)} \right)^t N_t} .$$

Καθώς $\widehat{y}_t = \widehat{k}_t^{\alpha}$ και $\Delta \widehat{k}_{t+1} = 0$ προκύπτει επίσης ότι $\Delta \widehat{y}_{t+1} = 0$. Έτσι, ο ρυθμός ανάπτυξης Y_t/N_t είναι επίσης περίπου $\mu/(1-\alpha)$. Ο βέλτιστος ρυθμός αύξησης της κατά κεφαλήν κατανάλωσης C_t/N_t, μπορεί να υπολογισθεί από τη συνθήκη $\Delta c_{t+1} = 0$ και από τη σχέση

$$\widehat{c}_t = \frac{C_t}{\left([1+\mu]^{1/(1-\alpha)} \right)^t N_t} .$$

Άρα ο ρυθμός αύξησης του C_t/N_t είναι πάλι περίπου $\mu/(1-\alpha)$. Οι ρυθμοί αύξησης του συνολικού εισοδήματος, του συνολικού κεφαλαίου και της συνολικής κατανάλωσης υπολογίζονται παίρνοντας υπόψη την αύξηση του πληθυσμού. Προσθέτοντας και τον ρυθμό αύξησης του πληθυσμού παίρνουμε σαν κοινό ρυθμό ανάπτυξης το $\eta = n + \mu/(1-\alpha)$. Καθώς οι ρυθμοί ανάπτυξης του εισοδήματος, του κεφαλαίου και της κατανάλωσης είναι ίδιοι, η βέλτιστη λύση είναι μια διαδρομή ισορροπημένης ανάπτυξης.

Οι τεχνικές δυσκολίες της λύσης του προβλήματος της βέλτιστης ανάπτυξης μπορεί να επισκιάσουν την απλότητα της επέκτασης από τη περίπτωση της στατικής λύσης. Επειδή η ανάπτυξη είναι ισορροπημένη, η διαδρομή της ισορροπημένης αύξησης της ζήτησης, του κεφαλαίου, του εισοδήματος και των επενδύσεων είναι ίδια. Όλα αναπτύσσονται με σταθερό ρυθμό η. Τα κατά κεφαλή μέτρα αυτών των μεταβλητών, που έχουμε εισάγει μπορούν να επανεξετασθούν σαν ανάλογα προς τις αποκλίσεις από τη βέλτιστη διαδρομή ανάπτυξης. Για παράδειγμα, εάν το εισόδημα στη βέλτιστη διαδρομή ανάπτυξης είναι

$$\widetilde{Y}_t = (1+\eta)^t\, Y_0 = (1+\eta)^t\, N_0\, \frac{Y_0}{N_0} = \widehat{N}_t \frac{Y_0}{N_0}\,,$$

τότε έχουμε

$$\widetilde{\widetilde{y}}_t = \frac{Y_t}{\widehat{N}_t} = \frac{Y_t}{\widetilde{Y}_t}\frac{Y_0}{N_0}\,.$$

Σαν αποτέλεσμα έχουμε την ίδια λύση με αυτή για μηδενική ανάπτυξη, όπως προηγούμενα. Αυτές οι αποκλίσεις έχουν μια λύση στατικής ισορροπίας και οι βραχυπρόθεσμες δυναμικές των αρχικών μεταβλητών του μοντέλου ορίζονται τώρα σαν αποκλίσεις από τη βέλτιστη διαδρομή ανάπτυξης αντί αποκλίσεις από τη στατική ισορροπία. Αυτή η παρατήρηση σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε όλη τη λύση στη βέλτιστη διαδρομή ανάπτυξης. Μπορούμε να δεχθούμε την απλοποίηση να εργαζόμαστε με τις στατικές λύσεις και μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό θα περιγράφει επίσης τη δυναμική συμπεριφορά σε σχέση με τη διαδρομή ευσταθούς ισορροπημένης ανάπτυξης.

Συγκρίνοντας το μοντέλο Solow-Swan με τη λύση βέλτιστης ανάπτυξης, η κύρια ομοιότητα είναι ότι στην ισορροπία και τα δύο έχουν σταθερούς ρυθμούς αποταμίευσης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο ρυθμός αποταμίευσης κατά τη διαδρομή βέλτιστης ανάπτυξης δίνεται από τον τύπο

$$s_t = 1 - \frac{C_t}{Y_t} = 1 - \frac{\widehat{c}_t}{\widehat{y}_t}\,.$$

Έτσι, η συμπεριφορά κατά τη διαδρομή βέλτιστης ανάπτυξης είναι ίδια. Η κύρια διαφορά περιορίζεται στη ότι το μοντέλο Solow-Swan υποθέτει ένα σταθερό ρυθμό αποταμίευσης σε όλες τις χρονικές περιόδους, και αυτός είναι εξωγενής ρυθμός, ενώ στο μοντέλο βέλτιστης ανάπτυξης ο ρυθμός αποταμίευσης προκύπτει από τις προτιμήσεις, τη τεχνολογία, το επιτόκιο υποτίμησης και τη πληθυσμιακή αύξηση. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κατά τη διαδρομή της βέλτιστης ανάπτυξης έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= \widehat{k}_t^{\alpha}\,, \\
\widehat{c}_t &= \widehat{k}_t^{\alpha} - (\eta+\delta)\,\widehat{k}_t\,, \\
\widehat{k}_t &= \left(\frac{\sigma\,\eta+\delta+\iota}{\alpha}\right)^{-1/(1-\alpha)}\,.
\end{aligned}$$

Επομένως, ο ρυθμός αποταμίευσης είναι η σταθερά

$$s_t = \frac{\alpha\,(\eta+\delta)}{\sigma\,\eta+\delta+\iota} = \frac{\alpha\,(n+[\mu/\{1-\alpha\}]+\delta)}{\sigma\,(n+[\mu/\{1-\alpha\}])+\delta+\iota}\,.$$

3.4 Ενδογενής ανάπτυξη

Οι προηγούμενες θεωρίες ανάγουν την οικονομική ανάπτυξη σε εξωγενή τεχνική πρόοδο και πληθυσμιακή αύξηση. Ο ρυθμός της τεχνικής προόδου θεωρείται ανεξάρτητος του ελέγχου της χώρας. Αυτό είναι μια χρήσιμη απλοποίηση αλλά δεν αποτελεί μια σωστή αποτίμηση της ανάπτυξης. Οι περισσότερες χώρες πιθανόν αποκτούν τη τεχνολογία με εισαγωγή από άλλες χώρες στη μορφή νέων προϊόντων και υιοθετούν νέες μεθόδους ανάλυσης που αναπτύχθηκαν αλλού. Ωστόσο, κάποιος κάπου αναπτύσσει τη νέα τεχνολογία.

Λόγω της διάχυσης της νέας τεχνολογίας σε όλο τον πλανήτη, που αυτό σημαίνει διαφορετικές χώρες υιοθετούν την ίδια τεχνολογία, οι χώρες με χαμηλό κόστος παραγωγής και χαμηλότερους μισθούς, θα ξεπεράσουν τις άλλες με υψηλότερο κόστος. Ο μόνος τρόπος για χώρες με υψηλούς μισθούς να συναγωνισθούν τις άλλες, είναι να συνεχίσουν τη δημιουργία νέων ανακαλύψεων πάνω στα οποία έχουν κάποιο βαθμό ισχύος επιβολής μονοπωλιακών τιμών και νέες τεχνολογίες που εξοικονομούν εργασία οπότε ελαττώνουν το κόστος παραγωγής. Οι επιπτώσεις είναι ότι η τεχνική πρόοδος ενσωματώνεται στα νέα προϊόντα, ειδικά οι νέες επενδύσεις κεφαλαίου, και ότι η τεχνική πρόοδος συμβαίνει κυρίως στις αναπτυσσόμενες χώρες, αλλά αυτό το πλεονέκτημα μπορεί να μη κρατήσει για πολύ.

Για να δημιουργηθεί μια συνεχής ροή ανακαλύψεων οι χώρες χρειάζεται να επενδύσουν σε δράσεις για την έρευνα και ανάπτυξη καθώς και σε δεξιότητες των ανθρώπινων πόρων. Με αυτόν το τρόπο η τεχνική πρόοδος παύει να αποτελεί εξωγενή παράγοντα και μετατρέπεται σε ενδογενή οικονομική απόφαση. Οι σύγχρονες θεωρίες ανάπτυξης ακολουθούν αυτή τη λογική.

Θεωρούμε κατ΄ αρχήν το μοντέλο που ονομάστηκε ΑΚ από την υπόθεση ότι η συνάρτηση παραγωγής έχει τη μορφή $Y_t = A\,K_t\,,\ A > 0$, όπου το K_t εδώ σημαίνει το μέσο συνολικό κεφάλαιο, συμπεριλαμβάνοντας και το ανθρώπινο κεφάλαιο. Παρατηρούμε επίσης ότι η τεχνική πρόοδος μπορεί να ενσωματωθεί στις νέες επενδύσεις κεφαλαίου, καθώς κάνει το νέο κεφάλαιο πιο παραγωγικό. Για παράδειγμα οι υπολογιστές κάνουν ακριβώς αυτό. Οι κρίσιμες πτυχές αυτού του μοντέλου είναι ότι δεν υπάρχει εξωγενής τεχνική πρόοδος και ότι υπάρχουν σταθερές υπό κλίμακα αποδόσεις ως προς το K_t.

Συμβολίζουμε το κατά κεφαλήν εισόδημα με y_t και το κατά κεφαλήν κεφάλαιο με k_t. Επομένως $y_t = A\,k_t$. Από τη σχέση (3.2.1) βρίσκουμε ότι ο ρυθμός συσσώρευσης του k_t ισούται με

$$\gamma(k_t) = s_t \frac{y_t}{k_t} - (\delta + n) = s_t A - (\delta + n) .$$

Εάν ο ρυθμός αποταμίευσης $s_t = s$ είναι σταθερός, τότε και ο ρυθμός συσσώρευσης είναι σταθερός. Εάν $s A > \delta + n$, τότε ο ρυθμός συσσώρευσης είναι σταθερός και θετικός. Έτσι, σε αντιδιαστολή με τη προηγούμενη περίπτωση, ο ρυθμός συσσώρευσης δεν πέφτει όσο το απόθεμα αυξάνει. Αυτό το αποτέλεσμα οφείλεται στην υπόθεση μιας σταθερής *υπό κλίμακα απόδοσης* στη συνάρτηση παραγωγής. Παρατηρούμε επίσης ότι ο ρυθμός συσσώρευσης είναι ανεξάρτητος του αρχικού επιπέδου του αποθέματος. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι χώρες, ανεξάρτητα από το επίπεδο οικονομικής ανάπτυξης, μπορούν να πετύχουν ένα σταθερό ρυθμό ανάπτυξης. Ο ρυθμός από μόνος του εξαρτάται από τις παραμέτρους s, A, δ και n.

Μια πιο σαφής αντιμετώπιση του ανθρώπινου κεφαλαίου και του ρόλου του στην οικονομική ανάπτυξη προκύπτει από τον διαχωρισμό του *ανθρώπινου κεφαλαίου* από το φυσικό κεφάλαιο. Έστω h_t συμβολίζει το ανθρώπινο κατά κεφαλήν κεφάλαιο και k_t το φυσικό κατά κεφαλήν κεφάλαιο. Υποθέτουμε ότι η κατά κεφαλήν συνάρτηση παραγωγή ισούται με $y_t = A\, k_t^{\alpha}\, h_t^{1-\alpha}\,, \quad 0 \le \alpha \le 1$. Ας σημειωθεί ότι δεν υπάρχει εξωγενής τεχνική πρόοδος. Υποθέτουμε ότι η συσσώρευση κεφαλαίου συμβαίνει όπως και πριν και χρειάζονται πραγματικοί πόροι για τη συσσώρευση ανθρώπινου κεφαλαίου. Αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \Delta k_{t+1} &= i_t^k - \delta\, k_t\,, \\ \Delta h_{t+1} &= i_t^h - \delta\, h_t\,, \end{aligned}$$

όπου τα i_t^k και i_t^h είναι τα επίπεδα της επένδυσης σε φυσικό και ανθρώπινο κεφάλαιο αντίστοιχα. Χάριν απλότητας, υποθέτουμε ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι μηδέν και το επιτόκιο υποτίμησης δ για το ανθρώπινο κεφάλαιο είναι ο ίδιος με αυτόν για το φυσικό κεφάλαιο. Οι περιορισμοί στους εθνικούς πόρους παίρνουν τη μορφή $y_t = c_t + i_t^k + i_t^h$. Ας δεχθούμε ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι στη μορφή δύναμης. Αυτό το μοντέλο ονομάζεται μοντέλο ενός τομέα διότι και οι δύο τύποι κεφαλαίου, φυσικός και ανθρώπινος, παράγονται χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνολογία.

Η βέλτιστη λύση δίνεται από μεγιστοποίηση της συνάρτησης Lagrange

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t &= \sum_{s=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(1+\iota)^s}\,\frac{c_{t+s}^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + \lambda_{t+s}\Big[A\,k_{t+s}^{\alpha}\,h_{t+s}^{1-\alpha}\right.\\ &\qquad \left. -c_{t+s} - (k_{t+s+1}+h_{t+s+1}) + (1-\delta)\,(k_{t+s}+h_{t+s})\Big]\right\}.\end{aligned}$$

Οι πρώτης τάξης συνθήκες είναι

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_{t+s}} &= \frac{1}{(1+\iota)^s}\,c_{t+s}^{-\sigma} - \lambda_{t+s} = 0\,, \qquad s \ge 0\,,\\ \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial k_{t+s}} &= \lambda_{t+s}\Big[\alpha\,A\,k_{t+s}^{\alpha-1}\,h_{t+s}^{1-\alpha} + 1 - \delta\Big] - \lambda_{t+s-1} = 0\,, \qquad s \ge 1\,,\\ \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial h_{t+s}} &= \lambda_{t+s}\Big[(1-\alpha)\,A\,k_{t+s}^{\alpha}\,h_{t+s}^{-\alpha} + 1 - \delta\Big] - \lambda_{t+s-1} = 0\,, \qquad s \ge 1\,.\end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση Euler γίνεται

$$\frac{1}{1+\iota}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\sigma}\left[\alpha\,A\left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}}\right)^{\alpha-1} + 1 - \delta\right] = 1\,,$$

και επιπλέον το κλάσμα

$$\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\,,$$

είναι σταθερό. Άρα στη κατάσταση ισορροπίας μπορούμε να γράφουμε $k_t/h_t = k/h$ και επομένως

$$\frac{1}{1+\iota}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\sigma}\left[\alpha\,A\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1} + 1 - \delta\right] = 1\,,$$

οπότε ο ρυθμός αύξησης της κατανάλωσης $\gamma(c_t)$ είναι σταθερός και δίνεται από

$$\gamma(c_t) = \Delta \ln c_{t+1} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha\,A\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1} - \delta - \iota\right].$$

Εάν ορίσουμε

$$r^k = \alpha\, A\, \left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1} - \delta = A\, \alpha^{\alpha}\, (1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta\,,$$

όπου το r^k μπορεί να θεωρηθεί σαν καθαρό επιτόκιο απόδοσης κεφαλαίου, τότε έχουμε

$$\gamma(c_t) = \frac{r^k - \iota}{\sigma}\,.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι εάν αντικαταστήσουμε στη συνάρτηση παραγωγής το αποτέλεσμα ότι ο βέλτιστος λόγος φυσικού κεφαλαίου προς ανθρώπινο κεφάλαιο είναι σταθερός, παίρνουμε την AK συνάρτηση παραγωγής στη μορφή $y_t = \widetilde{A}\, k_t$, με $\widetilde{A} = A[\alpha/(1-\alpha)]^{1-\alpha}$.

Το μοντέλο ενός τομέα μπορεί να γενικευτεί σε δύο τομείς. Το μόνο που χρειάζεται είναι θα θεωρήσουμε ότι το φυσικό και ανθρώπινο κεφάλαιο παράγεται χρησιμοποιώντας διαφορετικές τεχνολογίες. Αυτό απαιτεί νέους περιορισμούς στους πόρους όπως $y_t = c_t + i_t^k$, όπου η κατανάλωση και η φυσική επένδυση παράγονται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση παραγωγής $y_t = A\,(u\, k_t)^{\alpha}\,(v\, h_t)^{1-\alpha}\,, \quad 0 \leq \alpha,\, v,\, u \leq 1$, με u και v οι ποσοστιαίες συμμετοχές του συνολικού φυσικού και ανθρώπινου κεφαλαίου αντίστοιχα, που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή τη παραγωγή. Το ανθρώπινο κεφάλαιο θεωρείται να παράγεται χρησιμοποιώντας $i_t^h = B\,[(1-u)\, k_t]^{\phi}\,[(1-v)\, h_t]^{1-\phi}\,,\ 0 \leq \phi \leq 1$, όπου $1-u$ και $1-v$ είναι οι ποσοστιαίες συμμετοχές του συνολικού φυσικού και ανθρώπινου κεφαλαίου που χρησιμοποιήθηκε για την ανθρώπινη παραγωγή. Μια ειδική περίπτωση αυτού του μοντέλου έχουμε όταν η παραγωγή φυσικών αγαθών απαιτεί και τους δύο τύπους κεφαλαίου αλλά η παραγωγή ανθρώπινου κεφαλαίου απαιτεί μόνο ανθρώπινο κεφάλαιο. Αυτό σημαίνει ότι $u = 1$.

Η συνάρτηση Lagrange για το γενικότερο μοντέλο είναι

$$\mathcal{L}_t = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1+\iota)^s} \frac{c_{t+s}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda_{t+s} \Big[A\,(u\,k_{t+s})^{\alpha}\,(v\,h_{t+s})^{1-\alpha} - c_{t+s} \right.$$

$$-k_{t+s+1} + (1-\delta)\,k_{t+s} \Big] + \mu_{t+s} \Big[B\,(\{1-u\}\,k_{t+s})^{\phi}\,(\{1-v\}\,h_{t+s})^{1-\phi}$$

$$\left. -h_{t+s+1} + (1-\delta)\,h_{t+s} \Big] \right\}.$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης γίνονται

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_{t+s}} &= \frac{1}{(1+\iota)^s}\, c_{t+s}^{-\sigma} - \lambda_{t+s} = 0\,, \qquad s \geq 0\,, \\
\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial k_{t+s}} &= \lambda_{t+s} \Big[\alpha\,u\,A\,\left(\frac{u\,k_{t+s}}{v\,h_{t+s}}\right)^{\alpha-1} + 1 - \delta \Big] - \lambda_{t+s-1} \\
&\quad + \mu_{t+s}\,\phi\,(1-u)\,B\,\left[\frac{(1-u)\,k_{t+s}}{(1-v)\,h_{t+s}}\right]^{\phi-1} = 0\,, \quad s \geq 1\,, \\
\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial h_{t+s}} &= \lambda_{t+s}\,(1-\alpha)\,v\,A\,\left[\frac{u\,k_{t+s}}{v\,h_{t+s}}\right]^{\alpha} - \mu_{t+s-1} \\
&\quad + \mu_{t+s}\,\left[\phi\,(1-v)\,B\,\left(\frac{(1-u)\,k_{t+s}}{(1-v)\,h_{t+s}}\right)^{\phi} + 1 - \delta\right] = 0\,, \quad s \geq 1\,.
\end{aligned}$$

Η λύση αποτελεί μια δυναμική μη γραμμική συνάρτηση των c_t, k_t, h_t, λ_t και μ_t για την οποία μόνο μια τοπική λύση είναι δυνατή.

Τα επιτόκια απόδοσης στο φυσικό και ανθρώπινο κεφάλαιο (οι καθαρές μεταβολές παραγωγικότητάς τους) μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\begin{aligned}
r_t^k &= \alpha\,u\,A\,\left(\frac{u\,k_t}{v\,h_t}\right)^{\alpha-1} - \delta\,, \\
r_t^h &= \phi\,(1-v)\,B\,\left(\frac{(1-u)\,k_t}{(1-v)\,h_t}\right)^{\phi} - \delta\,.
\end{aligned}$$

Μια αποτελεσματική τοποθέτηση των πόρων θα δώσει ότι αυτά θα πρέπει να είναι ίσα. Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε

$$\frac{k_t}{h_t} = \left(\frac{A\,\alpha\,u}{B\,\phi\,(1-v)} \, \left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha-1} \, \left[\frac{1-u}{1-v}\right]^{-\phi} \right)^{1/(1-\alpha-\phi)} .$$

Άρα το k_t/h_t είναι σταθερό και τα δύο επιτόκια απόδοσης πρέπει να είναι επίσης σταθεροί. Ο ρυθμός ανάπτυξης της οικονομίας, που είναι σταθερός και θετικός μπορεί να προκύψει από την εξίσωση συσσώρευσης ανθρώπινου κεφαλαίου

$$\frac{h_{t+1}}{h_t} = (1-v)\,B\,\left(\frac{(1-u)\,k_t}{(1-v)\,h_t}\right)^{\phi} + 1 - \delta = \frac{r_t^h + \delta}{\phi} + 1 - \delta > 0\,.$$

Για να ολοκληρώσουμε τη λύση, γράφουμε τη συνάρτηση παραγωγής αγαθών σαν

$$\frac{y_t}{h_t} = v\,A\,\left(\frac{u\,k_t}{v\,h_t}\right)^{\alpha} .$$

Αυτό δείχνει ότι το y_t/h_t είναι σταθερό. Από τους περιορισμούς στους πόρους παίρνουμε

$$\frac{y_t}{h_t} = \frac{c_t}{h_t} + \frac{k_{t+1}}{k_t}\,\frac{k_t}{h_t} - (1-\delta)\,\frac{k_t}{h_t} = \frac{c_t}{h_t} + \left(\frac{r_t^h + \delta}{\phi}\right)\,\frac{k_t}{h_t}\,,$$

που σημαίνει ότι το c_t/h_t είναι επίσης σταθερό.