

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1Α

Παράγωγος

1α.1 Βασικές Συναρτήσεις

1. Γενικά στοιχεία.

Όπως αναφέρθηκε ήδη στο εισαγωγικό Μέρος 0 των προαπαιτούμενων, συνήθως η *ανεξάρτητη* ή *εξωγενής* (independent, exogenous) μεταβλητή x και η *εξαρτημένη* ή *ενδογενής* (dependent, endogenous) μεταβλητή y παίρνουν τιμές από ένα *διάστημα* (interval) στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, *φραγμένο* (bounded) ή *μη φραγμένο* (unbounded), όπως π.χ. το $(2, +\infty)$.

Εκτός από το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, που είναι ένα μη φραγμένο διάστημα, αναφέρουμε και τα παρακάτω μη φραγμένα διαστήματα:

$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, που είναι οι *θετικοί* (positive),

$\mathbb{R}_{++} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, που είναι οι *γνήσια θετικοί* (strictly positive).

Έτσι ο όρος «θετικός» θα σημαίνει συνήθως «μη αρνητικός». Ένα διάστημα μπορεί να περιλαμβάνει ή να μη περιλαμβάνει τα άκρα του, οπότε καλείται *κλειστό* (closed) και *ανοικτό* (open) αντίστοιχα. Έτσι, από τα φραγμένα διαστήματα:

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad \alpha < x < \beta$$

το πρώτο είναι κλειστό (συμβ. $[\alpha, \beta]$) και το δεύτερο ανοικτό (συμβ. (α, β)). Τα άκρα του διαστήματος καλούνται και *συνοριακά* (boundary) σημεία. Τα μη συνοριακά σημεία καλούνται *εσωτερικά* (interior).

Μπορούμε όταν σχεδιάζουμε το *γράφημα* (graph) μιας συνάρτησης να παριστάνουμε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων πολλές διαφορετικές συναρτήσεις που έχουν την ίδια ανεξάρτητη μεταβλητή, αλλά διαφορετική εξαρτημένη. Σ' αυτή την περίπτωση ο κατακόρυφος άξονας έχει διαφορετική ερμηνεία για την κάθε συνάρτηση. Δίνουμε παρακάτω τα γραφήματα και τις ιδιότητες ορισμένων βασικών συναρτήσεων.

2. Θετικές δυνάμεις (positive powers) καλούνται οι συναρτήσεις της μορφής:

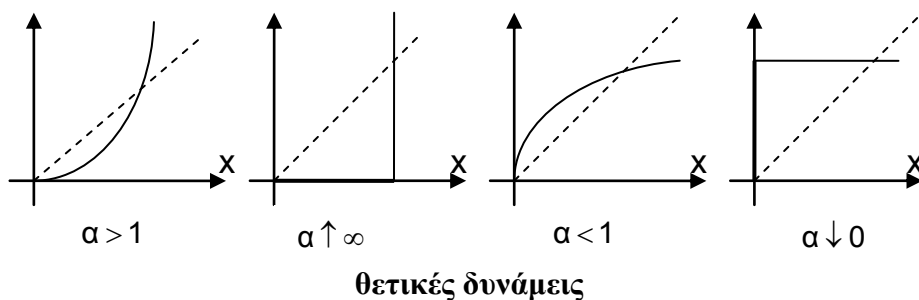
$$f(x) = x^{\alpha} \text{ με } \alpha > 0.$$

Είναι αύξουσες με πεδίο ορισμού $x \geq 0$. Εκτός από την ειδική περίπτωση:

$$\alpha = 1 \Rightarrow f(x) = y = x,$$

η οποία στα παρακάτω γραφήματα παριστάνεται με διακεκομμένη ευθεία, διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες:

1. $\alpha > 1$. Αυξάνει γρήγορα καθώς το x μεγαλώνει, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα. Στα όρια $\alpha \rightarrow \infty$ τείνει προς την σπαστή γραμμή του δεύτερου γραφήματος.
2. $\alpha < 1$. Αυξάνει αργά καθώς το x μεγαλώνει, όπως φαίνεται στο τρίτο γράφημα. Στα όρια $\alpha \rightarrow 0$ τείνει προς την σπαστή γραμμή του τελευταίου γραφήματος.



3. Αρνητικές δυνάμεις (negative powers) καλούνται οι ανάστροφες των θετικών δυνάμεων:

$$f(x) = x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}} \text{ με } \alpha > 0.$$

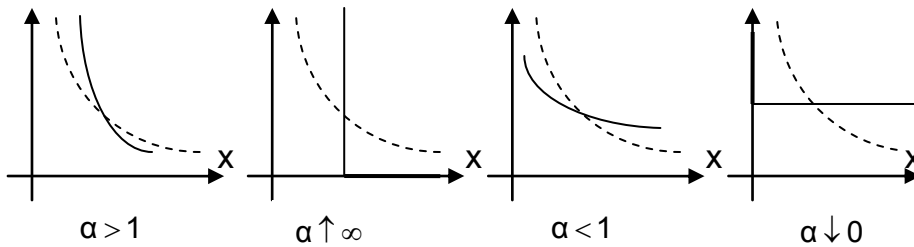
Είναι φθίνουσες με πεδίο ορισμού $x > 0$. Εκτός από την ειδική περίπτωση:

$$\alpha = -1 \Rightarrow f(x) = y = x^{-1}$$

η οποία στα παρακάτω γραφήματα παριστάνεται με την διακεκομμένη καμπύλη που είναι συμμετρική ως προς τους δύο άξονες, διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες:

1. $\alpha > 1$. Φθίνει γρήγορα καθώς το x μεγαλώνει, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα. Στα όρια $\alpha \rightarrow \infty$ τείνει προς την σπαστή γραμμή του δεύτερου γραφήματος.

2. $\alpha < 1$. Φθίνει αργά καθώς το x μεγαλώνει, όπως φαίνεται στο τρίτο γράφημα. Στα όριο $\alpha \rightarrow 0$ τείνει προς την σπαστή γραμμή του τελευταίου γραφήματος.



αρνητικές δυνάμεις

4. **Εκθετική** (exponential) με *βάση* (base) τον αριθμό e , καλείται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x,$$

όπου ο μη ρητός αριθμός της βάσης ορίζεται ως το παρακάτω όριο (Βλ. και Κεφ. 0):

$$e = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{c} \right)^c = \lim_{h \rightarrow 0^+} (1 + h)^{1/h} = 2.7 \dots$$

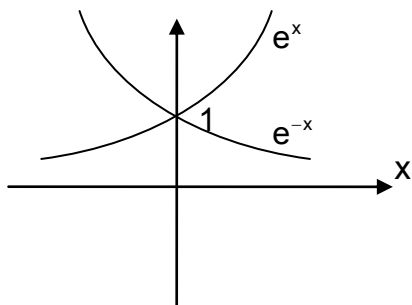
Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών, και παίρνει γνήσια θετικές τιμές. Είναι αύξουσα, και μάλιστα αυξάνει ταχύτερα απ' όλες τις θετικές δυνάμεις. Αντίθετα, η ανάστροφή της:

$$f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

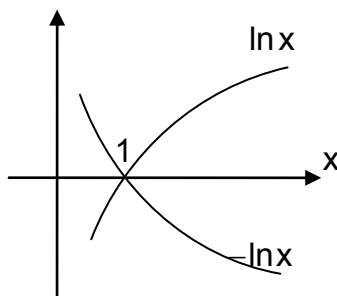
είναι φθίνουσα, και μάλιστα φθίνει πιο γρήγορα απ' όλες τις αρνητικές δυνάμεις.

Η εκθετική πράξη έχει και τις παρακάτω βασικές ιδιότητες, που είναι ειδικές περιπτώσεις των γενικότερων ιδιοτήτων των δυνάμεων:

$$e^{-\beta} = 1/e^{\beta}, \quad e^{\beta} e^{\gamma} = e^{\beta+\gamma}, \quad (e^{\beta})^{\gamma} = e^{\beta\gamma}, \quad e^0 = 1, \quad e^{-\infty} = 0.$$



εκθετική



λογαριθμική

5. Λογαριθμική (Logarithmic) (Βλ. και Κεφ. 0) με βάση τον αριθμό e καλείται η συνάρτηση:

$$f(x) = \log_e x = \ln x .$$

Έχει πεδίο ορισμού $x > 0$, και παίρνει ως τιμές το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Είναι αύξουσα αλλά αυξάνει πολύ αργά, πιο αργά απ' όλες τις θετικές δυνάμεις. Η λογαριθμική πράξη έχει και τις παρακάτω βασικές ιδιότητες:

$$\ln \frac{1}{\beta} = -\ln \beta, \quad \ln(\beta\gamma) = \ln \beta + \ln \gamma, \quad \ln(\beta^\gamma) = \gamma \ln \beta, \\ \ln 1 = 0, \quad \ln 0 = -\infty .$$

Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση ως προς την βάση e συνδέονται με σχέσεις αντιστροφής:

$$\{u = e^v \Leftrightarrow v = \log_e u\}, \text{ δηλαδή: } \{e^{\ln u} = u \ \& \ \ln e^v = v\} .$$

Π.χ. οι παρακάτω σχέσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους:

$$e^0 = 1, \quad \log_e 1 = 0, \quad e^{\ln 1} = 1, \quad \ln e^0 = 0 .$$

6. Αλλαγή βάσης.

Εκτός από την παραπάνω βάση, η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση μπορούν να οριστούν και ως προς οιαδήποτε θετική *βάση* (base) $a \neq 1$, συνήθως $a > 1$, οπότε συνδέονται μεταξύ τους με τις αντίστοιχες σχέσεις αντιστροφής:

$$\{u = a^v \Leftrightarrow v = \log_a u\}, \text{ δηλαδή } \{a^{\log_a u} = u \ \& \ \log_a a^v = v\} .$$

Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να τις εκφράσουμε με βάση e χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους αλλαγής βάσης:

$$a^x = e^{x \ln a} \quad , \quad \log_a x = \ln x / \ln a \quad .$$

Οι συναρτήσεις δυνάμεις που μελετήσαμε προηγουμένως μπορούν επίσης να εκφραστούν μέσω των εκθετικών-λογαριθμικών με τον τύπο:

$$x^c = e^{c \ln x} \quad .$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε τις τελευταίες τρεις σχέσεις:

1. $a = e^{\ln a} \Rightarrow a^x = (a^{\ln a})^x = a^{x \ln a}$
2. $\ln x = \ln a^{\log_a x} = (\log_a x)(\ln a) \Rightarrow \log_a x = \ln x / \ln a$
3. $x^c = (e^{\ln x})^c = e^{c \ln x} \quad .$

Στον μαθηματικό λογισμό χρησιμοποιούμε συνήθως την εκθετική και την λογαριθμική συνάρτηση με βάση e διότι δίνει απλές ιδιότητες παραγωγίσης. Η εκθετική συνάρτηση παριστάνεται εναλλακτικά και με τον συμβολισμό:

$$\exp x = e^x \quad .$$

Ο λογάριθμος ως προς την βάση e καλείται και *φυσικός λογάριθμος* (natural logarithm, $\ln$).

Σε πολλές εφαρμογές χρησιμοποιούνται και οι παρακάτω βάσεις:

2 : δυαδική (dyadic), 10 : δεκαδική (decimal).

7. Πολυωνυμικές βαθμού n (polynomial of degree n), με πεδίο ορισμού το σύνολο των αριθμών $\mathbb{R}$, καλούνται οι συναρτήσεις:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad \text{με } a_n \neq 0 \Rightarrow \text{βαθ}(P) = n \quad .$$

Το γράφημα αποτελείται από το πολύ n μονότονα τμήματα. Σε ειδικές περιπτώσεις μπορεί να έχει λιγότερα: $n-2, n-4, \dots$. Εκτός από την σταθερή συνάρτηση που είναι μηδενικού βαθμού, αναφέρουμε τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις μέχρι τρίτου βαθμού:

1. *Γραμμική* (linear) καλείται η συνάρτηση της μορφής:

$$f(x) = ax + \beta \quad ,$$

με συντελεστή a και προσθετικό όρο β . Αν ο προσθετικός όρος είναι μηδενικός, τότε καλείται *γραμμική ομογενής* (linear homogeneous) ή *γραμμική μορφή* (linear form) σε μία μεταβλητή:

$$f(x) = ax \quad .$$

2. *Τετραγωνική ή παραβολική* (quadratic, parabolic) καλείται η συνάρτηση που είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{με } a \neq 0.$$

Ειδικά η τετραγωνική συνάρτηση που έχει μόνο τον τετραγωνικό όρο:

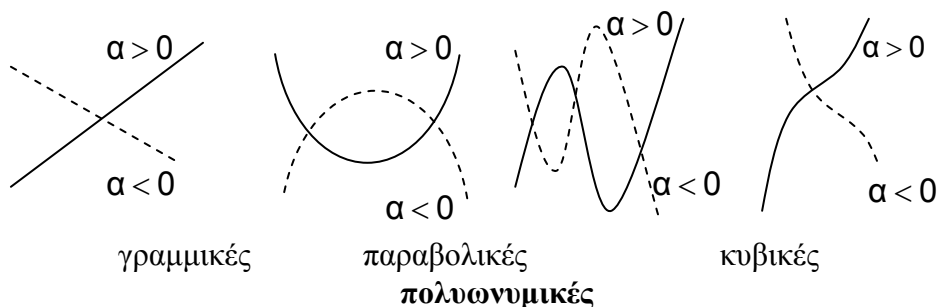
$$f(x) = ax^2,$$

καλείται *τετραγωνική ομογενής* (quadratic homogeneous), ή και *τετραγωνική μορφή* (quadratic forms) σε μία μεταβλητή.

3. *Κυβική* (cubic) καλείται η πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{με } a \neq 0.$$

Γενικά έχει τρία μονότονα τμήματα αλλά για ορισμένες τιμές των συντελεστών μπορεί να έχει μόνο ένα, όπως φαίνεται στο τελευταίο γράφημα παρακάτω.



Παρατήρηση. Αντικαθιστώντας: $x = (x - x_0) + x_0$, και αναπτύσσοντας τις δυνάμεις μπορούμε να εκφράσουμε ένα πολυώνυμο σε δυνάμεις του $x - x_0$ για οποιοδήποτε x_0 . Π.χ. σε δυνάμεις του $(x + 1)$:

$$x^2 - 2x + 1 = [(x + 1) - 1]^2 - 2[(x + 1) - 1] + 1 = (x + 1)^2 - 4(x + 1) + 1.$$

8. Ρητές (rational) καλούνται οι συναρτήσεις που ορίζονται παίρνοντας τον λόγο δύο πολυωνύμων:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n}{\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_m x^m}.$$

Εκτελώντας την διαίρεση των πολυωνύμων μπορούμε να τη φέρουμε στη μορφή.

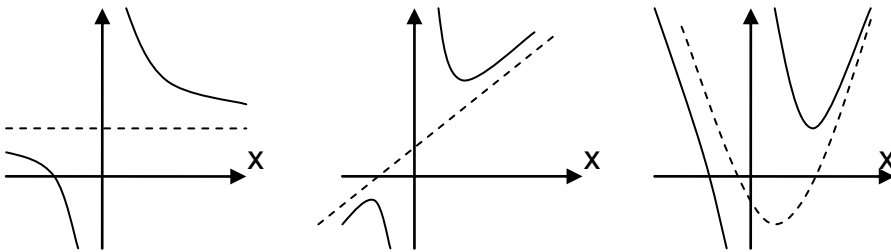
$$R(x) = \Pi(x) + \frac{Y(x)}{Q(x)},$$

όπου :

$\Pi(x)$: πολυώνυμο πηλίκο με $\beta\alpha\theta(\Pi) = \beta\alpha\theta(P) - \beta\alpha\theta(Q)$

$Y(x)$: πολυώνυμο υπόλοιπο με $\beta\alpha\theta(Y) < \beta\alpha\theta(Q)$.

Τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή $Q(x)$ αποτελούν κατακόρυφες ασύμπτωτες της ρητής συνάρτησης. Παρακάτω δίνουμε τα γραφήματα τριών τέτοιων συναρτήσεων όπου ο παρονομαστής είναι το πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού: $Q(x) = x$. Το πολυώνυμο πηλίκο παριστάνεται με διακεκομμένη γραμμή. Στο όριο $x \rightarrow \pm\infty$ όλες οι ρητές συναρτήσεις τείνουν ασυμπτωτικά προς το πολυώνυμο πηλίκο, οπότε έχουμε ασύμπτωτες, οριζόντια στη πρώτη, πλάγια στη δεύτερη, παραβολή στην τρίτη.



γραφήματα ρητών συναρτήσεων

9. Τριγωνομετρικές(trigonometric) καλούνται καταρχήν οι συναρτήσεις του *ημίτονου* (sine), και του *συνημίτονου* (cosine), με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$. Είναι περιοδικές με περίοδο 2π και συμβολίζονται με:

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x \quad \text{ή} \quad f(x) = \eta\mu x, \quad f(x) = \sigma\upsilon\nu x.$$

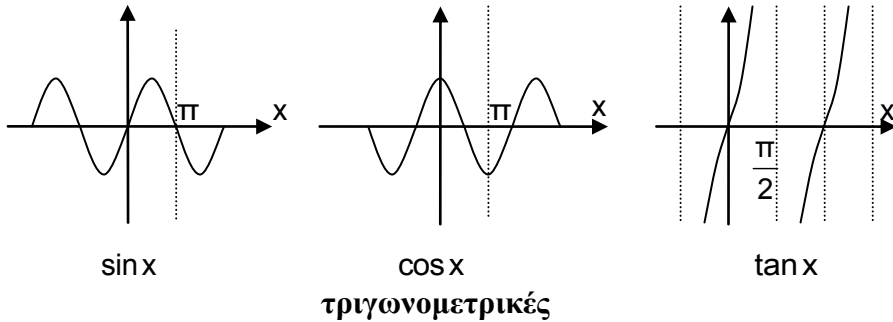
$$\frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x} \quad \frac{x^2+x+1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x} \quad \frac{x^3-x^2-x+2}{x} = x^2 - x - 1 + \frac{2}{x}$$

Δίνουμε ορισμένες ενδεικτικές τιμές:

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \pi = 0$$

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \pi = -1$$

Τα γραφήματά τους απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Αναφέρουμε επίσης ότι το ημίτονο είναι *περιττή* (odd) συνάρτηση ενώ το συνημίτονο είναι *άρτια* (even):

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x .$$

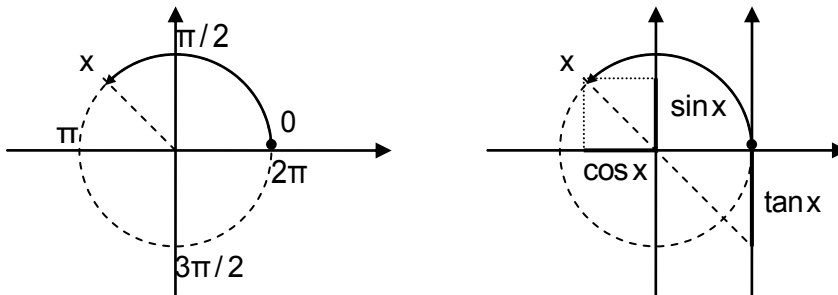
Ο λόγος τους ορίζει την τριγωνομετρική συνάρτηση της *εφαπτομένης* (tangent):

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{ή} \quad f(x) = \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} .$$

Αυτή έχει περίοδο Π με κατακόρυφες ασύμπτωτες στα περιττά πολλαπλάσια του $\pi/2$ όπου μηδενίζεται το συνημίτονο του παρονομαστή (Βλ. το παραπάνω σχήμα).

Παρατήρηση. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται γεωμετρικά ως εξής:

1. Στο μοναδιαίο κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και περίμετρο μήκους 2π , μετρούμε το x ως *προσημασμένο μήκος τόξου* αρχίζοντας από το σημείο $(1,0)$. Αν $x > 0$ τότε πηγαίνουμε προς την θετική φορά που είναι η αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου, ενώ αν $x < 0$ τότε πηγαίνουμε προς την αρνητική φορά που είναι αυτή των δεικτών του ωρολογίου. Για τη γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες στα άκρα του τόξου λέμε ότι έχει μέγεθος x *ακτίνια* (radians).



γεωμετρικός ορισμός των τριγωνομετρικών μεγεθών

2. Από το τελικό σημείο, η προβολή στον οριζόντιο άξονα δίνει το συνημίτονο του, δηλ. $x \rightarrow \cos x$, ενώ η προβολή στον κατακόρυφο άξονα δίνει το ημίτονο του, δηλ. $x \rightarrow \sin x$. Η περίμετρος έχει μήκος 2π , και έτσι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουν αυτή την περίοδο.

3. Η εφαπτομένη $\tan x$ ορίζεται γεωμετρικά ως η τομή της ακτίνας που περνάει από το σημείο X της περιφέρειας, με τον κατακόρυφο άξονα μετατοπισμένο στο $(0,1)$ όπως στο δεύτερο γράφημα παραπάνω.

Από την παραπάνω γεωμετρική κατασκευή προκύπτει ένα πλήθος σχέσεων μεταξύ των διαφόρων τριγωνομετρικών μεγεθών. Ονομάζονται *τριγωνομετρικές ταυτότητες* (trigonometric identities). Π.χ. από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε τη τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

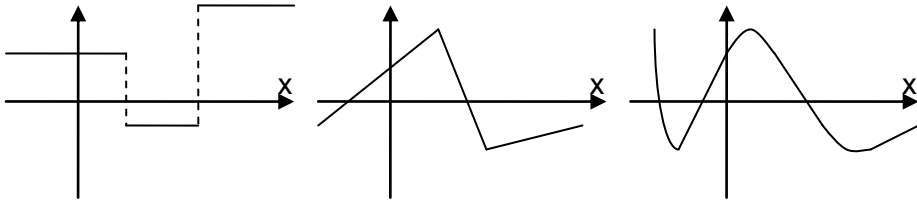
Αναφέρουμε και τις παρακάτω χρήσιμες ταυτότητες:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

10. Τμηματικά ορισμένες (piecewise defined), καλούνται οι συναρτήσεις που ορίζονται με διαφορετικό τύπο σε διαφορετικά διαστήματα. Αναφέρουμε ειδικά τις παρακάτω:

1. *βηματική* (step function), με σταθερά τμήματα.
2. *πολυγωνική* (polygonal), με γραμμικά τμήματα.
3. *σφηνοειδής* (spline), με γραμμικά και παραβολικά τμήματα.



βηματική

πολυγωνική

σφηνοειδής

Παραδείγματα τμηματικά ορισμένων συναρτήσεων

Μία σημαντική κατηγορία τμηματικά ορισμένων συναρτήσεων προκύπτει αν μεταξύ δύο συναρτήσεων πάρουμε σε κάθε σημείο την μικρότερη ή την μεγαλύτερη τιμή μεταξύ τους. Βρίσκουμε έτσι δύο νέες συναρτήσεις:

$$\max\{f(x), g(x)\}, \quad \min\{f(x), g(x)\},$$

που καλούνται συναρτήσεις *μεγίστου* (maximal) και *ελαχίστου* (minimal), αντίστοιχα. Επίσης καλούνται *πάνω & κάτω περιβάλλουσα* (upper, lower envelope), αντίστοιχα, των δύο συναρτήσεων. Οι πράξεις αυτές επεκτείνονται και σε περισσότερες συναρτήσεις.

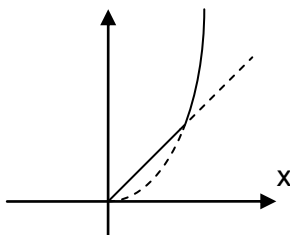
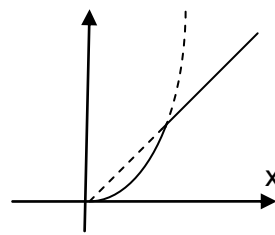
Παράδειγμα.

Στο θετικό διάστημα $x \geq 0$, ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$\max\{x, x^2\} = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq x^2 \Leftrightarrow x(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{αν } x^2 \geq x \Leftrightarrow x(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

$$\min\{x, x^2\} = \begin{cases} x & \text{αν } x \leq x^2 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ x^2 & \text{αν } x^2 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

των οποίων τα γραφήματα παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα.

πάνω: $\max\{x, x^2\}$ κάτω: $\min\{x, x^2\}$ **περιβάλλουσες**

1α.2 Ιδιότητες Συναρτήσεων

1. Πράξεις με συναρτήσεις.

Στο Κεφ. 0 ορίσαμε κάποιες βασικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, μεταξύ αυτών και τη σύνθεση *σύνθεση* (composition): $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Στις εφαρμογές, η διαδοχική εξάρτηση διαφόρων μεγεθών εκφράζεται με τη σύνθεση των αντίστοιχων συναρτήσεων:

$$\text{Αν } y = f(x) \text{ \& } x = g(z), \text{ τότε } y = f(g(z)).$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τη παραπάνω σύνθεση χωρίς τα σύμβολα των συναρτήσεων, ως εξής:

$$\text{Αν } y = y(x) \text{ \& } x = x(z), \text{ τότε } y = y(z).$$

Δηλαδή:

Αν το y είναι συνάρτηση του x και το x είναι συνάρτηση του z , τότε το y είναι επίσης συνάρτηση του z .

Παράδειγμα.

1. $f(x) = x^2$ και $g(x) = x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = (x - 1)^2$
2. Η $h(x) = e^{x^2}$ είναι σύνθεση της $f(x) = e^x$ με την $g(x) = x^2$
3. Αν $y = x^2$ και $x = z - 1$, τότε $y = (z - 1)^2$.

2. Μετασχηματισμοί (transformations).

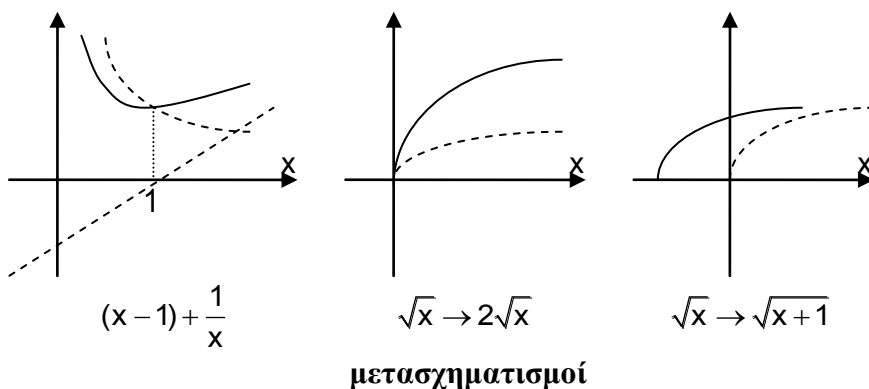
Σε πολλές περιπτώσεις το γράφημα της συνάρτησης που προκύπτει μετά την εφαρμογή μιας πράξης βρίσκεται με κάποιον αντίστοιχο γεωμετρικό μετασχηματισμό του αρχικού γραφήματος. Αναφέρουμε ειδικά τις παρακάτω περιπτώσεις:

Άθροισμα: $f(x) + g(x)$, σε κάθε x προσθέτουμε τις δύο τεταγμένες.

Πολλαπλάσιο: $af(x)$, πολλαπλασιάζουμε τις τεταγμένες με τον συντελεστή a .

Ειδικότερα, η $-f(x)$ είναι η συμμετρική της $f(x)$ ως προς τον οριζόντιο άξονα, διότι πολλαπλασιάζουμε όλες τις τεταγμένες των σημείων του γραφήματος με -1 .

Οριζόντια μετατόπιση: $f(x - \alpha)$, όπου το γράφημα της $f(x)$ μετατοπίζεται οριζοντίως κατά α , διότι η τιμή της νέας συνάρτησης στο x δίνεται από την τιμή της αρχικής στο $x - \alpha$. Η μετατόπιση είναι προς τα δεξιά αν το α είναι θετικό, προς τα αριστερά αν είναι αρνητικό. Έτσι στο τρίτο γράφημα του παρακάτω σχήματος το γράφημα της $\sqrt{x}$ μετατοπίζεται προς τα αριστερά.



3. Μονοτονία.

Μια συνάρτηση $f(x)$ καλείται:

αύξουσα (increasing), αν $x_2 > x_1$ συνεπάγεται $f(x_2) \geq f(x_1)$

φθίνουσα (decreasing), αν $x_2 > x_1$ συνεπάγεται $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Μια συνάρτηση καλείται *μονότονη* (monotone) αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα. Δηλαδή, συμβατικά μια *μονότονη συνάρτηση μπορεί να έχει και διαστήματα σταθερότητας*. Αν δεν έχει, τότε οι παραπάνω ανισότητες είναι γνήσιες και λέμε ότι η συνάρτηση είναι *γνήσια μονότονη* (strictly monotone). Έτσι μια συνάρτηση είναι:

γνήσια αύξουσα, αν $x_2 > x_1$ συνεπάγεται $f(x_2) > f(x_1)$

γνήσια φθίνουσα, αν $x_2 > x_1$ συνεπάγεται $f(x_2) < f(x_1)$

Για τη σταθερή συνάρτηση λέμε συμβατικά ότι είναι και αύξουσα και φθίνουσα αλλά βέβαια όχι γνήσια.

Παράδειγμα.

1. Οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^a \text{ με } a > 0, \quad f(x) = a^x \text{ με } a > 1, \quad f(x) = \log_a x \text{ με } a > 1,$$

είναι όλες γνήσια αύξουσες.

2. Οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^a \text{ με } a < 0, \quad f(x) = a^{-x} \text{ με } a > 1,$$

$$f(x) = \log_a(1/x) = -\log_a x, \text{ με } a > 1,$$

είναι όλες γνήσια φθίνουσες.

Γενικά σε μια συνεχή συνάρτηση διακρίνουμε διάφορα τμήματα μονοτονίας. Τα σημεία όπου η μονοτονία αλλάζει καλούνται *τοπικά ακρότατα* (local extrema). Ένα τοπικό ακρότατο είναι *τοπικό μέγιστο* (local maximum) αν η συνάρτηση από αύξουσα γίνεται φθίνουσα, *τοπικό ελάχιστο* (local minimum) αν η συνάρτηση από φθίνουσα γίνεται αύξουσα. Τα τοπικά μέγιστα εναλλάσσονται με τα τοπικά ελάχιστα.

Παράδειγμα. Ένα πολυώνυμο βαθμού n , έχει το πολύ n διαστήματα μονοτονίας και επομένως το πολύ $n - 1$ τοπικά ακρότατα.

Οι ιδιότητες μονοτονίας και ειδικότερα η εύρεση των τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης αποτελεί βασικό αντικείμενο της θεωρίας του *Διαφορικού Λογισμού* (Differential Calculus), δηλαδή της θεωρίας παραγωγίσης που θα εξετάσουμε στο επόμενο Κεφάλαιο 1β.

4. Αντίστροφες συναρτήσεις.

Η εξίσωση συνάρτησης $y = f(x)$ εκφράζει μια σχέση μεταξύ των μεταβλητών $\{x, y\}$ όπου σε κάθε x αντιστοιχεί το πολύ μία τιμή του y , ενώ αντίστροφα σε κάθε y μπορεί να αντιστοιχούν και περισσότερες από μία τιμές του x . Εκφράζουμε αυτή την αντίστροφη σχέση γράφοντας:

$$x = f^{-1}(y),$$

όπου η f^{-1} καλείται *αντίστροφη* (inverse) συνάρτηση της f . Γενικά η f^{-1} είναι *πολυσήμαντη* (multi-valued) (δηλ. σε ένα y μπορούν να αντιστοιχούν περισσότερες από μία τιμές του x , οπότε δεν είναι συνάρτηση) και συχνά την αποκαλούμε *αντιστοιχία* (correspondence). Παρατηρούμε όμως ότι:

- Αν η f είναι γνήσια μονότονη, τότε η f^{-1} είναι μονοσήμαντη και γνήσια μονότονη επίσης.

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ και η αντίστροφή της $x = f^{-1}(y)$ εκφράζουν την ίδια σχέση μεταξύ των μεταβλητών (x, y) και επομένως έχουν το ίδιο γράφημα στο

επίπεδο Oxy . Αν όμως στην περίπτωση της αντίστροφης θέλουμε να έχουμε την μεταβλητή y στον οριζόντιο άξονα, τότε το γράφημα της $x = f^{-1}(y)$ είναι το συμμετρικό της f ως προς την διαγώνιο του συστήματος συντεταγμένων. Αν μας ενδιαφέρει η συνάρτηση και όχι οι ίδιες οι μεταβλητές τότε μπορούμε να μετονομάσουμε και τους άξονες ώστε η ανεξάρτητη μεταβλητή στον οριζόντιο άξονα να είναι πάλι η x .

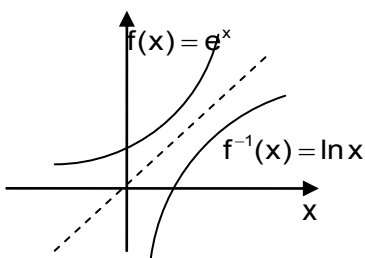
Παράδειγμα.

1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων Oxy η εκθετική $y = e^x$ και η αντίστροφή της λογαριθμική $x = \ln y$ έχουν το ίδιο γράφημα. Αν όμως αλλάξουμε τον ρόλο των μεταβλητών και γράψουμε την αντίστροφη στην συνηθισμένη μορφή $y = \ln x$, τότε το γράφημά της θα είναι το συμμετρικό της εκθετικής ως προς την διαγώνιο.

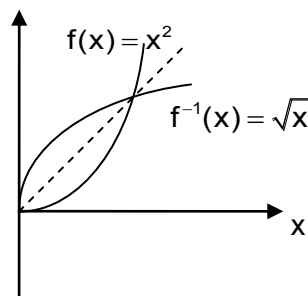
2. Λύνοντας την εξίσωση $y = x^2$ ως προς x , βρίσκουμε την δισημάντη αντίστροφη:

$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}.$$

3. Αν θεωρήσουμε τον περιορισμό της $y = x^2$ στο θετικό διάστημα: $x \geq 0$, τότε γίνεται γνήσια αύξουσα, και έχει μονοσήμαντη αντίστροφη: $x = \sqrt{y}$, επίσης γνήσια αύξουσα. Αν στη συνέχεια αλλάξουμε τον ρόλο των μεταβλητών και γράψουμε την αντίστροφη στην συνηθισμένη μορφή $y = \sqrt{x}$, τότε το γράφημά της θα είναι το συμμετρικό ως προς την διαγώνιο της αρχικής συνάρτησης.



$y = e^x$ & $x = \ln y$
και παίρνοντας την
 $x = \ln y$ ως $y = f^{-1}(x) = \ln x$



$y = x^2$ με $x \geq 0$
και παίρνοντας την
 $x = \sqrt{y}$ ως $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

αντίστροφες συναρτήσεις

5. Αντίστροφες τριγωνομετρικών συναρτήσεων (inverse trigonometric).

Η αντίστροφη συνάρτηση του ημιτόνου:

$$\sin^{-1} x$$

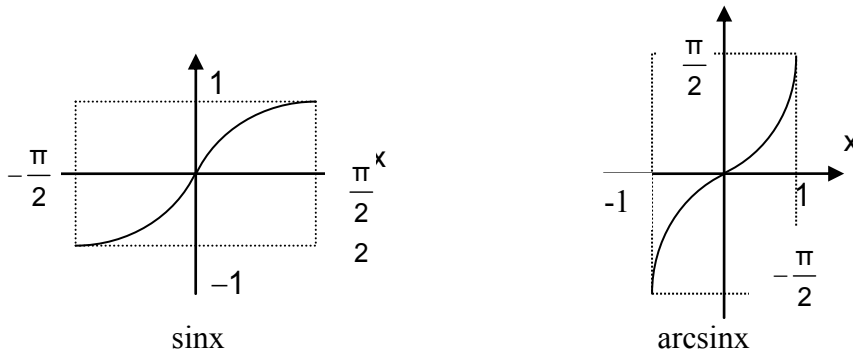
είναι πολυσήμαντη. Αν όμως περιορίσουμε τη συνάρτηση ημιτόνου στο διάστημα: $[-\pi/2, \pi/2]$, τότε αυτή γίνεται γνήσια αύξουσα και η αντίστροφή της είναι μονοσήμαντη συνάρτηση, επίσης γνήσια αύξουσα. Τη συμβολίζουμε, επίσης, με:

$$\arcsin x \text{ ή } \text{τοξημ}x.$$

Έχουμε, δηλ.:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ με } -1 \leq x \leq 1 \text{ \& } -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

Την εκφράζουμε λέγοντας ότι y είναι το τόξο (arc), δηλαδή η γωνία σε ακτίνια που έχει ημίτονο x και βρίσκεται στο παραπάνω διάστημα.

**Η αντίστροφη τριγωνομετρική συνάρτηση του ημιτόνου**

Δίνουμε μερικές ενδεικτικές τιμές της παραπάνω αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης:

$$\arcsin 0 = 0, \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Η συνάρτηση του ημιτόνου είναι περιττή, οπότε στα αρνητικά των παραπάνω σημείων έχει τις αντίστοιχες αρνητικές τιμές:

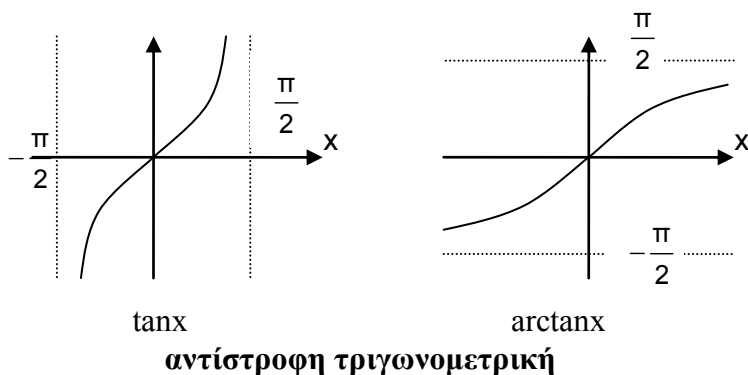
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η αντίστροφη της εφαπτομένης:

$$\arctan x \text{ ή } \text{τοξεφ}x,$$

με βάση τη σχέση:

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y \text{ με } -\infty < x < +\infty \text{ και } -\pi/2 < y < \pi/2.$$



Την εκφράζουμε λέγοντας ότι y είναι το τόξο, δηλαδή η γωνία σε ακτίνια που έχει εφαπτομένη x και βρίσκεται στο παραπάνω διάστημα. Αναφέρουμε και τις ενδεικτικές τιμές:

$$\arctan 0 = 0, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

6. Μηδενικά μιας συνάρτησης καλούνται τα σημεία στα οποία η τιμή της είναι μηδενική:

$$f(x) = 0.$$

Τα μηδενικά μπορούν να βρεθούν είτε αναλυτικά λύνοντας την εξίσωση, είτε αριθμητικά χρησιμοποιώντας κάποιον προσεγγιστικό αλγόριθμο. Επίσης μπορούν να μελετηθούν και γραφικά ως τα σημεία όπου το γράφημα της συνάρτησης κόβει τον x -άξονα. Μια γνήσια μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ ένα μηδενικό. Τα μηδενικά μιας *συνεχούς* συνάρτησης (Βλ. Κεφ. 0) χωρίζουν το διάστημα ορισμού σε υποδιαστήματα, σε καθένα από τα οποία η συνάρτηση έχει ένα συγκεκριμένο πρόσημο. Μπορούμε να καθορίσουμε το πρόσημο ελέγχοντας ένα σημείο του διαστήματος. Η ιδιότητα αυτή βασίζεται στο:

7. Η παρακάτω πρόταση συχνά αναφέρεται και ως **Θεώρημα Bolzano**:

- Αν μια συνεχής συνάρτηση έχει γνήσια αντίθετο πρόσημο σε δύο σημεία τότε σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο θα μηδενίζεται.

Παράδειγμα.

1. Η $f(x) = x - x^2 = x(1-x)$ έχει τα μηδενικά: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Η συνάρτηση έχει θετικές τιμές στα διαστήματα $x \leq 0$ ή $x \geq 1$, και αρνητικές στο ενδιάμεσο διάστημα $0 \leq x \leq 1$.

2. Η $f(x) = -x^3 + x^2 + 1$ έχει τις τιμές: $f(0) = 1$, $f(2) = -3$.

Εφόσον είναι συνεχής με αντίθετο πρόσημο στα δύο σημεία, θα έχει τουλάχιστον ένα γνήσια ενδιάμεσο μηδενικό: $1 < x < 2$, με $f(x) = 0$.

3. Η $f(x) = x \ln x$ με διάστημα ορισμού: $x > 0$, και με μηδενικό στο $x = 1$, έχει αρνητικές τιμές στο διάστημα $0 < x \leq 1$ και θετικές τιμές στο διάστημα $x \geq 1$.

Ένα πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n μηδενικά, αλλά μπορεί να έχει και λιγότερα.

Παράδειγμα. Η (τετραγωνική) παραβολική συνάρτηση:

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma,$$

με διακρίνουσα (discriminant):

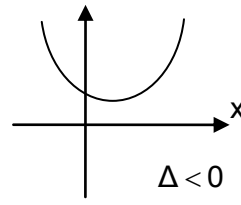
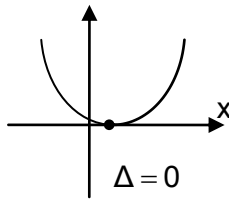
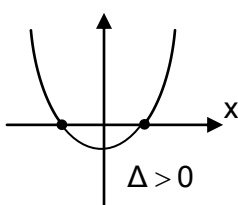
$$\Delta = b^2 - 4a\gamma,$$

έχει:

1. Δύο διαφορετικά μηδενικά αν $\Delta > 0$, με διαφορετικό πρόσημο εντός και εκτός των δύο μηδενικών.

2. Ένα μηδενικό αν $\Delta = 0$ με το ίδιο πρόσημο εκατέρωθεν.

3. Κανένα μηδενικό αν $\Delta < 0$. Σ αυτή την περίπτωση οι τιμές της είναι παντού, γνήσια θετικές αν $a > 0$, γνήσια αρνητικές αν $a < 0$.



Οι τρεις περιπτώσεις για τα μηδενικά της παραβολικής:

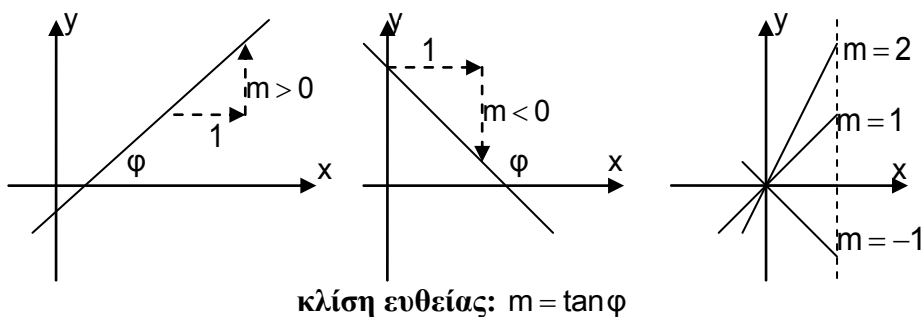
$$y = ax^2 + bx + \gamma \text{ με } a > 0$$

1α.3 Παραγωγή

1. Κλίση (slope) μιας ευθείας στο επίπεδο καλείται η τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας, δηλ. η $\tan\varphi = \varepsilon\varphi\varphi$, που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο θετικό x -ημιάξονα, όπως φαίνεται στα δύο πρώτα γραφήματα του παρακάτω σχήματος. Γεωμετρικά, μετράει την μεταβολή του y όταν το x αυξηθεί κατά μία μονάδα, ανεξάρτητα της αρχικής τιμής του, όπως φαίνεται στα παρακάτω γραφήματα. Εκτός από την κατακόρυφη ευθεία που έχει άπειρη κλίση: $m = \infty$, μια ευθεία με κλίση m παριστάνεται με γραμμική συνάρτηση της μορφής:

$$y = mx + \beta .$$

Δηλαδή, ο συντελεστής m ισούται με την κλίση της ευθείας.



2. Μεταβολές.

Σε πολλές εφαρμογές αντί των τιμών των μεταβλητών μας ενδιαφέρουν οι μεταβολές τους από κάποιες αρχικές τιμές. Αν οι μεταβλητές $\{x, y\}$ συνδέονται με μια σχέση συνάρτησης, τότε οι μεταβολές τους $\{\Delta x, \Delta y\}$ θα συνδέονται επίσης με μια σχέση συνάρτησης, ως εξής.

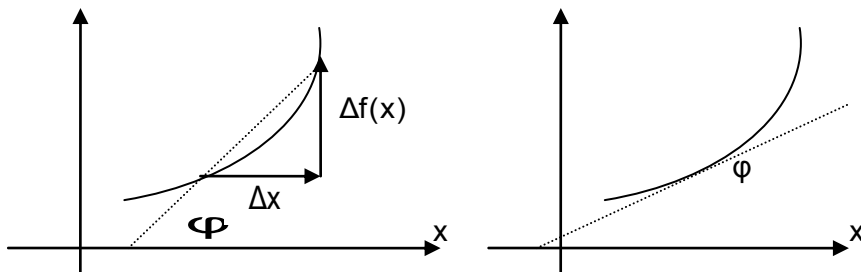
$$y = f(x) \Rightarrow \Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) .$$

Έτσι σε κάθε x το Δy είναι συνάρτηση του Δx . Ο λόγος των μεταβολών:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{ονομάζεται μέσος ρυθμός}$$

μεταβολής.

Γεωμετρικά παριστάνεται με την κλίση της χορδής που συνδέει το αρχικό σημείο (x, y) με το τελικό $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα του παρακάτω σχήματος.



κλίση χορδής και κλίση εφαπτομένης

Για γραμμικές συναρτήσεις ο λόγος αυτός είναι σταθερός ανεξάρτητα του x και του Δx και δίνεται από την κλίση της ευθείας του γραφήματος:

$$y = mx + \beta \Rightarrow \Delta y = [m(x + \Delta x) + \beta] - [mx + \beta] = m\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = m.$$

Έτσι για γραμμικές συναρτήσεις ο μέσος ρυθμός μεταβολής δίνεται από την κλίση της ευθείας.

3. Ρυθμός μεταβολής.

Γενικά, ο λόγος των μεταβολών: $\Delta y / \Delta x$, εξαρτάται από το αρχικό x καθώς και από την ίδια τη μεταβολή Δx . Στο όριο: $\Delta x \rightarrow 0$, βρίσκουμε ένα μέγεθος που δεν εξαρτάται από το Δx , το οποίο παριστάνεται με

$$y'(x) \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Καλείται (οριακός) ρυθμός μεταβολής ή παράγωγος της y ως προς x (marginal rate of change, derivative). Επίσης καλείται και κλίση της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο. Γεωμετρικά ισούται με την κλίση της εφαπτομένης ευθείας στη καμπύλη της συνάρτησης στο αντίστοιχο σημείο: (x, y) , όπως

φαίνεται στο δεύτερο γράφημα του παραπάνω σχήματος. Συχνά η μεταβλητή y παριστάνει τις τιμές μίας συνάρτησης, οπότε γράφουμε:

$$f'(x) \text{ ή } \frac{df}{dx} = \lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Παράδειγμα. Αν $y=f(x)=x-x^2$, τότε:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [(x + \Delta x) - (x + \Delta x)^2] - [x - x^2]$$

Επομένως:

$$\Delta y = (1 - 2x)\Delta x - \Delta x^2 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 1 - 2x - \Delta x$$

Π.χ.

στο σημείο $x=2 \Rightarrow \Delta y = -3\Delta x - \Delta x^2$ & $\Delta y / \Delta x = -3 - \Delta x \rightarrow -3$ όταν $\Delta x \rightarrow 0$.

Επομένως η παράγωγος στο $x=2$ είναι $f'(2)=3$.

Γενικότερα στο τυχόν x , βρίσκουμε:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 - 2x - \Delta x \rightarrow 1 - 2x \text{ όταν } \Delta x \rightarrow 0$$

Επομένως: $f(x)=x-x^2 \Rightarrow f'(x)=1-2x$, δηλαδή $(x-x^2)'=1-2x$.

4. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων.

Υπολογίζοντας την παράγωγο μιας συνάρτησης $f(x)$ στα διάφορα x ,

βρίσκουμε μια νέα συνάρτηση: $f'(x)$,

η οποία καλείται επίσης *παράγωγος*. Από τον ορισμό και από τις ιδιότητες παραγωγίσης που θα μελετήσουμε παρακάτω βρίσκουμε για τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων τους εξής τύπους:

1. $(c)' = 0$, η σταθερή συνάρτηση έχει μηδενική παράγωγο
2. $(mx + \beta)' = m$, η γραμμική συνάρτηση έχει σταθερή παράγωγο
3. $(e^x)' = e^x$, $\ln' x = 1/x$
4. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, για όλες τις δυνάμεις α
5. $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Απόδειξη.

3. Ο τύπος $(e^x)' = e^x$ αποδεικνύεται απευθείας από τον ορισμό και τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης: