ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο ανά χείρας 5ος τόμος των *Κειμένων οικονομικής θεωρίας και πολιτικής* περιέχει δεκαεπτά εργασίες, που, με εξαίρεση την τελευταία και τις δυο συλλογικές, γράφτηκαν στο διάστημα μεταξύ Απριλίου και Σεπτεμβρίου του 1996.

Οι τρεις πρώτες αποτελούν την ολοκλήρωση των εργασιών μας πάνω στο μοντέλο γενικής ισορροπίας του John von Neumann. Είχαν προηγηθεί δυο σχετικές εργασίες που περιέχονται στον 4ο τόμο.

Οι επόμενες πέντε εργασίες αποτελούν την ολοκλήρωση παλαιότερων ερευνών μας πάνω στο ζήτημα της επιλογής της πλέον κερδοφόρας τεχνικής. Όπως θα διαπιστώσει ο αναγνώστης, δεν είναι άσχετες με τις εργασίες μας για το μοντέλο του von Neumann.

Οι επόμενες δυο εργασίες αφορούν τις επιπτώσεις μιας υποτίμησης του νομίσματος στο κόστος των εγχωρίως παραγόμενων εμπορευμάτων. Η πρώτη είναι μια εμπειρική έρευνα για την περίπτωση της Ελλάδας και διεξήχθη σε συνεργασία με τους Θόδωρο Μαριόλη, Χαράλαμπο Οικονομίδη και Νίκο Φουστέρη. Στη δεύτερη, η οποία γράφτηκε σε συνεργασία με τον Θόδωρο Μαριόλη, παρουσιάζουμε ένα θεωρητικό μοντέλο για τη διερεύνηση των επιπτώσεων μιας υποτίμησης του νομίσματος στο κόστος των εγχωρίως παραγόμενων εμπορευμάτων που κατασκευάστηκε υπό την προϋπόθεση ότι όλα τα αναγκαία στατιστικά στοιχεία είναι διαθέσιμα.

Οι τέσσερις εργασίες που ακολουθούν αναφέρονται στην αυτοματοποίηση της παραγωγής και στις συνέπειές της και γράφτηκαν με αφορμή ένα άρθρο του Adam Schaff. Η αμέσως επόμενες δυο εργασίες αποτελούν μια κριτική σ' ορισμένες απόψεις για τις αντιλήψεις του Marx περί δικαιοσύνης.

Το τελευταίο κείμενο αυτού του τόμου είναι ο Πρόλογος στη συλλογή κειμένων *Για μια κριτική των κοινωνικών επιστημών* που κυκλοφόρησε το 1996 στις εκδόσεις Κριτική.

Αθήνα, 15 Σεπτεμβρίου 1996
Γιώργος Σταμάτης

ΚΡΙΤΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΤΟΥ JOHN VON NEUMANN

Ι. ΤΟ ΘΕΜΑ

Στο περίφημο άρθρο του *Ueber ein oekonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*[1] ο John von Neumann διερευνά αν σε μια οικονομία, στις εισροές της οποίας συμπεριλαμβάνονται πλην των μέσων παραγωγής και οι πραγματικοί μισθοί και η οποία διαθέτει για την παραγωγή ενός ορισμένου αριθμού δυνάμενων να παραχθούν εμπορευμάτων έναν ίσο ή μεγαλύτερο αριθμό διαδικασιών παραγωγής, υπάρχουν ένα ως προς την τεχνική παραγωγής μέγιστον και για όλες τις χρησιμοποιούμενες διαδικασίες παραγωγής *ενιαίο* ποσοστό κέρδους και ένας ίσος με αυτό το ποσοστό κέρδους ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *υλικός* ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης, ο οποίος, ως *υλικός* ρυθμός οικονομικής μεγέθυνσης, είναι *ενιαίος* για όλα τα παραχθέντα εμπορεύματα.

Ο ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *υλικός* ρυθμός μεγέ-

1. John von Neumann, «Ueber ein oekonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes», in: Karl Menger (Hrsg.), *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Wien 1937 (Αγγλική μετάφραση: John von Neumann, «A model of General Equilibrium», *Review of Economic Studies*, τόμ. XIII (1945/46). Ελληνική μετάφραση αυτής της αγγλικής μετάφρασης του άρθρου του von Neumann περιέχεται στα *Τεύχη πολιτικής οικονομίας*, τεύχος 8, Άνοιξη 1991).

θυνσης μιας οικονομίας σαν την παραπάνω είναι ο *υλικός* ρυθμός μεγέθυνσης, ο οποίος προκύπτει, όταν οι καπιταλιστές δεν καταναλώνουν κανένα μέρος των κερδών τους, αλλά τα επενδύουν εξ ολοκλήρου. Ως εκ τούτου είναι ίσος με τον λόγο του υπερπροϊόντος, δηλ. *των πραγματικών* κερδών, της οικονομίας προς το άθροισμα των μέσων παραγωγής και των πραγματικών μισθών της οικονομίας. Δεν υπάρχει πάντα ένας ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *υλικός* ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας. Όταν όμως υπάρχει, είναι *ενιαίος*, δηλ. ο ίδιος για όλα τα παραχθέντα εμπορεύματα, και αντιστρόφως, όταν ο ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *υλικός* ρυθμός μεγέθυνσης κάθε παραχθέντος εμπορεύματος είναι ο ίδιος για όλα τα παραχθέντα εμπορεύματα, τότε υπάρχει ένας *ενιαίος* ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *υλικός* ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας. Τέλος, όταν υπάρχει ένας ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *υλικός* ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας, τότε αυτός είναι προφανώς ίσος με το ενιαίο ποσοστό κέρδους της οικονομίας.

Ως προς τις επενδύσεις μέγιστο *ονομαστικό* ρυθμό μεγέθυνσης της οικονομίας ονομάζουμε τον *ονομαστικό* ρυθμό μεγέθυνσης της οικονομίας, ο οποίος προκύπτει, όταν οι καπιταλιστές επενδύουν όλα τα κέρδη τους. Συνεπώς, ο ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *ονομαστικός* ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας είναι ίσος με τον λόγο της τιμής του υπερπροϊόντος, δηλ. των ονομαστικών κερδών, της οικονομίας προς την τιμή των μέσων παραγωγής και των πραγματικών μισθών της οικονομίας και έτσι ίσος με το ενιαίο ποσοστό κέρδους της οικονομίας. Σε αντίθεση με τον ως προς τις επενδύσεις μέγιστο *υλικό* ρυθμό μεγέθυνσης της οικονομίας, ο οποίος υπάρχει τότε και μόνον, όταν είναι *ενιαίος* για όλα τα παραχθέντα εμπορεύματα, ο ως προς τις επενδύσεις μέγιστος ονομαστικός ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας υπάρχει πάντα, δηλ. υπάρχει και όταν δεν είναι *ενιαίος* για όλα τα παραχθέντα εμπορεύματα. Ο ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *ονομαστικός* ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας είναι τότε μόνον ενιαίος για όλα τα παραχθέντα εμπορεύματα, όταν ο ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *υλικός* ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας είναι ενιαίος για όλα τα παραχθέντα εμπορεύματα, δηλ. σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν υπάρχει ένας ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *υλικός* ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας.

Τέλος, ο ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *υλικός* ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας, όταν υπάρχει, είναι ίσος με τον ως προς τις επενδύσεις μέγιστο *ονομαστικό* ρυθμό μεγέθυνσης της οικονομίας, διότι και οι δύο είναι ίσοι με το ενιαίο ποσοστό κέρδους της οικονομίας.

Στα ακόλουθα (Μέρος II) θα επιλύσουμε το πρόβλημα του von Neumann κατά τον απλούστερο δυνατό τρόπο, «σπάζοντάς» το σε δύο μέρη, στο μέρος που αφορά τον προσδιορισμό του μέγιστου ποσοστού κέρδους και στο μέρος που αφορά την απόδειξη ύπαρξης ενός ως προς τις επενδύσεις μέγιστου *υλικού* ρυθμού μεγέθυνσης ίσου με το μέγιστο ποσοστό κέρδους. Ως προς το πρώτο μέρος του θα επιλύσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα μεγιστοποίησης. Ως προς το δεύτερο μέρος του θα επιλύσουμε το πρόβλημα κατασκευάζοντας ένα σύστημα παραγωγής με έναν ως προς τις επενδύσεις μέγιστο υλικό ρυθμό μεγέθυνσης, ο οποίος να είναι ίσος με το ήδη προσδιορισθέν μέγιστο ποσοστό κέρδους. Αυτό το σύστημα παραγωγής είναι προφανώς ένα πρότυπο σύστημα με πρότυπο λόγο ίσον με το ήδη προσδιορισθέν μέγιστο ποσοστό κέρδους.

Στη συνέχεια (Μέρος III) θα δείξουμε ότι η συνήθης πραγμάτευση του προβλήματος ως ενός προβλήματος μεγιστοποίησης-ελαχιστοποίησης πραγματεύεται και επιλύει μόνον το πρώτο μέρος του προβλήματος, προσδιορίζει δηλ.

μόνον το μέγιστο ποσοστό κέρδους, και δεν πραγματεύεται και δεν επιλύει και το δεύτερο μέρος του προβλήματος, δεν αποδεικνύει δηλ. ότι υπάρχει ένας ως προς τις επενδύσεις μέγιστος *υλικός* ρυθμός μεγέθυνσης ίσος με το ήδη προσδιορισθέν μέγιστο ποσοστό κέρδους, και συνεπώς δεν συνιστά λύση του προβλήματος του von Neumann. Επίσης θα δείξουμε, ότι αυτή η πραγμάτευση του προβλήματος ως προβλήματος μεγιστοποίησης-ελαχιστοποίησης, καίτοι προσδιορίζει το μέγιστο ποσοστό κέρδους, το προσδιορίζει, επειδή το προσδιορίζει στα πλαίσια ενός προβλήματος μεγιστοποίησης-ελαχιστοποίησης, κατά τρόπο μη «οικονομικό» και συνεπώς είναι περιττή, διότι το μέγιστο ποσοστό κέρδους μπορεί να προσδιορισθεί κατά «οικονομικότερο» τρόπο είτε στα πλαίσια ενός προβλήματος μεγιστοποίησης και μόνον είτε στα πλαίσια ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης και μόνον.

Τέλος (στο Μέρος IV) θα συνοψίσουμε τα αποτελέσματα της εργασίας.

II. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ

II.1. Τα δεδομένα

Έστω μια οικονομία, η οποία διαθέτει για την παραγωγή n δυνάμενων να παραχθούν εμπορευμάτων την τεχνολογία $[\bar{A},\bar{B}]$, όπου $\bar{A}$, $\bar{A} \geq 0$, μια $n \times m$ μήτρα, $n \leq m$, η στήλη $\bar{a}_q$, $q \in Q = \{1,2,\ldots,m\}$, της οποίας παριστά τις εισροές σε μέσα παραγωγής και μισθιακά εμπορεύματα της διαδικασίας παραγωγής q ανά μονάδα εργασίας, και $\bar{B}$, $\bar{B} \geq 0$ μια $n \times m$ μήτρα, η στήλη $\bar{b}_q$ της οποίας παριστά τις εκροές της διαδικασίας παραγωγής q ανά μονάδα εργασίας. Καμιά στήλη της $\begin{bmatrix} \bar{A} \\ B \end{bmatrix}$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων στηλών της. Επίσης ισχύει $\bar{a}_q \geq 0$ και $\bar{b}_q \geq 0$, δηλ. ότι σε καμιά διαδικασία παραγωγής δεν έχουμε ούτε εισροές χωρίς εκροές ούτε εκροές χωρίς εισροές, δηλ. ότι σε κάθε διαδικασία παραγωγής έχουμε τόσο εισροές όσο και εκροές.

Η δεδομένη τεχνολογία αποτελείται από $\sum_k \binom{m}{k}$, $1 \leq k \leq m$, το πλήθος τεχνικές παραγωγής.[2] Έστω ρ, $1 \leq \rho \leq n$, το πλήθος των εμπορευμάτων που χρησιμοποιεί ως εισροές και ν, $1 \leq \nu \leq n$, το πλήθος των εμπορευμάτων που παράγει καθεμιά από αυτές τις τεχνικές. Συμβολίζουμε καθεμιά από τις παραπάνω τεχνικές με $[A^{(c)}, B^{(c)}]$, $c \in C = \left\{1, 2, \ldots, \sum_k \binom{m}{k}\right\}$, όπου $A^{(c)}$, $A^{(c)} \geq 0$, η $\rho \times k$ μήτρα των εισροών ανά μονάδα εργασίας και $B^{(c)}$, $B^{(c)} \geq 0$, η $\nu \times k$ μήτρα των εκροών ανά μονάδα εργασίας της τεχνικής $[A^{(c)}, B^{(c)}]$. Τεχνικές, οι οποίες, για να παράγουν έναν ορισμένο αριθμό εμπορευμάτων, χρησιμοποιούν όλα αυτά τα εμπορεύματα και μόνον αυτά ή μερικά μόνον από αυτά ως εισροές και επίσης έναν αριθμό διαδικασιών παραγωγής ίσο με τον αριθμό των εμπορευμάτων που παράγουν και για τις οποίες συνεπώς ισχύει $\rho \leq \nu = k$, τις ονομάζουμε τετράγωνες. Τεχνικές αντιθέτως, οι οποίες, για να παράγουν έναν ορισμένο αριθμό εμπορευμάτων, είτε χρησιμοποιούν ένα μικρότερο ή μεγαλύτερο αριθμό διαδικασιών παραγωγής είτε –ανεξάρτητα από τον αριθμό διαδικασιών παραγωγής που χρησιμο-

2. Είναι $\sum_k \binom{m}{k} = \sum \left[\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m}\right]$, όπου το $\binom{m}{k}$ συμβολίζει το πλήθος των συνδυασμών των m ανά k διαδικασιών παραγωγής.

ποιούν– χρησιμοποιούν ως εισροές περισσότερα από τα εμπορεύματα που παράγουν, τις ονομάζουμε μη τετράγωνες.

Επειδή για κάθε μη τετράγωνη τεχνική, όταν χρησιμοποιεί περισσότερες ή λιγότερες διαδικασίες παραγωγής από τα εμπορεύματα που παράγει και που χρησιμοποιεί ως εισροές, δεν είναι προφανώς πάντα δυνατό να υπολογισθούν ένα ενιαίο για όλες τις διαδικασίες παραγωγής ποσοστό κέρδους και αντίστοιχες τιμές εμπορευμάτων και, όταν παράγει λιγότερα εμπορεύματα από τις εισροές που χρησιμοποιεί, δεν είναι προφανώς δυνατόν να υπολογισθεί ένας για όλα τα παραχθέντα εμπορεύματα ενιαίος υλικός ρυθμός μεγέθυνσης, αφήνουμε τις μη τετράγωνες τεχνικές εκτός θεώρησης.

Εκτός θεώρησης θα αφήσουμε και τις τετράγωνες διαγώνιες ή οιονεί διαγώνιες τεχνικές. Τετράγωνη διαγώνια ή οιονεί διαγώνια ονομάζουμε μια τεχνική $[A^{(c)}, B^{(c)}]$, όταν η μήτρα $A^{(c)} + B^{(c)}$ είναι διαγώνια ή οιονεί διαγώνια.[3] Μια τέτοια τεχνική «διαλύεται» σε τουλάχιστον δύο τμήματα, καθένα από τα οποία είναι *τελείως* ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα.[4] Ο λόγος, για τον οποίο αφήνουμε εκτός θεώρησης κάθε τετράγωνη διαγώνια ή οιονεί διαγώνια τεχνική, είναι ότι δεν είναι δυνατό να υπολογισθούν για αυτήν ούτε ένα για όλες τις χρησιμοποιηθείσες διαδικασίες παραγωγής ενιαίο ποσοστό κέρδους και αντίστοιχες τιμές εμπορευμάτων ούτε ένας για όλα τα παραχθέντα εμπορεύματα

---

3. Φυσικά, η $A^{(c)} + B^{(c)}$, για να είναι διαγώνια ή οιονεί διαγώνια πρέπει να είναι τετράγωνη, δηλ. οι $A^{(c)}$ και $B^{(c)}$ να είναι τετράγωνες.

4. Στις διασπώμενες τεχνικές αντιθέτως, κάθε τμήμα από τα τμήματα, στα οποία διασπάται η τεχνική, εξαρτάται –εξαιρέσει του βασικού τμήματος, το οποίο δεν εξαρτάται από κανένα από τα υπόλοιπα τμήματα– από ένα τουλάχιστον άλλο τμήμα. Διασπώμενη (μη διασπώμενη) ονομάζεται μια τεχνική $[A^{(c)}, B^{(c)}]$, όταν η $A^{(c)} + B^{(c)}$ είναι (δεν είναι) διασπώμενη.

ενιαίος υλικός ρυθμός μεγέθυνσης. Ωστόσο αντ' αυτής παραμένουν εντός θεώρησης τα τελείως ανεξάρτητα μεταξύ των τμήματά της, διότι καθένα από αυτά συνιστά μια τετράγωνη μη διαγώνια ή οιονεί διαγώνια τεχνική, για την οποία μπορούν να υπολογισθούν ένα για όλες τις διαδικασίες παραγωγής ενιαίο ποσοστό κέρδους και αντίστοιχες τιμές εμπορευμάτων καθώς και ένας για όλα τα εμπορεύματα ενιαίος υλικός ρυθμός μεγέθυνσης.[5]

Έστω σ το πλήθος των μη τετράγωνων και των τετράγωνων διαγώνιων ή οιονεί διαγώνιων τεχνικών. Τότε το πλήθος ξ των τετράγωνων μη διαγώνιων ή οιονεί διαγώνιων τεχνικών είναι

$$\xi = \sum_k \binom{m}{k} - \sigma, \;\; 1 \leq k \leq m.$$

Συμβολίζουμε κάθε τετράγωνη μη διαγώνια ή οιονεί διαγώνια τεχνική της δεδομένης τεχνολογίας $[\bar{A}, \bar{B}]$ με $[A^{(d)}, B^{(d)}]$, $d \in D = \{1, 2, \ldots, \xi\}$. Κάθε τεχνική $[A^{(d)}, B^{(d)}]$ χρησιμοποιεί k διαδικασίες παραγωγής. Ωστόσο τώρα για το k ισχύει $1 \leq k \leq n$, διότι κάθε k, $n < k \leq m$, ορίζει μη τετράγωνες τεχνικές που χρησιμοποιούν περισσότερες διαδικασίες παραγωγής από τα εμπορεύματα που παράγουν, αφού ο αριθμός των από μια τεχνική παραχθέντων εμπορευμάτων είναι το πολύ ίσος με n.

Προϋποθέτουμε ότι κάθε τεχνική $[A^{(d)}, B^{(d)}]$ είναι προσοδοφόρα[6] και συνεπώς ότι ισχύει γι' αυτήν, όταν είναι μη διασπώμενη,

---

5. Στην επίλυση του προβλήματος από τον von Neumann καθώς και στις συνήθεις επιλύσεις του που έγιναν αργότερα, οι μη τετράγωνες και οι τετράγωνες διαγώνιες ή οιονεί διαγώνιες τεχνικές δεν τίθενται ρητά εκτός θεώρησης.

6. Προσοδοφόρα ονομάζουμε μια τεχνική, στις εισροές της οποίας, όπως εδώ, ανήκουν και τα μισθιακά εμπορεύματα, όταν είναι ικανή

$$[B^{(d)} - A^{(d)}]^{-1} > 0 \qquad \text{(I)}$$

και όταν είναι διασπώμενη,

$$[B^{(d)} - A^{(d)}]^{-1} \geq 0.^{7} \qquad \text{(II)}$$

Η συνθήκη αυτή συνεπάγεται ότι όλες οι τεχνικές σύνθετης παραγωγής της υπό θεώρησιν τεχνολογίας διατηρούν τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τις τεχνικές απλής παραγωγής. Έτσι εδώ κάθε τεχνική σύνθετης παραγωγής συμπεριφέρεται σαν να ήταν τεχνική απλής παραγωγής, δηλ., όπως λέγεται συνήθως, «ομαλά».[8]

Οι συνθήκες (I) και (II) διασφαλίζουν η μεν πρώτη τη θετικότητα των τιμών παραγωγής όλων των από μια *μη διασπώμενη* τεχνική παραγόμενων εμπορευμάτων, η δε δεύτερη τη θετικότητα ή ημιθετικότητα των τιμών παραγωγής όλων των από μια *διασπώμενη* τεχνική παραγόμενων εμπορευμάτων, αποκλείουν δηλ. την εμφάνιση αρνητικών τιμών παραγωγής. (Δες Παράρτημα I)

να παράγει κάθε εξωγενώς δεδομένο θετικό ή ημιθετικό υπερπροϊόν παράγοντας ένα αντίστοιχο ακαθάριστο προϊόν, το οποίο, όταν η τεχνική είναι μη διασπώμενη, είναι και στις δύο περιπτώσεις θετικό και, όταν η τεχνική είναι διασπώμενη, είναι στη μεν πρώτη περίπτωση θετικό, στη δε δεύτερη περίπτωση είτε θετικό είτε ημιθετικό.

7. Το σύμβολο «≥» εδώ ισχύει όταν τα μερικά (μόνο) στοιχεία της μήτρας $[B^{(d)} - A^{(d)}]^{-1}$ είναι ίσα με μηδέν.

8. Για την «ομαλή» συμπεριφορά μη διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής δες Salvadori N. and Steedman I., «Joint Production Analysis in a Sraffian Framework», *Bulletin of Economic Research*, τόμ. 40, 1988, σσ. 165-195. Και για την «ομαλή» συμπεριφορά μη διασπώμενων και διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής δες Γ. Σταμάτης, «Περί της "ομαλής" συμπεριφοράς μη διασπώμενων και πολλαπλώς διασπώμενων συστημάτων σύνθετης παραγωγής», *Τεύχη πολιτικής οικονομίας*, τεύχος 17, Φθινόπωρο 1995.

Για το ποσοστό κέρδους r ισχύει προφανώς

$$r = \frac{\bar{p}\bar{B}\bar{x}}{\bar{p}\bar{A}\bar{x}} - 1, \tag{1}$$

όπου $\bar{x}$,

$$\bar{x} \geq 0, \tag{2}$$

το $m \times 1$ διάνυσμα των επιπέδων δραστηριότητας των m διαθέσιμων διαδικασιών παραγωγής και $\bar{p}$,

$$\bar{p} \geq 0, \tag{3}$$

το $1 \times n$ διάνυσμα τιμών των n δυνάμενων να παραχθούν εμπορευμάτων.

Επειδή έχουμε προϋποθέσει, ότι κάθε τεχνική $[A^{(d)}, B^{(d)}]$ χρησιμοποιεί k, $1 \leq k \leq n$, διαδικασίες παραγωγής, κάθε διάνυσμα $\bar{x}$ έχει ακριβώς k θετικές και $m - k$ μηδενικές συνιστώσες. Οι μηδενικές συνιστώσες ενός $\bar{x}$ παριστούν τα επίπεδα δραστηριότητας των εκάστοτε μη χρησιμοποιηθεισών διαδικασιών παραγωγής. Στα διανύσματα $\bar{x}$ που μόλις ορίσαμε δεν περιλαμβάνονται βέβαια εκείνα, τα οποία παριστούν τα επίπεδα δραστηριότητας μη τετράγωνων τεχνικών ή τετράγωνων αλλά διαγώνιων ή οιονεί διαγώνιων τεχνικών, διότι καμιά τεχνική $[A^{(d)}, B^{(d)}]$ δεν είναι μη τετράγωνη ή τετράγωνη, αλλά διαγώνια ή οιονεί διαγώνια.

Επειδή κάθε τεχνική $[A^{(d)}, B^{(d)}]$ είναι τετράγωνη παράγει k ακριβώς εμπορεύματα χρησιμοποιώντας όλα αυτά τα εμπορεύματα και μόνον αυτά ως εισροές.[9] Συνεπώς κάθε

9. Ένας ακόμη λόγος, για τον οποίο αποκλείουμε τις τεχνικές, που, κι αν ακόμη χρησιμοποιούν τον ίδιο αριθμό διαδικασιών παραγωγής με τον αριθμό των εμπορευμάτων που παράγουν, χρησιμοποιούν ως εισροές περισσότερα από τα εμπορεύματα που παράγουν, είναι ότι, εάν δεν τις αποκλείαμε, τότε θα είμαστε αναγκασμένοι να ομιλούμε –σε αντί-

διάνυσμα $\bar{p}$ περιέχει ακριβώς n – k μηδενικές συνιστώσες, οι οποίες παριστούν τις «τιμές» των n – k δυνάμενων να παραχθούν αλλά μη παραχθέντων εμπορευμάτων. Οι υπόλοιπες k συνιστώσες του $\bar{p}$ είναι, όπως θα δείξουμε στα ακόλουθα, ή όλες θετικές ή μερικές θετικές και μερικές μηδενικές. Οι μηδενικές εξ αυτών των υπολοίπων k συνιστωσών του $\bar{p}$ παριστούν μηδενικές τιμές πράγματι παραχθέντων εμπορευμάτων.

Η (1) θεωρείται γενικώς μια συνάρτηση, η οποία παριστά το r ως συνεχή συνάρτηση δύο –και μεταξύ των– ανεξάρτητων μεταβλητών, του $\bar{p}$ και του $\bar{x}$. Αυτό γίνεται ως ακολούθως: Το $\bar{p}$ και το $\bar{x}$ θεωρούνται μη διακριτές (= συνεχείς) μεταβλητές. Το $\bar{p}$ και το $\bar{x}$ θεωρούνται ανεξάρτητες μεταβλητές. Τέλος, το $\bar{p}$ και το $\bar{x}$ θεωρούνται μεταξύ τους ανεξάρτητα, έτσι που σε κάθε $\bar{x}$ μπορεί να αντιστοιχεί καθένα από τα $\bar{p}$, δηλ. οποιοδήποτε $\bar{p}$, και σε κάθε $\bar{p}$ καθένα από τα $\bar{x}$, δηλ. οποιοδήποτε $\bar{x}$. Συγκεκριμένα το $\bar{p}$ και το $\bar{x}$ θεωρούνται *διαχωρίσιμες (=sparabel)* μεταβλητές. Συνεπεία των παραπάνω, το r θεωρείται άρρητα όχι κατ' ανάγκην ως το για όλες τις διαδικασίες παραγωγής της εκάστοτε δεδομένης τεχνικής *ενιαίο* ποσοστό κέρδους, αλλ' απλώς ως το *μέσο* ποσοστό κέρδους αυτής της τεχνικής. Συνεπεία του τελευταίου θεωρείται ότι το διάνυσμα $\bar{p}$ των τιμών των απ' αυτήν την τεχνική παραχθέντων εμπορευμάτων δεν είναι ορισμένο ως το διάνυσμα των τιμών παραγωγής, δηλ. των τιμών που διασφαλίζουν ένα για όλες τις από την τεχνική χρησιμοποιηθείσες διαδικασίες παραγωγής *ενιαίο* ποσοστό κέρδους, αλλά είναι ένα διάνυσμα οποιωνδήποτε θετικών ή ημιθετικών τιμών των παραχθέντων εμπο-

---

φαση προς το ίδιο μας το μοντέλο– και για αρχικές εισροές. Διότι τα εμπορεύματα, που δεν παράγει αλλ' ωστόσο χρησιμοποιεί ως εισροές μια τέτοια τεχνική, δεν είναι τίποτε άλλο παρά μη παραγόμενες αρχικές εισροές.

ρευμάτων, στο οποίο ως εκ τούτου αντιστοιχεί ένα *μέσο* και όχι ένα *ενιαίο* ποσοστό κέρδους. Αυτό σημαίνει προφανώς ότι θεωρείται ότι δεν υπάρχει θεωρία προσδιορισμού των τιμών των εμπορευμάτων και ότι οι τελευταίες είναι απλώς ημιθετικές και τυχαίες.

Θα δείξουμε, ότι το $\bar{p}$ δεν είναι ανεξάρτητο από το $\bar{x}$, αλλά είναι *διακριτή* συνάρτηση του $\bar{x}$, με συνέπεια το r να είναι *διακριτή* συνάρτηση του $\bar{x}$ *και μόνον* του $\bar{x}$. Το πράγμα έχει έτσι για τους ακόλουθους λόγους:

Το πρώτο μέρος του προβλήματος του von Neumann συνίσταται στο ερώτημα, ποια από τις ξ το πλήθος τετράγωνες μη διαγώνιες ή οιονεί διαγώνιες τεχνικές της δεδομένης τεχνολογίας μεγιστοποιεί το *για όλες τις απ' αυτήν την τεχνική χρησιμοποιούμενες διαδικασίες παραγωγής ενιαίο* ποσοστό κέρδους. Έστω ότι η μεγιστοποιούσα το ενιαίο ποσοστό κέρδους τεχνική είναι η [A*, B*]. Τότε, επειδή το ποσοστό κέρδους αυτής της τεχνικής είναι *ενιαίο για όλες τις απ' αυτήν την τεχνική χρησιμοποιούμενες διαδικασίες παραγωγής*, ισχύει

$$p^*B^* = (1 + r^*)p^*A^* \Rightarrow$$

$$p^*B^* - p^*A^* = r^*p^*A^* \Rightarrow$$

$$p^*(B^* - A^*) = r^*p^*A^* \Rightarrow$$

$$p^* = r^*p^*A^*(B^* - A^*)^{-1} \Rightarrow$$

$$p^*[I - r^*H^*] = 0 \text{ με } H^* = A^*(B^* - A^*)^{-1}\ (\geq 0), \quad (4)$$

όπου r* το για όλες τις χρησιμοποιηθείσες διαδικασίες παραγωγής ενιαίο ποσοστό κέρδους της μεγιστοποιούσας το ποσοστό κέρδους τεχνικής [A*, B*], δηλ. το ως προς την τεχνική μέγιστο και για όλες τις χρησιμοποιηθείσες διαδικασίες παραγωγής ενιαίο ποσοστό κέρδους, και p* το διάνυ-