Για τη θέση και την κλίση της w–r–καμπύλης

1. Εισαγωγικά

Η λεγόμενη συζήτηση των δυο Cambridges μεταξύ νεοκλασικών και νεορικαρδιανών οικονομολόγων (δες Harcourt 1972) δεν μπόρεσε να διαπιστώσει τους παράγοντες, οι οποίοι προσδιορίζουν στη γενική περίπτωση[1] τη σχέση μεταξύ του ονομαστικού ωρομισθίου (w) και του ποσοστού κέρδους (r), δηλ. τους παράγοντες, οι οποίοι προσδιορίζουν τόσο την κλίση της w–r–καμπύλης όσο και τη θέση αυτής της καμπύλης όπως δίδεται από το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο και το μέγιστο ποσοστό κέρδους που προκύπτουν από την ίδια αυτή καμπύλη.

Ο σκοπός αυτού του άρθρου συνίσταται στον προσδιορισμό αυτών των παραγόντων και στην εξαγωγή ορισμένων σχετικών συμπερασμάτων.

Στο 2ο Μέρος αυτού του άρθρου παρουσιάζουμε και αναλύουμε ένα διασπώμενο γραμμικό σύστημα παραγωγής καθώς και τα υποσυστήματα, στα οποία διασπάται. Στο 3ο Μέρος πραγματευόμαστε το ζήτημα της τυποποίησης των τιμών και εισάγουμε τις έννοιες του τυπικού εμπορεύματος και του τυπικού υποσυστήματος. Τυπικό εμπόρευμα ονομάζουμε το εμπόρευμα ή καλάθι εμπορευμάτων, την τιμή του οποίου θέτουμε, με σκοπό να τυποποιήσουμε το διάνυσμα των τιμών, ίση με μια θετική σταθερά. Και τυπικό υποσύστημα ονομάζουμε το υποσύστημα, το οποίο, χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική με το δεδομένο σύστημα παραγωγής, παράγει ως *καθαρό* προϊόν του το επιλεχθέν τυπικό εμπόρευμα. Στο 4ο Μέρος εξάγουμε την w–r–σχέση του δεδομένου συστήματος παραγωγής. Στο 5ο Μέ-

1. Με γενική περίπτωση εννοούμε στα ακόλουθα το σύνολο όλων των δυνατών περιπτώσεων.

ρος διατυπώνουμε τον ισχυρισμό ότι αυτή η w–r–σχέση είναι στην πραγματικότητα όχι η w–r–σχέση του δεδομένου συστήματος παραγωγής, αλλά αυτή του εκάστοτε τυπικού υποσυστήματος. Την ορθότητα αυτού του ισχυρισμού αποδεικνύουμε στα Μέρη 6-8. Στο 9ο Μέρος αποδεικνύουμε ότι η θέση και η κλίση της w–r–καμπύλης εξαρτώνται από την τυποποίηση των τιμών και ειδικότερα από το επιλεχθέν τυπικό εμπόρευμα και το αντίστοιχο τυπικό υποσύστημα. Στο 10ο Μέρος δείχνουμε ότι, συνεπεία του γεγονότος ότι η w–r–σχέση είναι αυτή του εκάστοτε τυπικού υποσυστήματος,

α) η σύγκριση και η μονοσήμαντη κατάταξη δεδομένων τεχνικών ως προς την κερδοφορία τους καθώς και η επιλογή της πλέον κερδοφόρας από αυτές είναι αδύνατη και
β) ότι τα φαινόμενα του switch και reswitching of techniques εμφανίζονται και εξαφανίζονται ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη τυποποίηση των τιμών.

Τέλος, στο 11ο Μέρος λύνουμε οριστικά το μέχρι σήμερα άλυτο πρόβλημα του τρόπου, με τον οποίο μεταβάλλεται η τιμή ενός εμπορεύματος ή ενός καλαθιού εμπορευμάτων, όταν μεταβάλλεται το ποσοστό κέρδους ή το ονομαστικό ωρομίσθιο.

2. Το αναλυτικό πλαίσιο: ένα διασπώμενο σύστημα παραγωγής

Έστω ένα σύστημα παραγωγής [A, l, X], το οποίο παράγει, χρησιμοποιώντας τη γραμμική παραγωγική τεχνική [A, l], το ακαθάριστο προϊόν X, $X > 0$. Το A, $A \geq 0$, συμβολίζει την $n \times n$ μήτρα των τεχνολογικών συντελεστών και το l, $l > 0$, συμβολίζει το διάνυσμα των εισροών σε εργασία ανά μονάδα παραγομένου εμπορεύματος. Προϋποθέτουμε ότι rankA = n, δηλ. ότι η A είναι μη ιδιάζουσα. Επίσης προϋποθέτουμε ότι η A είναι διασπώμενη και ότι για την κανονική μορφή της ισχύει

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς οι A_{11} και A_{22} είναι μη διασπώμενες.

Η παραπάνω κανονική μορφή της A δείχνει ότι το δεδομένο σύστημα παραγωγής [A, l, X] παράγει με τη βοήθεια της τεχνικής [A, l] δυο είδη εμπορευμάτων: βασικά εμπορεύματα (1ο είδος εμπορευμάτων) και εισερχόμενα στην παραγωγή όλων των μη βασικών εμπορευμάτων μη βασικά εμπορεύματα (2ο είδος εμπορευμάτων).

Έστω ότι το σύστημα παράγει m εμπορεύματα του 1ου είδους και συνεπώς n – m εμπορεύματα του 2ου είδους, όπου $1 \leq m \leq n - 1$. Συνεπώς η A_{11} είναι μια $m \times m$ μήτρα και η A_{22} είναι μια $(n - m) \times (n - m)$ μήτρα. Επειδή εξ υποθέσεως είναι $\text{rank}A = n$, είναι επίσης και $\text{rank}A_{11} = m$ καθώς και $\text{rank}A_{22} = n - m$. Και οι μήτρες A_{11} και A_{22} είναι λοιπόν μη ιδιάζουσες. Τέλος, προϋποθέτουμε ότι $A_{12} \geq 0$.

Επειδή η τεχνική [A, l] είναι παραγωγική, ισχύει

$$\lambda_m^A < 1,$$

όπου λ_m^A η μέγιστη ιδιοτιμή της A. Γνωρίζουμε επίσης ότι ισχύει

$$\lambda_m^A = \max(\lambda_m^{A_{11}}, \lambda_m^{A_{22}}),$$

όπου $\lambda_m^{A_{11}}$ και $\lambda_m^{A_{22}}$ οι μέγιστες ιδιοτιμές των A_{11} και A_{22} αντιστοίχως. Συνεπώς είναι

$$\lambda_m^{A_{11}}, \lambda_m^{A_{22}} < 1.$$

Προϋποθέτουμε, τέλος, ότι είναι

$$\lambda_m^{A_{11}} \neq \lambda_m^{A_{22}}$$

καθώς επίσης ότι στην περίπτωση που είναι $\lambda_m^{A_{11}} < \lambda_m^{A_{22}}$ όλες οι ιδιοτιμές της A_{22} πλην φυσικά της μεγίστης ιδιοτιμής $\lambda_m^{A_{22}}$ είναι μικρότερες από τη μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_m^{A_{11}}$ της A_{11}.

Θα χρησιμοποιήσουμε στα ακόλουθα τους εξής ορισμούς:

1. Το r είναι το ποσοστό κέρδους του δεδομένου συστήματος παραγωγής [A, l, X] καθώς και κάθε υποσυστήματος αυτού του συστήματος.
2. Το R είναι το μέγιστο ποσοστό κέρδους του δεδομένου συστήματος παραγωγής [A, l, X]. Το R είναι το ποσοστό κέρδους r, το οποίο αντιστοιχεί στο ίσο με μηδέν ονομαστικό ωρομίσθιο w.
3. Το $\overline{R}$ είναι η τιμή του R, η οποία αντιστοιχεί σε *θετικό ή ημιθετικό* διάνυσμα τιμών p όλων των εμπορευμάτων που πα-

ράγει το δεδομένο σύστημα παραγωγής ως *ακαθάριστο* προϊόν. Πιο συγκεκριμένα το $\overline{R}$ είναι το ποσοστό κέρδους r, το οποίο προκύπτει στην περίπτωση, στην οποία οι τιμές όλων των εμπορευμάτων που παράγονται από το δεδομένο σύστημα παραγωγής ως *ακαθάριστο* προϊόν είναι *θετικές ή θετικές και μηδενικές* και οι τιμές των εισροών του συστήματος πλην των εισροών του που παράγει αυτό το ίδιο, δηλ. η τιμή της εργασιακής δύναμης w, είναι ίσες με μηδέν.

Εάν οι μισθοί πληρώνονται στο τέλος της περιόδου παραγωγής, οι τιμές p των εμπορευμάτων πληρούν τη σχέση

$$p[I - (1 + r)A] = wl. \qquad (1)$$

Θέτοντας w = 0, παίρνουμε

$$p[I - (1 + R)A] = 0, \text{ για } w = 0 \text{ και } r = R. \qquad (2)$$

Από την (2) προκύπτει

$$R = \frac{1 - \lambda^A}{\lambda^A}$$

και

$$\overline{R} = \frac{1 - \lambda^A_m}{\lambda^A_m},$$

όπου λ^A οι ιδιοτιμές της $\underline{A}$.

Είναι προφανές ότι το $\overline{R}$ είναι η μικρότερη θετική τιμή του R. Το $\overline{R}$ είναι λοιπόν εκείνη η τιμή του μέγιστου ποσοστού κέρδους R του δεδομένου συστήματος παραγωγής, για το οποίο η σχέση $0 \leq r \leq \overline{R}$ εγγυάται *θετικό ή ημιθετικό* διάνυσμα τιμών όλων των εμπορευμάτων που παράγει το δεδομένο σύστημα παραγωγής ως *ακαθάριστο* προϊόν του (θετικό, όταν $0 \leq r < \overline{R}$, και θετικό ή ημιθετικό, όταν $r = \overline{R}$).

Για το υποσύστημα παραγωγής I (υποσύστημα παραγωγής II), το οποίο παράγει ως *καθαρό* προϊόν του μόνον εμπορεύματα του 1ου είδους (μόνον εμπορεύματα του 2ου είδους) ορίζουμε:

1. Το R_I (το R_{II}) ως το μέγιστο ποσοστό κέρδους του υποσυστή-

ματος I (του υποσυστήματος II) και

2. Το $\overline{R}_I$ (το $\overline{R}_{II}$) ως εκείνη την τιμή του R_I (του R_{II}), η οποία αντιστοιχεί σε *θετικές* τιμές p_I (σε *θετικές* τιμές p_{II}) όλων των εμπορευμάτων που παράγονται από το υποσύστημα I (από το υποσύστημα II) ως *καθαρό* προϊόν του. Πιο συγκεκριμένα το $\overline{R}_I$ (το $\overline{R}_{II}$) είναι εκείνη η τιμή του ποσοστού κέρδους r του υποσυστήματος I (του υποσυστήματος II), η οποία προκύπτει όταν οι τιμές p_I (οι τιμές p_{II}) όλων των εμπορευμάτων που παράγονται από το υποσύστημα I (από το υποσύστημα II) ως *καθαρό* προϊόν του είναι *θετικές* και οι τιμές όλων των εισροών του υποσυστήματος I (του υποσυστήματος II) πλην αυτών, οι οποίες παράγονται από το υποσύστημα I (από το υποσύστημα II) ως *καθαρό* προϊόν του, είναι ίσες με μηδέν.

Δεδομένης της διασπασιμότητας της A, παίρνουμε από την (2)

$$p_I[I - (1 + R)A_{11}] = 0 \qquad \text{(a)}$$

και

$$p_{II}[I - (1 + R)A_{22}] = p_I(1 + R)A_{12}. \qquad \text{(b)}$$

Από τις (a) και (b) παίρνουμε

$$R_I = \frac{1 - \lambda^{A_{11}}}{\lambda^{A_{11}}}$$

$$\overline{R}_I = \frac{1 - \lambda_m^{A_{11}}}{\lambda_m^{A_{11}}},$$

$$R_{II} = \frac{1 - \lambda^{A_{22}}}{\lambda^{A_{22}}}$$

και

$$\overline{R}_{II} = \frac{1 - \lambda_m^{A_{22}}}{\lambda_m^{A_{22}}},$$

όπου $\lambda^{A_{11}}$ και $\lambda^{A_{22}}$ οι ιδιοτιμές των A_{11} και A_{22} αντιστοίχως.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι το $\overline{R}_I$ είναι η μικρότερη θετική τιμή του R_I, δηλ. ότι $R_I \geq \overline{R}_I$, καθώς επίσης, ότι το $\overline{R}_{II}$ είναι η μικρότερη θετική τιμή του R_{II}, δηλ. ότι $R_{II} \geq \overline{R}_I$. Το $\overline{R}_I$ (το $\overline{R}_{II}$) είναι λοιπόν εκείνη η τιμή του μέγιστου ποσοστού κέρδους R_I (R_{II}) του υποσυστήματος παραγωγής I (του υποσυστήματος παραγωγής II), για την οποία η σχέση $0 \leq r \leq \overline{R}_I$ (η σχέση $0 \leq r \leq \overline{R}_{II}$) εγγυάται *θετικές* τιμές p_I (*θετικές* τιμές p_{II}) όλων των εμπορευμάτων που παράγονται από το υποσύστημα παραγωγής I (από το υποσύστημα παραγωγής II) ως *καθαρό* προϊόν του.

Ό,τι ελέχθη παραπάνω για το δεδομένο σύστημα παραγωγής [A, l, X] ισχύει και για κάθε υποσύστημα [A, l, V] του δεδομένου συστήματος παραγωγής, το οποίο χρησιμοποιεί την ίδια τεχνική [A, l] με το δεδομένο σύστημα παραγωγής και παράγει όπως αυτό το τελευταίο όλα τα n εμπορεύματα, την παραγωγή των οποίων καθιστά δυνατή η χρησιμοποίηση της τεχνικής [A, l], σε διαφορετικές όμως ποσότητες, δηλ. για κάθε υποσύστημα [A, l, V] του δεδομένου συστήματος παραγωγής, για το οποίο ισχύει $V > 0$ και $V \neq X$. Εάν είναι το r το ποσοστό κέρδους, το R_v το μέγιστο ποσοστό κέρδους του υποσυστήματος [A, l, V] και το $\overline{R}_v$ η μικρότερη θετική τιμή του R_v, τότε έχουμε $R_v = R$ και $\overline{R}_v = \overline{R}$. Ως εκ τούτου για τις τιμές p όλων των εμπορευμάτων που παράγει το υποσύστημα [A, l, V] ως *ακαθάριστο* προϊόν του ισχύει ό,τι ελέχθη παραπάνω για τις τιμές p των ίδιων εμπορευμάτων που παράγονται από το δεδομένο σύστημα παραγωγής [A, l, X] ως *ακαθάριστο* προϊόν του.

3. Η τυποποίηση των τιμών

Η (2) έχει λύση πλην της τετριμμένης $p = 0$, εάν είναι $\mathrm{rank}[I - (1 + R)A] < n$, όπου n είναι η τάξη της A και συνεπώς και της $[I - (1 + R)A]$.

Μπορεί να δείξει κανείς (δες Σταμάτης 1991, τόμος 1ος, σελ. 67 κ.ε.) ότι, όταν είναι $\mathrm{rank}A = n$, τότε είναι και

$$\mathrm{rank}[I - (1 + R)A] = n - 1. \tag{3}$$

Επειδή λοιπόν ισχύει η (3), η (2) έχει λύση πλην της τετριμμένης. Η λύση της (2) δίνει n τιμές για το R, σε καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί ένα εξαιρέσει ενός βαθμωτού πλήρως προσδιορισμένο διάνυσμα τιμών p.

Συνεπεία της (3) υπάρχει η αντίστροφη της $[I - (1 + r)A]$ για κάθε r, $r \geq 0$ και $r \neq R$ και αντιστοίχως για κάθε w, $0 < w \leq w_{max}$, όπου $w_{max} = w_{(r = 0)}$. Έτσι από την (1) παίρνουμε

$$p = wl[I - (1 + r)A]^{-1}, \text{ για } 0 < w \leq w_{max} \text{ ή } 0 \leq r \text{ και } r \neq R. \quad (4)$$

Είναι προφανές ότι για εξωγενώς δεδομένο r η (4) προσδιορίζει εξαιρέσει ενός βαθμωτού πλήρως και μονοσήμαντα το διάνυσμα των τιμών p, ενώ για εξωγενώς δεδομένο w δεν το προσδιορίζει.

Από τα παραπάνω έπεται ότι η (1) ή, αντιστοίχως, οι (2) και (4) δεν προσδιορίζουν για εξωγενώς δεδομένο w ή εξωγενώς δεδομένο w πλήρως το p, αλλά ότι ή δεν το προσδιορίζουν ή, όταν το προσδιορίζουν, το προσδιορίζουν εξαιρέσει ενός βαθμωτού πλήρως.

Για να πάρουμε όμως από την (1) ή από τις (2) και (4) την w–r–σχέση, πρέπει προφανώς το διάνυσμα των τιμών p να είναι για δεδομένο w ή δεδομένο r πλήρως προσδιορισμένο. Έτσι λοιπόν, για να πάρουμε από την (1) ή από τις (2) και (4) τη w–r–σχέση, θα πρέπει να καθορίσουμε αυθαίρετα το προαναφερθέν βαθμωτό. Αυτό γίνεται μέσω του αυθαίρετου καθορισμού της τιμής ενός εμπορεύματος ή ενός καλαθιού εμπορευμάτων.

Αυτό τον αυθαίρετο καθορισμό της τιμής ενός εμπορεύματος ή ενός καλαθιού εμπορευμάτων τον ονομάζουμε τυποποίηση των τιμών. Η τυποποίηση των τιμών γίνεται μέσω της εξίσωσης της τιμής ενός οποιουδήποτε εμπορεύματος ή καλαθιού εμπορευμάτων με μια οποιαδήποτε θετική σταθερή ποσότητα ενός ομοιογενούς εκτατικού πράγματος.

Αυτή την εξίσωση, αυτό το εμπόρευμα ή καλάθι εμπορευμάτων και αυτό το ομοιογενές εκτατικό πράγμα τα ονομάζουμε αντιστοίχως εξίσωση τυποποίησης, τυπικό εμπόρευμα και πλασματικό χρήμα. Κανένα από τα εμπορεύματα που παράγει το δεδομένο σύστημα παραγωγής πλην του ίδιου του τυπικού εμπορεύματος δεν μπορεί να λειτουργήσει ως πλασματικό χρήμα. Διότι διαφορετικά το σύστημα εξισώσεων προσδιορισμού των τιμών θα ήταν υπερπροσδιορισμένο.

Έστω y, $y \geq 0$, το τυπικό εμπόρευμα. Εάν θέσουμε την τιμή αυτού του τυπικού εμπορεύματος ίση με b μονάδες του ομοιογενούς εκτατικού πράγματος B, το οποίο όμως δεν παράγεται από το δεδομένο σύστημα παραγωγής ως εμπόρευμα, τότε αυτή η εξίσωση, δηλ. η

$$py = b, \; b = \text{θετική σταθερά}, \tag{5}$$

είναι η εξίσωση τυποποίησης των τιμών. Το Β είναι το πλασματικό χρήμα, στο οποίο εκφράζονται οι απόλυτες τιμές και συνεπώς και όλα τα ονομαστικά μεγέθη.

Το υποσύστημα παραγωγής, το οποίο, χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική με το δεδομένο σύστημα παραγωγής, παράγει ως καθαρό προϊόν του το επιλεχθέν τυπικό εμπόρευμα y, το ονομάζουμε τυπικό υποσύστημα. Το ακαθάριστο προϊόν x του παραπάνω τυπικού υποσυστήματος είναι προφανώς

$$x = (I - A)^{-1}y \; (\geq 0). \tag{6}$$

4. Η w–r–σχέση

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (1) από δεξιά με το y και λαμβάνοντας υπόψη την (5), παίρνουμε

$$w = \frac{b}{l[I - (1 + r)A]^{-1}y}, \; \text{για } 0 < w \leq w_{max} \text{ και } r \geq 0 \text{ και } r \neq R, \tag{7}$$

και

$$R = \frac{b - pAy}{pAy} \; \frac{p(I - A)y}{pAy}, \; \text{για } r = R. \tag{8}$$

Οι (7) και (8) συνιστούν την w–r–σχέση.

Διαγράφοντας από τα διανύσματα x, y, l και p εκείνες τις συνιστώσες, οι οποίες στο διάνυσμα x είναι ίσες με μηδέν, οι οποίες δηλ. αφορούν εμπορεύματα που παράγονται μόνον από το δεδομένο σύστημα παραγωγής όχι όμως και από το τυπικό υποσύστημα, παίρνουμε αντιστοίχως τα διανύσματα x^*, y^*, l^* και p^*. Διαγράφοντας όλες τις στήλες και τις αντίστοιχες γραμμές της Α, οι οποίες αφορούν τα παραπάνω εμπορεύματα, παίρνουμε την A^*.

Το A^* είναι εκείνο το μέρος της Α (που μπορεί βέβαια να συμπίπτει με την Α), το οποίο συνιστά τη μήτρα των τεχνολογικών συντελεστών του τυπικού υποσυστήματος. Το l^* είναι εκείνο το μέρος του l, το οποίο συνιστά το διάνυσμα εισροών σε εργασία ανά μονάδα των παραγομένων από το τυπικό υποσύστημα εμπορευμάτων και μόνον αυτών. Έτσι η τεχνική $[A^*, l^*]$ είναι εκείνο το μέρος της τεχνικής $[A, l]$, το οποίο χρησιμοποιείται από το τυπικό υποσύστημα. Τέλος, το p^* είναι εκείνο το μέρος του διανύσματος p, το οποίο συνιστά το διάνυσμα των τιμών των παραγομένων από το τυπικό υποσύστημα εμπορευμάτων και μόνον αυτών των εμπορευμάτων.

Διακρίνουμε, ανάλογα με το είδος του τυπικού εμπορεύματος, δυο είδη τυποποιήσεων:

1ο είδος τυποποίησης: Το τυπικό εμπόρευμα αποτελείται μόνον από εμπορεύματα του 1ου είδους. Στην περίπτωση αυτή το τυπικό υποσύστημα παράγει βέβαια μόνον εμπορεύματα του 1ου είδους.

2ο είδος τυποποίησης: Το τυπικό εμπόρευμα αποτελείται από εμπορεύματα του 2ου είδους ή από εμπορεύματα του 1ου και του 2ου είδους. Κατ᾽ αυτήν την τυποποίηση το τυπικό υποσύστημα παράγει προφανώς όλα τα εμπορεύματα που παράγει και το δεδομένο σύστημα παραγωγής. Στην περίπτωση αυτή το τυπικό υποσύστημα παράγει προφανώς ως *ακαθάριστο* προϊόν του όλα τα εμπορεύματα του δεδομένου συστήματος παραγωγής και συνεπώς είναι ένα τυπικό υποσύστημα του είδους του υποσυστήματος $[A, l, V]$ που αναφέραμε παραπάνω.

Προφανώς για την A^* ισχύει:
Για το 1ο είδος τυποποίησης $A^* = A_{11}$ και για το 2ο είδος τυποποίησης $A^* = A$.

Αν R^* είναι το μέγιστο ποσοστό κέρδους του τυπικού υποσυστήματος και $\overline{R}^*$ είναι εκείνη η τιμή του R^*, η οποία εγγυάται θετικές ή μη αρνητικές τιμές των παραγομένων από το τυπικό υποσύστημα εμπορευμάτων για κάθε r, $0 \leq r \leq \overline{R}^*$, (θετικές για κάθε r, $0 \leq r < \overline{R}^*$, και θετικές ή μη αρνητικές για $r = \overline{R}^*$), τότε ισχύει:

Για το 1ο είδος τυποποίησης

$$R^* U R$$

και

$$\overline{R}^* = \overline{R}_I.$$

Και για το 2ο είδος τυποποίησης

$$R^* = R$$

και

$$\overline{R}^*(=\min(\overline{R}_I, \overline{R}_{II})) = \overline{R} = (\min(\overline{R}_I, \overline{R}_{II})).$$

Ανάλογα λοιπόν με την τυποποίηση μπορεί να είναι είτε

$$\overline{R}^* = \overline{R}_I$$

είτε

$$\overline{R}^* = \overline{R}_{II}.$$

Επίσης κατά το 1ο είδος τυποποίησης είναι

$$\overline{R}^*(=\overline{R}_I) \geq \overline{R}(=\min(\overline{R}_I, \overline{R}_{II})).$$

Συγκεκριμένα, όταν είναι

$$\overline{R}_I > \overline{R}_{II},$$

τότε είναι

$$\overline{R}^*(=\overline{R}_I) > \overline{R}(=\min(\overline{R}_I, \overline{R}_{II}) = \overline{R}_{II}),$$

και, όταν είναι

$$\overline{R}_I < \overline{R}_{II},$$

τότε είναι

$$\overline{R}^*(=\overline{R}_I) = \overline{R}(=\min(\overline{R}_I, \overline{R}_{II}) = \overline{R}_I).$$

Έτσι λοιπόν κατά το 1ο είδος τυποποίησης είναι δυνατό να είναι

$$\overline{R}^*(=\overline{R}_I) \neq \overline{R}(=\min(\overline{R}_I, \overline{R}_{II})).$$

Κατά το 2ο είδος τυποποίησης αντιθέτως είναι πάντα

$$\overline{R}^*(=\min(\overline{R}_I, \overline{R}_{II})) = \overline{R}(=\min(\overline{R}_I, \overline{R}_{II}))$$

και συνεπώς είτε (όταν $\overline{R}_I > \overline{R}_{II}$)

$$\overline{R}^*(= \overline{R}_{II}) = \overline{R}(= \overline{R}_{II})$$

είτε (όταν $\overline{R}_I < \overline{R}_{II}$)

$$\overline{R}^*(=\overline{R}_I) = \overline{R}(=\overline{R}_I).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω τις θέσεις των (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) και (8) παίρνουν αντιστοίχως οι

$$p^*[I^* - (1 + r)A^*] = wl^*, \tag{1α}$$

$$p^*[I^* - (1 + R^*)A^*] = 0, \text{ για } w = 0 \text{ και } r = R^*, \tag{2α}$$

$$\text{rank}[I^* - (1 + R^*)A^*] = k - 1, \tag{3α}$$

όπου k, $1 \leq k \leq n$, η τάξη της A^* και συνεπώς της $[I^* - (1 + R^*)A^*]$,

$$p^* = wl^*[I^* - (1 + r)A^*]^{-1}, \text{ για } 0 < w \leq w_{max} \text{ ή } 0 \leq r \text{ και } r \neq R^*, \tag{4α}$$

$$p^*y^* = b, \tag{5α}$$

$$x^* = (I^* - A^*)^{-1}y^*(> 0) \tag{6α}$$

$$w = \frac{b(=p^*y^*)}{l^*[I^* - (1 + r)A^*]^{-1}y^*}, \text{ για } 0 < w \leq w_{max} \text{ ή } 0 \leq r \text{ και } r \neq R^*, \tag{7α}$$

και

$$R^* = \frac{b - p^*A^*y^*}{p^*A^*y^*} = \frac{p^*(I^* - A^*)y^*}{p^*A^*y^*}, \text{ για } w = 0 \text{ ή } r = R^*. \tag{8α}$$

5. Τα προς απόδειξιν

Θα αποδείξουμε στα ακόλουθα ότι η δια των (7α) και (8α) δεδομένη w–r–σχέση είναι η w–r–σχέση του εκάστοτε τυπικού υποσυστήματος, η οποία, για ορισμένους λόγους, ισχύει και ως η