Κεφάλαιο 4

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΟΓΗ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε το βασικό υπόδειγμα επιλογής που οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν για να εξηγήσουν τη συμπεριφορά των ατόμων. Το υπόδειγμα αυτό υποθέτει ότι τα άτομα που περιορίζονται από τα δεδομένα εισοδήματά τους, θα συμπεριφερθούν σαν να χρησιμοποιούσαν την αγοραστική τους δύναμη κατά τρόπο ώστε να επιτύχουν τη μεγαλύτερη δυνατή χρησιμότητα. Υποθέτουμε δηλαδή ότι τα άτομα συμπεριφέρονται σαν να μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα που αντλούν κάτω από έναν εισοδηματικό περιορισμό. Παρόλο που οι ειδικές εφαρμογές αυτού του υποδείγματος ποικίλλουν, όπως θα δείξουμε, όλες τους βασίζονται στο ίδιο βασικό μαθηματικό υπόδειγμα, και όλες καταλήγουν στο ίδιο γενικό συμπέρασμα: Προκειμένου να μεγιστοποιήσουν τη χρησιμότητα, τα άτομα θα επιλέξουν συνδυασμούς αγαθών όπου ο λόγος ανταλλαγής μεταξύ δύο αγαθών (ο MRS) είναι ίσος με το λόγο των τιμών των αγαθών αυτών. Οι τιμές αγοράς μεταφέρουν στα άτομα πληροφορίες σχετικά με το κόστος ευκαιρίας, και αυτή η πληροφόρηση παίζει σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των επιλογών τους.

Μεγιστοποίηση της χρησιμότητας και αστραπιαίοι υπολογισμοί

Πριν ξεκινήσουμε τη μαθηματική ανάλυση της θεωρίας της επιλογής, θα ήταν χρήσιμο να απαλλαγούμε από δύο αντιρρήσεις που έχουν συνήθως οι μη οικονομολόγοι σχετικά με την προσέγγιση που χρησιμοποιούμε. Η πρώτη είναι ότι κανένας άνθρωπος δεν είναι σε θέση να κάνει τους «αστραπιαίους υπολογισμούς» που απαιτούνται για τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας. Σύμφωνα μ' αυτή την αντίρρηση, όταν οι άνθρωποι κινούνται στο διάδρομο ενός σούπερ μάρκετ, απλά παίρνουν αυτά που προσφέρονται, χωρίς συγκεκριμένο σχέδιο ή σκοπό πίσω από τις πράξεις τους. Οι οικονομολόγοι δεν πείθονται απ' αυτή την αντίρρηση. Αμφισβητούν ότι οι άνθρωποι συμπεριφέρονται τυχαία (καθένας μας, εξάλλου, δεσμεύεται από κάποιου είδους εισοδηματικό περιορισμό) και θεωρούν την κατηγορία περί αστραπιαίων υπολογισμών άτοπη. Θυμηθείτε, ξανά, τον παίκτη μπιλιάρδου του Friedman. Κι αυτός δεν είναι σε θέση να κάνει τους αστραπιαίους υπολογισμούς που απαιτούνται προκειμένου να σχεδιάσει ένα χτύπημα σύμφωνα με τους νόμους της Φυσικής, αλλά οι νόμοι αυτοί εξακολουθούν να προβλέπουν τη συμπεριφορά του παίκτη. Έτσι, όπως θα δούμε, το υπόδειγμα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας προβλέπει πολλές πλευρές της συμπεριφοράς παρότι κανένας δεν κουβαλάει μαζί του έναν προσωπικό υπολογιστή προγραμματισμένο με τη συνάρτηση χρησιμότητάς του. Για να είμαστε ακριβείς, οι οικονομολόγοι υποθέτουν ότι οι άνθρωποι συμπεριφέρονται *σαν να* είχαν κάνει αυτούς τους υπολογισμούς, οπότε η κατηγορία ότι τέτοιοι υπολογισμοί είναι αδύνατο να έχουν γίνει, είναι χωρίς νόημα.

Αλτρουισμός και εγωισμός

Μια δεύτερη κριτική στο υπόδειγμα επιλογής μας είναι ότι φαίνεται εξαιρετικά εγωιστικό – κανένας, σύμφωνα μ’ αυτή, δεν έχει τόσο εγωκεντρικούς στόχους. Παρόλο που οι οικονομολόγοι είναι ίσως πιο πρόθυμοι από άλλους, πιο ουτοπικούς, στοχαστές να αποδεχθούν το προσωπικό συμφέρον ως κίνητρο (ο Adam Smith παρατηρούσε: «Δεν είμαστε έτοιμοι να θεωρήσουμε ότι κάποιο άτομο υπολείπεται σε εγωισμό»[1]), αυτή η κατηγορία είναι επίσης λανθασμένη. Τίποτα στο υπόδειγμα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας δεν εμποδίζει τα άτομα να αντλήσουν ικανοποίηση από τη φιλανθρωπία ή γενικά την καλή πράξη. Οι δραστηριότητες αυτές μπορεί κάλλιστα να θεωρηθούν ότι αποφέρουν χρησιμότητα. Μάλιστα, οι οικονομολόγοι έχουν χρησιμοποιήσει εκτενώς το υπόδειγμα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας για να μελετήσουν τέτοια θέματα, όπως η αφιέρωση χρόνου και χρημάτων σε εράνους, η κληρονομιά των γονέων προς τα παιδιά ή η αιμοδοσία. Συνεπώς, δεν είναι κανείς αναγκασμένος να πάρει θέση στο ερώτημα κατά πόσο τέτοιες δραστηριότητες είναι ιδιοτελείς ή ανιδιοτελείς, αφού οι οικονομολόγοι δεν πιστεύουν ότι οι άνθρωποι θα τις αναλάμβαναν αν ήταν ενάντια στο δικό τους συμφέρον, με την ευρεία έννοια.

Μια αρχική διερεύνηση

Τα γενικά συμπεράσματα της διερεύνησής μας μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

ΑΡΧΗ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Μεγιστοποίηση της χρησιμότητας. Προκειμένου να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητά του, με δεδομένο ένα σταθερό χρηματικό ποσό που διαθέτει προς κατανάλωση, το άτομο θ’ αγοράσει τις ποσότητες αγαθών που θα εξαντλούν το συνολικό του εισόδημα και για τις οποίες ο ψυχικός λόγος ανταλλαγής μεταξύ οποιων-

1. Adam Smith, *The Theory of Moral Sentiments* (1759, επανέκδοση, New Rochelle, Arlington House, 1969), σ. 446.

δήποτε δύο αγαθών (ο MRS) είναι ίσος με το λόγο στον οποίο τα δύο αυτά αγαθά μπορούν να ανταλλαγούν στην αγορά.

Το ότι πρέπει κανείς να δαπανήσει το σύνολο του εισοδήματός του προκειμένου να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητά τους είναι προφανές. Αφού επιπλέον αγαθά παρέχουν επιπρόσθετη χρησιμότητα (δεν υπάρχει κορεσμός) και αφού δεν υπάρχει άλλη χρήση για το εισόδημα (δεν υφίσταται αποταμίευση στο υπόδειγμα αυτό), το να αφήσει κανείς ένα ποσό αξόδευτο συνεπάγεται αποτυχία μεγιστοποίησης της χρησιμότητας.

Η συνθήκη που ορίζει την ισότητα των λόγων ανταλλαγής απαιτεί περαιτέρω επεξήγηση. Επειδή ο λόγος στον οποίο ένα αγαθό μπορεί να ανταλλαγεί με κάποιο άλλο στην αγορά δίνεται από το λόγο των τιμών τους, αυτό το συμπέρασμα μπορεί να επαναδιατυπωθεί λέγοντας ότι το άτομο θα εξισώσει τον MRS (του x στο y) με το λόγο της τιμής του x προς την τιμή του y (p_x/p_y). Αυτή η εξίσωση του προσωπικού λόγου ανταλλαγής με το λόγο ανταλλαγής της αγοράς είναι ένα αποτέλεσμα κοινό σε όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης της ατομικής χρησιμότητας (και σε πολλούς άλλους τύπους προβλημάτων μεγιστοποίησης). Θα το συναντήσουμε πολλές φορές στο κείμενο.

Μια αριθμητική επεξήγηση

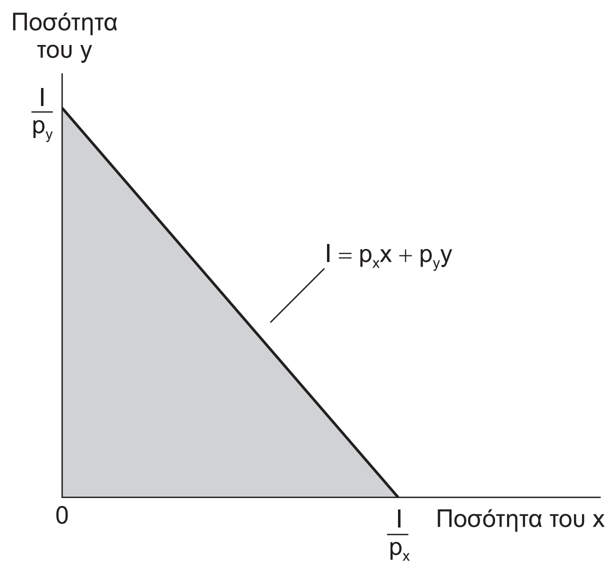
Για να καταλάβουμε διαισθητικά τη λογική αυτού του αποτελέσματος, ας υποθέσουμε ότι δεν αλήθευε το γεγονός ότι το άτομο εξισώνει τον MRS με το λόγο των τιμών των αγαθών. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι ο MRS του ατόμου είναι ίσος με 1, δηλαδή ότι είναι πρόθυμος ν' ανταλλάξει 1 μονάδα του x με 1 μονάδα του y και να παραμείνει το ίδιο ικανοποιημένος. Υποθέστε επίσης ότι η τιμή του x είναι $2 ανά μονάδα και του y είναι $1 ανά μονάδα. Είναι πολύ εύκολο σ' αυτή την περίπτωση να δείξουμε ότι το άτομο μπορεί να βελτιώσει την ευημερία του μειώνοντας κατά 1 μονάδα την κατανάλωση του x και μπορεί να την ανταλλάξει με 2 μονάδες του y στην αγορά. Μόνο 1 επιπλέον μονάδα του y χρειαζόταν για να διατηρήσει το άτομο τόσο ικανοποιημένο όσο και πριν την ανταλλαγή – η δεύτερη μονάδα του y είναι μια καθαρή αύξηση της ευημερίας του. Συνεπώς, η αρχική κατανομή των δαπανών του ατόμου δεν ήταν αρχικά άριστη. Μια παρόμοια λογική μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν ο MRS και ο λόγος των τιμών p_x/p_y διαφέρουν. Η συνθήκη για μεγιστοποίηση της χρησιμότητας θα πρέπει να είναι η ισότητα αυτών των δύο μεγεθών.

Η περίπτωση των δύο αγαθών: Μια διαγραμματική ανάλυση

Η συζήτηση αυτή μοιάζει εξαιρετικά λογική, αλλά δεν αποτελεί απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε το συμπέρασμα αυτό μ' ένα πιο αυστηρό τρόπο και, την ίδια στιγμή, να επεξηγήσουμε διάφορες άλλες σημαντικές ιδιότητες της μεγιστοποιητικής διαδικασίας. Πρώτα θα χρησιμοποιήσουμε τη διαγραμματική ανάλυση. Στη συνέχεια θα ακολουθήσουμε μια πιο μαθηματική προσέγγιση.

ΣΧΗΜΑ 4.1 **Ο εισοδηματικός περιορισμός ενός ατόμου για δύο αγαθά**

Οι συνδυασμοί των x και y, τους οποίους το άτομο είναι σε θέση ν' αγοράσει, φαίνονται στο σκιασμένο τρίγωνο. Αν, όπως συνήθως υποθέτουμε, το άτομο προτιμά περισσότερο από κάθε αγαθό και όχι λιγότερο, το εξωτερικό όριο αυτού του τριγώνου είναι ο περιορισμός, όπου όλα τα διαθέσιμα χρήματα δαπανώνται είτε στο x είτε στο y. Η κλίση αυτού του ευθύγραμμου ορίου δίνεται από $-p_x/p_y$.



Εισοδηματικός περιορισμός

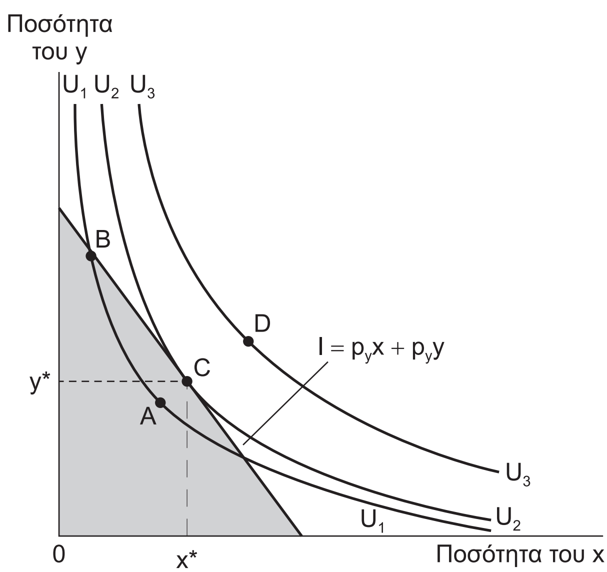
Υποθέστε ότι το άτομο έχει I δολάρια να κατανείμει μεταξύ του αγαθού x και του αγαθού y. Εάν p_x είναι η τιμή του αγαθού x και p_y είναι η τιμή του αγαθού y, τότε το άτομο περιορίζεται από

$$\mathbf{p_x x + p_y y \leq I.} \tag{4.1}$$

Δηλαδή, δεν μπορεί να δαπανίσει περισσότερο από I σ' αυτά τα δύο αγαθά. Ο εισοδηματικός αυτός περιορισμός παρουσιάζεται διαγραμματικά στο Σχήμα 4.1. Το άτομο έχει τη δυνατότητα να επιλέξει μόνο τους συνδυασμούς του x και του y που βρίσκονται στο σκιασμένο τρίγωνο. Αν δαπανήσει όλο το I στο αγαθό x, θα αγοράσει I/p_x μονάδες του αγαθού x. Αντίστοιχα, αν ξοδέψει όλο το εισόδημά του στο y, θα αγοράσει I/p_y μονάδες του αγαθού y. Η κλίση του περιορισμού παρατηρούμε ότι είναι $-p_x/p_y$. Η κλίση αυτή δείχνει πόσο y μπορεί ν' ανταλλάξει το άτομο με x στην αγορά. Αν $p_x = 2$ και $p_y = 1$, τότε θ' ανταλλάξει 2 μονάδες του y με 1 μονάδα του x.

ΣΧΗΜΑ 4.2 **Μια διαγραμματική παρουσίαση της μεγιστοποίησης της χρησιμότητας**

Το σημείο C αντιπροσωπεύει το μεγαλύτερο επίπεδο χρησιμότητας στο οποίο μπορεί να φτάσει το άτομο με δεδομένο τον εισοδηματικό του περιορισμό. Ο συνδυασμός x^*, y^* είναι επομένως ο ορθολογικός τρόπος για να κατανείμει το άτομο την αγοραστική του δύναμη. Μόνο γι' αυτόν το συνδυασμό αγαθών θα ισχύουν δύο συνθήκες: Όλα τα διαθέσιμα χρήματα θα δαπανηθούν, και ο ψυχικός λόγος ανταλλαγής του ατόμου (MRS) θα ισούται με το λόγο στον οποίο τα αγαθά μπορούν να ανταλλαγούν στην αγορά (p_x/p_y).



Συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο

Ο εισοδηματικός περιορισμός μπορεί να τοποθετηθεί πάνω στο χάρτη των καμπυλών αδιαφορίας του ατόμου για να δείξουμε τη διαδικασία μεγιστοποίησης της χρησιμότητας. Στο Σχήμα 4.2 παρουσιάζεται αυτή η διαδικασία. Το άτομο θα φερόταν μη ορθολογικά αν επέλεγε ένα σημείο όπως το A – έχει τη δυνατότητα να μετακινηθεί σ' ένα υψηλότερο επίπεδο χρησιμότητας δαπανώντας απλά ένα μέρος από το αδαπάνητο εισόδημά του. Η υπόθεση του μη κορεσμού υπονοεί ότι το άτομο θα πρέπει να δαπανήσει όλο το εισόδημά του για να αντλήσει τη μέγιστη χρησιμότητα απ' αυτό. Κατά τον ίδιο τρόπο, με ανακατανομή των δαπανών του, το άτομο μπορεί να είναι καλύτερα απ' ό,τι στο σημείο B. Το σημείο D δεν το συζητούμε επειδή το εισόδημα δεν φτάνει για ν' αγοράσει το D. Είναι φανερό ότι το σημείο της μέγιστης χρησιμότητας είναι στο C, όπου έχει επιλεγεί ο συνδυασμός x^*, y^*. Αυτό είναι το μόνο σημείο στην καμπύλη αδιαφορίας U_2 που μπορεί ν' αγοραστεί με I δολάρια. Δεν μπορεί ν' αγοραστεί κανένα επίπεδο μεγαλύτερης χρησιμότητας. Το σημείο C είναι το σημείο ακριβώς όπου ο εισοδηματικός περιορισμός εφάπτεται στην καμπύλη αδιαφορίας. Επομένως στο C,

$$\textbf{κλίση του εισοδηματικού περιορισμού} = \frac{-p_x}{p_y}\ \textbf{κλίση της καμπύλης αδιαφορίας}$$

$$= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{U\,=\,\text{σταθερή}} \tag{4.2}$$

ή

$$\frac{p_x}{p_y} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{U\,=\,\text{σταθερή}} = \text{MRS (από x για y)}. \tag{4.3}$$

Το διαισθητικό αποτέλεσμά μας αποδείχτηκε – για μέγιστη χρησιμότητα, όλο το διαθέσιμο εισόδημα θα πρέπει να δαπανηθεί και ο MRS θα πρέπει να ισούται με το λόγο των τιμών των αγαθών. Είναι φανερό από το σχήμα ότι αν αυτή η συνθήκη δεν ικανοποιείται, το άτομο θα μπορέσει να βρεθεί σε καλύτερη κατάσταση ανακατανέμοντας τις δαπάνες του.

Συνθήκες δεύτερης τάξης για μέγιστο

Ο κανόνας που θέλει τον εισοδηματικό περιορισμό και την καμπύλη αδιαφορίας να εφάπτονται είναι μόνον η αναγκαία συνθήκη για μέγιστο. Για να δείτε ότι αυτή δεν είναι και ικανή συνθήκη, παρατηρήστε το χάρτη καμπυλών αδιαφορίας που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.3. Εδώ ένα σημείο επαφής (C) είναι κατώτερο από ένα σημείο μη επαφής (B). Πράγματι, το μέγιστο βρίσκεται σε κάποιο άλλο σημείο επαφής (A). Η αποτυχία της συνθήκης επαφής να παράγει ένα αδιαμφισβήτητο μέγιστο μπορεί να αποδοθεί στο σχήμα των καμπυλών αδιαφορίας του Σχήματος 4.3. Αν οι καμπύλες αδιαφορίας έχουν σχήμα σαν αυτό του Σχήματος 4.2, δεν θα υπάρχει τέτοιο πρόβλημα. Αλλά έχουμε ήδη δείξει ότι οι «κανονικού» σχήματος καμπύλες αδιαφορίας προκύπτουν από την υπόθεση ενός φθίνοντος MRS. Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι ο MRS είναι φθίνων, η συνθήκη επαφής είναι αναγκαία και ικανή για την ύπαρξη μέγιστου.[2] Χωρίς αυτή την υπόθεση, θα πρέπει να είναι κανείς πολύ προσεκτικός όταν εφαρμόζει τον κανόνα της επαφής.

Λύσεις γωνίας

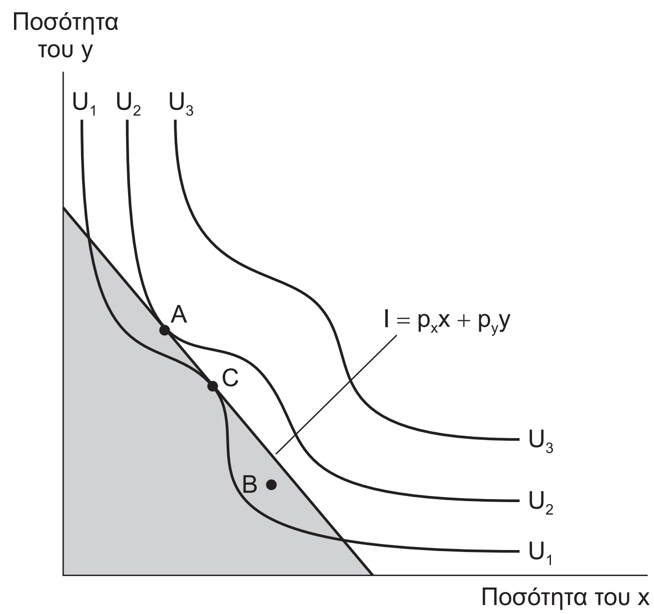
Το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας που παρουσιάστηκε στο Σχήμα 4.2 κατέληξε σ' ένα «εσωτερικό» μέγιστο, στο οποίο καταναλώνονταν θετικές ποσότητες και από τα δύο αγαθά. Σε μερικές περιπτώσεις, οι προτιμήσεις των ατόμων μπορεί να είναι τέτοιες ώστε αυτά να αποκτούν τη μέγιστη χρησιμότητα επιλέγοντας να μην καταναλώσουν καθόλου ποσότητα του ενός από τα αγαθά.

---

2. Με μαθηματικούς όρους, επειδή η υπόθεση του φθίνοντος MRS είναι ισοδύναμη με το να υποθέσουμε οιονεί κοιλότητα, οι αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο υπό έναν γραμμικό περιορισμό είναι και ικανές, όπως δείξαμε στο Κεφάλαιο 2.

ΣΧΗΜΑ 4.3 **Παράδειγμα ενός χάρτη καμπυλών αδιαφορίας όπου η συνθήκη επαφής δεν εξασφαλίζει μέγιστο**

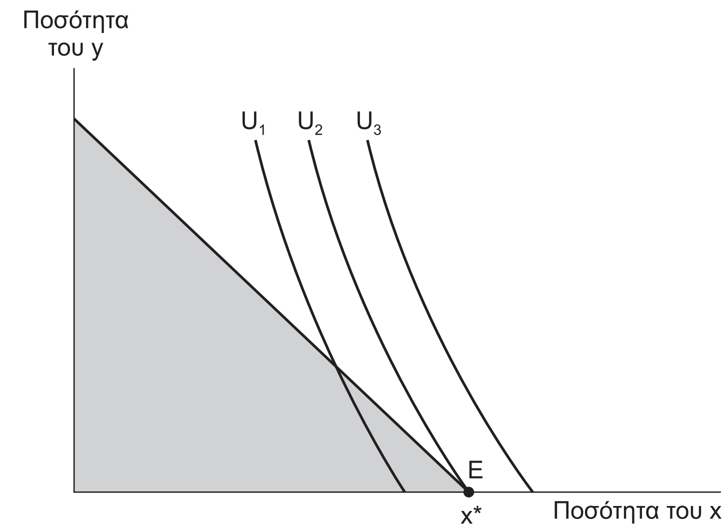
Αν οι καμπύλες αδιαφορίας δεν υπακούουν στην υπόθεση για φθίνοντα MRS, τότε μπορεί τα σημεία όπου ο εισοδηματικός περιορισμός και η καμπύλη αδιαφορίας εφάπτονται (σημεία για τα οποία $MRS = p_x/p_y$) να μην είναι όλα σημεία μέγιστης χρησιμότητας. Στο παράδειγμα αυτό, το σημείο επαφής C είναι κατώτερο από πολλά άλλα σημεία που μπορούν επίσης να αγοραστούν με τα ίδια χρήματα. Προκειμένου η αναγκαία συνθήκη για μέγιστο (δηλαδή, η συνθήκη επαφής του εισοδηματικού περιορισμού στην καμπύλη αδιαφορίας) να είναι και ικανή, συνήθως υποθέτουμε ότι ο MRS είναι φθίνων. Δηλαδή, η συνάρτηση χρησιμότητας είναι αυστηρά οιονεί κοίλη.



Αν σε κάποιον δεν αρέσουν τα χάμπουργκερ, δεν υπάρχει λόγος να δαπανήσει μέρος του εισοδήματός του για την αγορά τους. Η περίπτωση αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 4.4. Εδώ η χρησιμότητα μεγιστοποιείται στο E, όπου $x = x^*$ και $y = 0$ – οποιοδήποτε σημείο πάνω στον εισοδηματικό περιορισμό όπου καταναλώνεται θετική ποσότητα του y αποφέρει μικρότερη χρησιμότητα από το σημείο E. Παρατηρούμε ότι στο E ο εισοδηματικός περιορισμός δεν είναι ακριβώς εφαπτόμενος στην καμπύλη αδιαφορίας U_2. Αντιθέτως, στο άριστο σημείο ο εισοδηματικός περιορισμός είναι πιο επίπεδος από την U_2, που σημαίνει ότι ο λόγος ανταλλαγής των x και y στην αγορά είναι μικρότερος από τον ψυχικό λόγο ανταλλαγής (MRS) του ατόμου. Στις επικρατούσες στην αγορά τιμές, το άτομο είναι πρόθυμο να δώσει y για να πάρει παραπάνω x. Επειδή όμως είναι αδύνατο στο πρόβλημα αυτό να καταναλωθούν αρνητικές ποσότητες του y, το φυσικό όριο αυτής της

ΣΧΗΜΑ 4.4 **Λύσεις γωνίας για μεγιστοποίηση της χρησιμότητας**

Αν οι προτιμήσεις αναπαριστώνται απ' αυτή την ομάδα καμπυλών αδιαφορίας, η μεγιστοποίηση της χρησιμότητας προκύπτει στο E, όπου καταναλώνεται 0 ποσότητα του y. Οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο θα πρέπει να τροποποιηθούν ώστε να επιτρέπουν και αυτή την πιθανότητα.



διαδικασίας είναι ο άξονας των x, κατά μήκος του οποίου οι αγοραζόμενες ποσότητες του y είναι μηδενικές. Επομένως, όπως είναι φανερό απ' αυτή τη συζήτηση, πρέπει να τροποποιήσουμε λίγο τις συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστη χρησιμότητα ώστε να επιτρέψουμε λύσεις γωνίας σαν αυτές που απεικονίζονται στο Σχήμα 4.4. Συνεχίζοντας τη συζήτησή μας για τη γενική περίπτωση με n αγαθά, θα χρησιμοποιήσουμε τα μαθηματικά του Κεφαλαίου 2 για να δείξουμε πώς μπορούμε να το κάνουμε.

Η περίπτωση n αγαθών

Τα συμπεράσματα που εξάγαμε διαγραμματικά στην περίπτωση των δύο αγαθών, εφαρμόζονται απευθείας στην περίπτωση των n αγαθών. Μπορεί να αποδειχθεί ξανά ότι για ένα εσωτερικό σημείο μέγιστης χρησιμότητας, ο MRS μεταξύ δύο οποιωνδήποτε αγαθών θα πρέπει να ισούται με το λόγο των τιμών των δύο αυτών αγαθών. Ωστόσο, για να μελετήσουμε αυτή την πιο γενική περίπτωση, είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε μαθηματικά.

Συνθήκες πρώτης τάξης

Όταν υπάρχουν n αγαθά, ο αντικειμενικός σκοπός του ατόμου είναι να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητα που αντλεί απ' αυτά τα n αγαθά:

$$\textbf{χρησιμότητα} = \mathbf{U}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}), \tag{4.4}$$

υπό τον εισοδηματικό περιορισμό:[3]

$$\mathbf{I} = \mathbf{p_1 x_1} + \mathbf{p_2 x_2} + \ldots + \mathbf{p_n x_n} \tag{4.5}$$

ή

$$\mathbf{I} - \mathbf{p_1 x_1} - \mathbf{p_2 x_2} - \ldots - \mathbf{p_n x_n} = \mathbf{0}. \tag{4.6}$$

Ακολουθώντας τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 2 για μεγιστοποίηση μιας συνάρτησης υπό περιορισμό, σχηματίζουμε την παράσταση Lagrange:

$$\mathscr{L} = \mathbf{U}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{I} - \mathbf{p_1 x_1} - \mathbf{p_2 x_2} - \ldots - \mathbf{p_n x_n}). \tag{4.7}$$

Θέτοντας τις μερικές παραγώγους της $\mathscr{L}$ (ως προς $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και λ) ίσες με 0 καταλήγουμε σε $n + 1$ εξισώσεις, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις αναγκαίες συνθήκες για ένα εσωτερικό μέγιστο:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x_1}} &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x_1}} - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{p_1} = \mathbf{0}\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x_2}} &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x_2}} - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{p_2} = \mathbf{0}\\
&\vdots\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x_n}} &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x_n}} - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{p_n} = \mathbf{0}\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{I} - \mathbf{p_1 x_1} - \mathbf{p_2 x_2} - \ldots - \mathbf{p_n x_n} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Αυτές οι $n + 1$ εξισώσεις μπορούν συνήθως να επιλυθούν για τα μέγιστα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και για λ (δείτε τα Παραδείγματα 4.1 και 4.2 προκειμένου να πισθείτε ότι μια τέτοια λύση είναι δυνατή).

Οι εξισώσεις 4.8 είναι αναγκαίες αλλά όχι ικανές για μέγιστο. Οι συνθήκες δεύτερης τάξης που εξασφαλίζουν ένα μέγιστο είναι σχετικά πολύπλοκες και

3. Και πάλι, ο εισοδηματικός περιορισμός έχει γραφτεί εδώ ως ισότητα επειδή, δεδομένης της υπόθεσης του μη κορεσμού, είναι φανερό ότι το άτομο θα δαπανήσει όλο το διαθέσιμο εισόδημά του.

θα πρέπει να εκφραστούν με πίνακες. Ωστόσο, η υπόθεση της αυστηρής οιονεί κοιλότητας (ενός φθίνοντος MRS στην περίπτωση των δύο αγαθών) είναι ικανή να εξασφαλίσει ότι οποιοδήποτε σημείο που υπακούει στις εξισώσεις 4.8 είναι ένα πραγματικό μέγιστο.

Συνέπειες των συνθηκών πρώτης τάξης

Τις συνθήκες πρώτης τάξης που αναπαριστούν οι εξισώσεις 4.8 μπορούμε να γράψουμε με πολλούς ενδιαφέροντες τρόπους. Για παράδειγμα, για οποιαδήποτε δύο αγαθά, x_i και x_j, έχουμε

$$\frac{\partial U/\partial x_i}{\partial U/\partial x_j}=\frac{p_i}{p_j}. \tag{4.9}$$

Στο Κεφάλαιο 3 δείξαμε ότι ο λόγος των οριακών χρησιμοτήτων δύο αγαθών είναι στην πραγματικότητα ίσος με τον οριακό λόγο της μεταξύ τους υποκατάστασης. Επομένως, η συνθήκη για μια άριστη κατανομή του εισοδήματος γίνεται

$$\text{MRS } (x_i \text{ για } x_j)=\frac{p_i}{p_j}. \tag{4.10}$$

Αυτό είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που βρήκαμε νωρίτερα σ’ αυτό το κεφάλαιο. Για να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητα, το άτομο θα πρέπει να εξισώσει τον ψυχικό λόγο ανταλλαγής με το λόγο ανταλλαγής στην αγορά.

Ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange

Ένα διαφορετικό αποτέλεσμα μπορεί να εξαχθεί αν επιλύσουμε τις εξισώσεις 4.8 ως προς λ:

$$\lambda=\frac{\partial U/\partial x_1}{p_1}=\frac{\partial U/\partial x_2}{p_2}=\ldots=\frac{\partial U/\partial x_n}{p_n} \tag{4.11}$$

ή

$$\lambda=\frac{MU_{x_1}}{p_1}=\frac{MU_{x_2}}{p_2}=\ldots=\frac{MU_{x_n}}{p_n}.$$

Η εξίσωση αυτή λέει ότι στο σημείο όπου μεγιστοποιείται η χρησιμότητα, κάθε αγαθό που αγοράζεται θα πρέπει να αποφέρει την ίδια οριακή χρησιμότητα ανά δολάριο που δαπανάται σ’ αυτό το αγαθό. Κάθε αγαθό επομένως θα πρέπει να έχει έναν ίδιο λόγο (οριακού) οφέλους προς (οριακό) κόστος. Αν δεν συνέβαινε αυτό, κάποιο αγαθό θα υποσχόταν περισσότερη «οριακή απόλαυση ανά δολάριο» από κάποια άλλα αγαθά, και τα χρήματα δεν θα ήταν άριστα κατανεμημένα.

Παρόλο που προειδοποιούμε ξανά τον αναγνώστη να μη μιλάει με μεγάλη εμπιστοσύνη σχετικά με την οριακή χρησιμότητα, αυτό που η εξίσωση 4.11 λέει είναι ότι κάθε επιπλέον δολάριο θα πρέπει να αποφέρει την ίδια «επιπλέον χρησιμότητα» ανεξάρτητα από το αγαθό στο οποίο δαπανάται. Την κοινή τιμή αυτής της επιπλέον χρησιμότητας μάς δίνει ο πολλαπλασιαστής Lagrange για τον εισοδηματικό περιορισμό του καταναλωτή (δηλαδή, το λ). Συνεπώς, μπορούμε να δούμε το λ ως την οριακή χρησιμότητα ενός επιπλέον δολαρίου καταναλωτικής δαπάνης (την οριακή χρησιμότητα του «εισοδήματος»).

Ένας τελικός τρόπος να ξαναγράψουμε τις αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο είναι

$$\mathbf{p_i} = \frac{\mathbf{MU_{x_i}}}{\boldsymbol{\lambda}} \tag{4.12}$$

για κάθε αγαθό i που αγοράζεται. Για να ερμηνεύσετε αυτή την εξίσωση, θεωρήστε μια κατάσταση όπου η οριακή χρησιμότητα του εισοδήματος (λ) για ένα άτομο είναι σταθερή για κάποιο εύρος. Τότε, η τιμή που θα πρέπει να πληρώσει για το αγαθό i (p_i) είναι ευθέως ανάλογη με την επιπλέον χρησιμότητα που αντλεί απ' αυτό το αγαθό. Στο όριο, επομένως, η τιμή ενός αγαθού αντικατοπτρίζει την προθυμία του ατόμου να πληρώσει για μια επιπλέον μονάδα. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στα εφαρμοσμένα οικονομικά της ευημερίας, επειδή η προθυμία πληρωμής μπορεί να συναχθεί από τις αντιδράσεις της αγοράς στις τιμές. Στο Κεφάλαιο 5 θα δούμε πώς αυτή η γνώση μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αξιολόγηση των επιδράσεων που ασκούν οι μεταβολές των τιμών στην ευημερία και, σε επόμενα κεφάλαια, θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδέα για να συζητήσουμε μια σειρά ζητημάτων σχετικά με την αποτελεσματικότητα της κατανομής των πόρων.

Λύσεις γωνίας

Οι συνθήκες πρώτης τάξης των εξισώσεων 4.8 ισχύουν ακριβώς μόνο για εσωτερικά μέγιστα όταν αγοράζεται κάποια θετική ποσότητα από κάθε αγαθό. Όταν έχουμε λύσεις γωνίας (σαν και αυτές που απεικονίζονται στο Σχήμα 4.4), οι συνθήκες πρέπει να τροποποιηθούν ελαφρά.[4] Σ' αυτή την περίπτωση, οι εξισώσεις 4.8 γίνονται

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x_i}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x_i}} - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{p_i} \leq \mathbf{0} \quad (\mathbf{i} = \mathbf{1} \ldots \mathbf{n}), \tag{4.13}$$

και αν

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x_i}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x_i}} - \boldsymbol{\lambda} \mathbf{p_i} < \mathbf{0}, \tag{4.14}$$

τότε

$$\mathbf{x_i} = \mathbf{0}. \tag{4.15}$$

Για να ερμηνεύσουμε αυτές τις συνθήκες, μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση 4.14 ως

4. Αυτές οι συνθήκες ονομάζονται συνθήκες «Kuhn-Tucker» στον μη γραμμικό προγραμματισμό.

$$\mathbf{p_i} > \frac{\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x_i}}}{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\mathbf{MU_{x_i}}}{\boldsymbol{\lambda}}. \tag{4.16}$$

Συνεπώς, οι συνθήκες αριστοποίησης είναι ίδιες όπως και πριν, με εξαίρεση ότι το αγαθό που η τιμή του (p_i) ξεπερνά την οριακή του αξία για τον καταναλωτή (MU_{x_i}/λ) δεν θα αγοράζεται ($x_i = 0$). Επομένως, τα μαθηματικά αποτελέσματα συμφωνούν με τη λογική ιδέα ότι τα άτομα δεν πρόκειται να αγοράσουν αγαθά τα οποία πιστεύουν ότι δεν αξίζουν τα λεφτά τους. Παρόλο που τέτοιες λύσεις γωνίας δεν θα αποτελέσουν κύριο σημείο της ανάλυσής μας σ' αυτό το βιβλίο, ο αναγνώστης θα πρέπει να μην ξεχνά την πιθανότητα να προκύπτουν τέτοιου είδους λύσεις και, βέβαια, την οικονομική ερμηνεία που μπορούν να δώσουν στις αριστοποιητικές συνθήκες τέτοιων περιπτώσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1

Συναρτήσεις ζήτησης Cobb-Douglas

Όπως δείξαμε και νωρίτερα στο Κεφάλαιο 3, η συνάρτηση χρησιμότητας Cobb-Douglas δίνεται από

$$\mathbf{U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}}, \tag{4.17}$$

όπου, για ευκολία[5], υποθέσαμε ότι $\alpha + \beta = 1$. Μπορούμε τώρα να λύσουμε για τις τιμές των x και y που μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα για οποιεσδήποτε τιμές (p_x, p_y) και εισόδημα (I).

Γράφουμε την παράσταση Lagrange

$$\mathscr{L} = \mathbf{x^{\alpha} y^{\beta} + \lambda(I - p_x y - p_y y)} \tag{4.18}$$

κι έχουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} - \lambda p_x = 0} \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{y}} &= \mathbf{\beta x^{\alpha} y^{\beta-1} - \lambda p_y = 0} \qquad (4.19) \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{I - p_x x - p_y y = 0}.
\end{aligned}$$

5. Σημειώστε ότι οι εκθέτες στη συνάρτηση χρησιμότητας Cobb-Douglas μπορούν να τυποποιηθούν ώστε να αθροίζουν στη μονάδα, επειδή το $U^{1/(\alpha+\beta)}$ είναι ένας μονοτονικός μετασχηματισμός.

Παίρνοντας το λόγο των δύο πρώτων όρων έχουμε

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y} \tag{4.20}$$

ή

$$p_y y = \frac{\beta}{\alpha} p_x x = \frac{1-\alpha}{\alpha} p_x x, \tag{4.21}$$

όπου η τελική εξίσωση προκύπτει επειδή $\alpha + \beta = 1$. Η υποκατάσταση των συνθηκών πρώτης τάξης της εξίσωσης 4.21 στον εισοδηματικό περιορισμό δίνει

$$I = p_x x + p_y y = p_x x + \frac{1-\alpha}{\alpha} p_x x = p_x x\left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} p_x x \cdot \tag{4.22}$$

λύνοντας ως προς x, έχουμε

$$x^* = \frac{\alpha I}{p_x}, \tag{4.23}$$

και μια παρόμοια διαδικασία θα μας δώσει

$$y^* = \frac{\beta I}{p_y}. \tag{4.24}$$

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι ένα άτομο του οποίου η συνάρτηση χρησιμότητας δίνεται από την εξίσωση 4.17 θα επιλέγει πάντα να ξοδέψει ένα ποσοστό α του εισοδήματός του για την αγορά του αγαθού x (δηλαδή, $p_x x/I = \alpha$) και ένα ποσοστό β για την αγορά του αγαθού y ($p_y y/I = \beta$). Παρόλο που αυτό το χαρακτηριστικό της συνάρτησης Cobb-Douglas συχνά καθιστά πολύ εύκολη την επίλυση απλών προβλημάτων, από την άλλη μάς δείχνει ότι η συνάρτηση έχει περιορισμένη δυνατότητα να εξηγήσει την παρατηρούμενη καταναλωτική συμπεριφορά. Επειδή το μερίδιο του εισοδήματος που αφιερώνεται σε συγκεκριμένα αγαθά συχνά μεταβάλλεται σημαντικά ακολουθώντας τις διαρκώς μεταβαλλόμενες οικονομικές συνθήκες, μια πιο γενική συναρτησιακή μορφή θα μπορούσε να προσφέρει πληροφορίες που δεν προσφέρει η συνάρτηση Cobb-Douglas. Παρουσιάζουμε μερικές τέτοιες δυνατότητες στο Παράδειγμα 4.2, ενώ με τα εισοδηματικά μερίδια θα ασχοληθούμε λεπτομερώς στις Προεκτάσεις αυτού του κεφαλαίου.

Αριθμητικό παράδειγμα. Πρώτα, ας κοιτάξουμε ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα για την περίπτωση της συνάρτησης Cobb-Douglas. Υποθέστε ότι το x πωλείται προς \$1 και το y προς \$4 και ότι το συνολικό εισόδημα είναι \$8. Επίσης υποθέστε ότι $p_x = 1$, $p_y = 4$, $I = 8$. Τέλος υποθέστε επίσης ότι $\alpha = \beta = 0{,}5$ ώστε

(συνεχίζεται)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1 (συνέχεια)

το άτομο αυτό να μοιράζει το εισόδημά του ισομερώς μεταξύ των δύο αγαθών. Τώρα οι συναρτήσεις ζήτησης 4.23 και 4.24 υπονοούν

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{\alpha I/p_x = 0{,}5I/p_x = 0{,}5(8)/1 = 4} \\ \mathbf{y}^* &= \mathbf{\beta I/p_y = 0{,}5I/p_y = 0{,}5(8)/4 = 1} \end{aligned} \tag{4.25}$$

και, σ' αυτές τις άριστες επιλογές,

$$\mathbf{Χρησιμότητα = x^{0{,}5}y^{0{,}5} = (4)^{0{,}5}(1)^{0{,}5} = 2.} \tag{4.26}$$

Σημειώστε επίσης ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange που σχετίζεται μ' αυτή την κατανομή του εισοδήματος, χρησιμοποιώντας την εξίσωση 4.19:

$$\mathbf{\lambda = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}/p_x = 0{,}5(4)^{-0{,}5}(1)^{0{,}5}/1 = 0{,}25.} \tag{4.27}$$

Αυτή η τιμή υπονοεί ότι μικρές μεταβολές στο εισόδημα θ' αυξήσουν τη χρησιμότητα περίπου κατά το ένα τέταρτο αυτού του μεγέθους. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι το άτομο έχει 1% επιπλέον εισόδημα ($8,08). Σ' αυτή την περίπτωση, θα επιλέξει $x = 4{,}04$, και $y = 1{,}01$ και το νέο επίπεδο χρησιμότητας θα είναι $4{,}04^{0{,}5} \cdot 1{,}01^{0{,}5} = 2{,}02$. Συνεπώς, μια αύξηση του εισοδήματος κατά $0,08 αυξάνει τη χρησιμότητα κατά $0,2, όπως αναμένεται από το γεγονός ότι $\lambda = 0{,}25$.

Ερώτημα: Μια μεταβολή του p_y θα επηρέαζε την ποσότητα του x που ζητείται στην εξίσωση 4.23; Εξηγήστε την απάντησή σας μαθηματικά. Αναπτύξτε επίσης μια διαισθητική εξήγηση που να βασίζεται στο ότι το μερίδιο του εισοδήματος που αφιερώνεται στο αγαθό y δίνεται από την παράμετρο της συνάρτησης χρησιμότητας, β.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2

Ζήτηση με συνάρτηση CES

Για να παρουσιάσουμε περιπτώσεις όπου τα μερίδια του εισοδήματος επηρεάζονται από τις οικονομικές καταστάσεις, ας δούμε δύο συγκεκριμένα παραδείγματα της συνάρτησης CES.

Περίπτωση 1. $\delta = 0{,}5$. Σ' αυτή την περίπτωση η χρησιμότητα δίδεται από

$$U(x, y) = x^{0,5} + y^{0,5}. \tag{4.28}$$

Γράφοντας την παράσταση Lagrange

$$\mathscr{L} = x^{0,5} + y^{0,5} + \lambda(I - p_x x - p_y y) \tag{4.29}$$

έχουμε τις ακόλουθες συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο:

$$\begin{aligned} \partial\mathscr{L}/\partial x &= 0{,}5x^{-0,5} - \lambda p_x = 0 \\ \partial\mathscr{L}/\partial y &= 0{,}5y^{-0,5} - \lambda p_y = 0 \\ \partial\mathscr{L}/\partial \lambda &= I - p_x x - p_y y = 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Η διαίρεση των δύο πρώτων μάς δείχνει ότι

$$(y/x)^{0,5} = p_x/p_y. \tag{4.31}$$

Υποκαθιστώντας αυτή στον εισοδηματικό περιορισμό και κάνοντας κάποιους μαθηματικούς χειρισμούς, μπορούμε να εξάγουμε τις συναρτήσεις ζήτησης που σχετίζονται μ' αυτή τη συνάρτηση χρησιμότητας:

$$x^* = I/p_x[1 + (p_x/p_y)] \tag{4.32}$$

$$y^* = I/p_y[1 + (p_y/p_x)]. \tag{4.33}$$

Ευαισθησία των τιμών. Σ' αυτές τις συναρτήσεις ζήτησης σημειώστε ότι το μερίδιο του εισοδήματος το οποίο δαπανάται, ας πούμε, στο αγαθό x –δηλαδή, $p_x x/I = 1/[1 + (p_x/p_y)]$– δεν είναι μια σταθερά, αλλά εξαρτάται από το λόγο των τιμών p_x/p_y. Όσο υψηλότερη είναι η σχετική τιμή του x, τόσο μικρότερο θα είναι το μερίδιο του εισοδήματος που θα δαπανάται σ' αυτό το αγαθό. Με άλλα λόγια, η ζήτηση για x είναι τόσο ευαίσθητη στην ίδια του την τιμή, ώστε η αύξηση της τιμής μειώνει τη συνολική δαπάνη για το x. Το ότι η ζήτηση για x είναι πολύ ευαίσθητη στις μεταβολές της τιμής φαίνεται επίσης αν συγκρίνουμε τον υπονοούμενο εκθέτη του p_x στη συνάρτηση ζήτησης που δίνεται από την εξίσωση 4.32 (−2) μ' αυτόν της εξίσωσης 4.23 (−1). Στο Κεφάλαιο 5 θα συζητήσουμε εκτενέστερα αυτή την παρατήρηση όταν θα εξετάσουμε λεπτομερώς την έννοια της ελαστικότητας.

Περίπτωση 2. $\delta = -1$. Εναλλακτικά, ας δούμε μια συνάρτηση ζήτησης με μικρότερη υποκαταστασιμότητα[6] από αυτή της Cobb-Douglas. Αν $\delta = -1$, η συνάρτηση

(συνεχίζεται)

6. Ένας τρόπος να μετρήσουμε την υποκαταστασιμότητα είναι χρησιμοποιώντας την ελαστικότητα υποκατάστασης, η οποία για τη συνάρτηση CES δίνεται από $\sigma = 1/(1 - \delta)$. Εδώ, $\delta = 0{,}5$ υπονοεί ότι $\sigma = 2$, $\delta = 0$ (η Cobb-Douglas) υπονοεί ότι $\sigma = 1$, και $\delta = -1$ υπονοεί ότι $\sigma = 0{,}5$. Δείτε επίσης τη συζήτηση για τη συνάρτηση CES σε συνδυασμό με τη θεωρία παραγωγής στο Κεφάλαιο 7.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2 (συνέχεια)

χρησιμότητας δίνεται από

$$\mathbf{U(x, y) = -x^{-1} - y^{-1},} \tag{4.34}$$

και είναι εύκολο να δείξουμε ότι οι συνθήκες πρώτης τάξης για μέγιστο απαιτούν

$$\mathbf{y/x = (p_x/p_y)^{0,5}.} \tag{4.35}$$

Ξανά, αντικατάσταση αυτής της συνθήκης στον εισοδηματικό περιορισμό μαζί με κάποιους υπολογισμούς μάς δίνει τις συναρτήσεις ζήτησης

$$\begin{aligned} \mathbf{x^*} &= \mathbf{I/p_x[1 + (p_y/p_x)^{0,5}]} \\ \mathbf{y^*} &= \mathbf{I/p_y[1 + (p_x/p_y)^{0,5}].} \end{aligned} \tag{4.36}$$

Το ότι αυτές οι συναρτήσεις ζήτησης είναι λιγότερο ευαίσθητες στις μεταβολές των τιμών φαίνεται με δύο τρόπους. Πρώτον, τώρα το μερίδιο του εισοδήματος που δαπανάται στο αγαθό x $-p_x x/I = 1/[1 + (p_y/p_x)^{0,5}]-$ ανταποκρίνεται θετικά σε αυξήσεις του p_x. Καθώς η τιμή του x αυξάνει, το άτομο αυτό περικόπτει πολύ λίγο από το αγαθό x, έτσι ώστε η συνολική δαπάνη γι' αυτό το αγαθό να αυξάνεται. Το ότι οι συναρτήσεις ζήτησης στις εξισώσεις 4.36 είναι λιγότερο ευαίσθητες στις τιμές από την Cobb-Douglas καθίσταται φανερό και από τους σχετικά μικρούς εκθέτες της τιμής του κάθε αγαθού ($-0,5$).

Περίπτωση 3. $\boldsymbol{\delta = -\infty}$. Αυτή είναι η σημαντική περίπτωση όπου τα x και y πρέπει να καταναλωθούν σε σταθερές αναλογίες. Υποθέστε, για παράδειγμα, ότι κάθε μονάδα y πρέπει να καταναλώνεται μαζί με 4 ακριβώς μονάδες x. Η συνάρτηση χρησιμότητας σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$\mathbf{U(x, y) = Min(x, 4y).} \tag{4.37}$$

Σ' αυτή την περίπτωση, ένα άτομο που μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του θα επιλέξει μόνο συνδυασμούς των δύο αγαθών για τους οποίους $x = 4y$ – δηλαδή, η μεγιστοποίηση της χρησιμότητας υπονοεί ότι το άτομο αυτό θα επιλέξει να βρίσκεται στην κορυφή των καμπυλών αδιαφορίας του, που έχουν σχήμα L. Υποκαθιστώντας τη συνθήκη αυτή στον εισοδηματικό περιορισμό λαμβάνουμε

$$\mathbf{I = p_x x + p_y y = p_x x + p_y \frac{x}{4} = (p_x + 0,25p_y)x.} \tag{4.38}$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{x^* = \frac{I}{p_x + 0,25p_y}} \tag{4.39}$$

και με παρόμοιες υποκαταστάσεις λαμβάνουμε

$$\mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{4p_x + p_y}}. \tag{4.40}$$

Σ' αυτή την περίπτωση, το μερίδιο του εισοδήματος που αφιερώνει το άτομο, ας πούμε, στο αγαθό x αυξάνεται ταχύτατα καθώς αυξάνεται η τιμή του x, επειδή τα x και y πρέπει να καταναλωθούν σε σταθερές αναλογίες. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιήσουμε τις τιμές που υποθέσαμε στο Παράδειγμα 4.1 ($p_x = 1$, $p_y = 4$, $I = 8$), τότε οι εξισώσεις 4.39 και 4.40 προβλέπουν ότι $x^* = 4$ και $y^* = 1$, και, όπως και πριν, το εισόδημα μοιράζεται ισομερώς μεταξύ των δύο αγαθών. Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε $p_x = 2$, $p_y = 4$, $I = 8$, τότε λαμβάνουμε $x^* = 8/3$, $y^* = 2/3$ και το άτομο δαπανά τα $2/3\left(= \frac{p_x x}{I} = \frac{2 \cdot 8/3}{8}\right)$ του εισοδήματός τους στο αγαθό x. Δοκιμάζοντας μερικούς ακόμα αριθμούς, μπορούμε να δείξουμε ότι το μερίδιο του εισοδήματος που αφιερώνεται στο αγαθό x τείνει στη μονάδα, καθώς η τιμή του x γίνεται ολοένα μεγαλύτερη.[7]

Ερώτημα: Οι μεταβολές στο εισόδημα επηρεάζουν τα μερίδια δαπανών σε κάποια από τις συναρτήσεις CES που συζητήθηκαν εδώ; Πώς συνδέεται η συμπεριφορά των μεριδίων δαπάνης με την ομοθετική φύση αυτής της συνάρτησης;

Έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας

Τα Παραδείγματα 4.1 και 4.2 παρουσιάζουν την αρχή ότι συχνά μπορούμε να επηρεάσουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης ενός προβλήματος μεγιστοποίησης της χρησιμότητας υπό περιορισμό, για να βρούμε τις άριστες τιμές των $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Αυτές οι άριστες τιμές θα εξαρτώνται συνήθως από τις τιμές όλων των αγαθών και από το εισόδημα του ατόμου. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1^*} &= \mathbf{x_1}(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}, \mathbf{I}) \\
\mathbf{x_2^*} &= \mathbf{x_2}(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}, \mathbf{I}) \\
&\vdots \\
\mathbf{x_n^*} &= \mathbf{x_n}(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}, \mathbf{I}).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

7. Αυτές οι σχέσεις για τη συνάρτηση CES αναλύονται λεπτομερέστερα στο Πρόβλημα 4.9 και στην Προέκταση Ε4.3.

Στο επόμενο κεφάλαιο θ' αναλύσουμε λεπτομερέστερα αυτή την ομάδα *συναρτήσεων ζήτησης*, που δείχνουν την εξάρτηση της ζητούμενης ποσότητας του κάθε x_i από τα $p_1, p_2, \ldots, p_n$ και από το I. Εδώ χρησιμοποιούμε τις άριστες τιμές των x από τις εξισώσεις 4.42 και τις αντικαθιστούμε στην αρχική συνάρτηση χρησιμότητας για να πάρουμε

$$\textbf{μέγιστη χρησιμότητα} = (\mathbf{x_1^*}, \mathbf{x_2^*}, \ldots, \mathbf{x_n^*}) \tag{4.42}$$

$$= \mathbf{V}(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}, \mathbf{I}) \tag{4.43}$$

Μ' άλλα λόγια, εξαιτίας της επιθυμίας του ατόμου να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητά του, με δεδομένο τον εισοδηματικό του περιορισμό, το άριστο επίπεδο χρησιμότητας που μπορεί να επιτευχθεί θα εξαρτάται *έμμεσα* από τις τιμές των αγαθών που αγοράζονται και από το εισόδημα του ατόμου. Την εξάρτηση αυτή αντανακλά η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας V. Αν το εισόδημα ή οι τιμές μεταβληθούν, το επίπεδο χρησιμότητας που μπορεί να επιτευχθεί θα μεταβληθεί επίσης. Μερικές φορές, τόσο στη θεωρία του καταναλωτή όσο και σε πολλές άλλες περιπτώσεις, είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε αυτή την έμμεση προσέγγιση για να μελετήσουμε πώς οι μεταβολές των οικονομικών συνθηκών επηρεάζουν διάφορα μεγέθη, όπως η χρησιμότητα ή (παρακάτω σ' αυτό το βιβλίο) το κόστος των επιχειρήσεων.

Η αρχή του εφάπαξ ποσού (The lump sum principle)

Πολλές οικονομικές έννοιες προέρχονται από την αναγνώριση ότι η χρησιμότητα τελικά εξαρτάται από το εισόδημα των ατόμων και από τις τιμές που αυτά αντιμετωπίζουν. Μια από τις σημαντικότερες έννοιες είναι η αρχή του εφάπαξ ποσού, που δείχνει ότι η φορολόγηση της γενικής αγοραστικής δύναμης των ατόμων είναι πλεονεκτικότερη της φορολόγησης συγκεκριμένων αγαθών. Σχετική είναι και η ιδέα ότι η επιδότηση του εισοδήματος ατόμων τα οποία ανήκουν σε χαμηλά εισοδηματικά κλιμάκια θα αυξήσει περισσότερο τη χρησιμότητά τους από την επιδότηση συγκεκριμένων αγαθών με το ίδιο ποσό. Διαισθητικά, το αποτέλεσμα αυτό βγαίνει άμεσα από την υπόθεση της μεγιστοποίησης της χρησιμότητας – ένας φόρος εισοδήματος ή μία επιδότηση του εισοδήματος αφήνει το άτομο ν' αποφασίσει ελεύθερα με ποιον τρόπο θα κατανείμει το τελικό του εισόδημα. Από την άλλη μεριά, η φορολόγηση ή η επιδότηση συγκεκριμένων αγαθών μειώνει την αγοραστική δύναμη του ατόμου και στρεβλώνει τις επιλογές του, εξαιτίας των τεχνητών τιμών που δημιουργούνται σ' ένα τέτοιο σχήμα. Συνεπώς, οι φόροι εισοδήματος και οι επιδοτήσεις εισοδήματος θα πρέπει να προτιμώνται αν η αποτελεσματικότητα αποτελεί ένα σημαντικό κριτήριο της κοινωνικής πολιτικής.

Η εφαρμογή της αρχής του εφάπαξ ποσού στη φορολογία απεικονίζεται στο Σχήμα 4.5. Αρχικά, το άτομο έχει εισόδημα I και επιλέγει να καταναλώσει το συνδυασμό x^*, y^*. Ένας φόρος στο αγαθό x θ' αυξήσει την τιμή του, και η επιλο-