I.

Προοίμιο

Ο Piero Sraffa δεν έγινε γνωστός με το βιβλίο του "Production of Commodities by Means of Commodities". Ήδη το 1926 δημοσίευσε το άρθρο "The Law of Return Under Competitive Conditions", μια κριτική της νεοκλασικής θεωρίας σχηματισμού των τιμών υπό συνθήκες ανταγωνισμού, το οποίο είχε σημαντική απήχηση και επιρροή. Αργότερα έγινε ευρύτερα γνωστός ως επιμελητής των έργων του David Ricardo. Τη φήμη του χρωστά όμως στο βιβλίο του, που εκδόθηκε στα αγγλικά και στα ιταλικά το 1960. Ο Sraffa είναι σήμερα ο Sraffa του "Production of Commodities by Means of Commodities".

Δεν υπάρχει εγχειρίδιο οικονομικής θεωρίας που να μη διαβάστηκε περισσότερο από το βιβλίο του Sraffa. Όμως, μ' εξαίρεση της "General Theory" του Keynes, κανένα από τα βιβλία οικονομικής θεωρίας αυτού του αιώνα δεν είχε τόσο μεγάλη απήχηση και δεν συζητήθηκε τόσο διεξοδικά.

Πάρα πολλά έχουν γραφεί γι' αυτό από το 1960. Έτσι είναι σχεδόν αδύνατο να το μελετήσει κανείς ανεπηρέαστος από τις ήδη υπάρχουσες ερμηνείες. Ακόμα και οι αναγνώστες εκείνοι, που θα είχαν την πρόθεση να διαβάσουν τη σχετική βιβλιογραφία, αφού πρώτα μελετήσουν το βιβλίο, δεν θα μπορούσαν να παραμείνουν πιστοί στην πρόθεσή τους αυτή· οι περισσότεροι, για να το κατανοήσουν, θ' αναγκάζονταν να προστρέξουν στη βιβλιογραφία, διότι το βιβλίο του Sraffa είναι μεν ευανάγνωστο, όχι όμως και άμεσα κατανοητό. Η μελέτη του προϋποθέτει –σε βαθμό μεγαλύτερο από ό,τι η μελέτη κάθε άλλου κειμένου οικονομικής θεωρίας– τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας. Δεν θα μπορέσουμε λοιπόν κι εμείς εδώ ν' αποφύγουμε την αναφορά στις κυριότερες ερμηνείες και εκτιμήσεις, που έχουν δοθεί. (Έτσι η εισαγωγή αυτή είναι και μια εισαγωγή στη σχετική βιβλιογραφία). Πρώτιστα όμως στην εισαγωγή αυτή θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε και να επεξηγήσουμε τα κύρια σημεία του. Αυτό φυσικά δεν σημαίνει, πως η ανάγνωση αυτής της εισαγωγής μπορεί ν' αντικαταστήσει τη μελέτη του βιβλίου. Η εισαγωγή είναι μια βοή-

θεια που προσφέρεται βέβαια για να διευκολύνει την πρώτη ανάγνωση του κειμένου· πιθανόν όμως να μπορεί να αξιοποιηθεί πλήρως μετά απ' αυτήν.

II.

Παρουσίαση της Θεωρίας του Piero Sraffa

Α. Συστήματα παραγωγής απλών εμπορευμάτων

1. Το αντικείμενο

Το κύριο αντικείμενο της ανάλυσης του Sraffa είναι ο σχηματισμός και ο προσδιορισμός των τιμών σ' ένα σύστημα παραγωγής με δεδομένη γραμμική τεχνική (γραμμικό σύστημα) και δεδομένο ωρομίσθιο (ή ποσοστό κέρδους) καθώς επίσης κι ορισμένα συναρτώμενα προβλήματα. Το Ιο μέρος του βιβλίου η ανάλυση περιορίζεται σε γραμμικά συστήματα, στα οποία κάθε εμπόρευμα παράγεται σε μία μόνον διαδικασία παραγωγής και κάθε διαδικασία παραγωγής παράγει ένα μόνον εμπόρευμα. Τα συστήματα αυτά ονομάζουμε συστήματα παραγωγής απλών εμπορευμάτων. Συνεπώς ο αριθμός των παραγομένων εμπορευμάτων είναι ίσος με τον αριθμό των διαδικασιών παραγωγής. Συστήματα παραγωγής με την τελευταία αυτή ιδιότητα ονομάζονται «τετραγωγικά» συστήματα.

2. Ο προσδιορισμός των τιμών στο σύστημα επιβίωσης

Ο Sraffa αρχίζει με τον προσδιορισμό των τιμών (ο ίδιος τις ονομάζει αξίες) σε μια οικονομία επιβίωσης, δηλαδή σε μια οικονομία, στην οποία το πραγματικό ακαθάριστο προϊόν είναι ίσο με το άθροισμα των φθαρέντων μέσων παραγωγής

και των πραγματικών μισθών κι επομένως το πραγματικό καθαρό προϊόν ίσο με τους πραγματικούς μισθούς. Στην οικονομία αυτή η τιμή ενός εμπορεύματος είναι προφανώς ίση με το κόστος σε υλικά (=φθαρέντα μέσα παραγωγής) και σε μισθούς ανά μονάδα του εμπορεύματος. Εάν οι τιμές μερικών εμπορευμάτων ήσαν υψηλότερες, τότε οι τιμές μερικών άλλων εμπορευμάτων θα ήσαν αναγκαστικά χαμηλότερες από τα αντίστοιχα κόστη σε υλικά και μισθούς ανά μονάδα. Έτσι όμως η παραγωγή αυτών των τελευταίων εμπορευμάτων και συνεπώς και η αναπαραγωγή του συστήματος θα σταματούσε. Γιά κάθε εμπόρευμα μπορεί λοιπόν να σχηματίσει κανείς μια εξίσωση, σύμφωνα με την οποία η τιμή του εμπορεύματος ισούται με το αντίστοιχο κόστος. Τις εξισώσεις αυτές ονομάζουμε *συναρτήσεις τιμών*. Αν παράγονται κ εμπορεύματα, τότε προκύπτει ένα σύστημα κ εξισώσεων με κ αγνώστους (τις τιμές των κ εμπορευμάτων). Το σύστημα αυτό προσδιορίζει τις τιμές. Γι' αυτό τ' ονομάζουμε σύστημα προσδιορισμού των τιμών. Κατά τη διατύπωση των εξισώσεων αυτού του συστήματος ο Sraffa δεν διακρίνει μεταξύ εισροών σε μέσα παραγωγής και εισροών σε εργασιακή δύναμη. Στη θέση των ποσοτήτων εργασιακής δύναμης θέτει εξαρχής τις ποσότητες των εμπορευμάτων, που καταναλίσκονται για την αναπαραγωγή αυτών των ποσοτήτων εργασιακής δύναμης, δηλαδή τους αντίστοιχους πραγματικούς μισθούς.

Επίσης δεν διακρίνει μεταξύ των εισροών σε μέσα παραγωγής και των πραγματικών μισθών. Έτσι λοιπόν είναι μεν γνωστό το άθροισμα των εισροών σε μέσα παραγωγής και των πραγματικών μισθών, όχι όμως και οι εισροές σε μέσα παραγωγής και οι πραγματικοί μισθοί χωριστά. Κατά συνέπεια το κόστος σε υλικά και το κόστος σε μισθούς δεν είναι γνωστά μεγέθη. Γνωστό είναι μόνον το συνολικό κόστος, δηλαδή το άθροισμα του κόστους σε υλικά και του κόστους σε μισθούς.

Επειδή το σύστημα παραγωγής παριστάνει μια οικονομία επιβίωσης, το άθροισμα των εισροών ενός εμπορεύματος ως μέσου παραγωγής και ως στοιχείου του πραγματικού μισθού σ' όλες τις διαδικασίες παραγωγής είναι ίσο με την εκροή του εμπορεύματος αυτού στη διαδικασία παραγωγής, στην οποία

παράγεται. Αυτό συνεπάγεται, ότι καθεμιά από τις κ εξισώσεις του συστήματος προσδιορισμού των τιμών προκύπτει από το άθροισμα των υπολοίπων κ-1 εξισώσεων. Το σύστημα δηλαδή αποτελείται από κ εξισώσεις, από τις οποίες όμως μόνον κ-1 είναι δυνατόν να είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες· έχει λοιπόν, αν προϋποτεθεί, ότι κ-1 εξισώσεις είναι πράγματι μεταξύ τους ανεξάρτητες, ένα βαθμό ελευθερίας. Συνεπώς προσδιορίζει μόνον τις σχετικές, όχι όμως και τις απόλυτες τιμές. Η λύση του δίνει λοιπόν τις σχετικές τιμές των εμπορευμάτων. Θέτοντας την τιμή ενός εμπορεύματος ή ενός «καλαθιού» εμπορευμάτων ίση με μια θετική σταθερά, απαλείφοντας δηλαδή το βαθμό ελευθερίας του συστήματος, παίρνουμε ένα σύστημα κ+1 εξισώσεων με κ αγνώστους, από τις οποίες όμως μόνον κ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Η λύση αυτού του συστήματος δίνει τις απόλυτες τιμές των εμπορευμάτων.

Το εμπόρευμα ή το καλάθι εμπορευμάτων, την τιμή του οποίου θέσαμε ίση με μία θετική σταθερά, ονομάζουμε «τυπικό εμπόρευμα», την αντίστοιχη εξίσωση «εξίσωση τυποποίησης των τιμών» και την εισαγωγή αυτής της εξίσωσης στο σύστημα προσδιορισμού των τιμών «τυποποίηση των τιμών». Πριν την εισαγωγή της εξίσωσης των τιμών το διάνυσμα των τιμών είναι λοιπόν –με εξαίρεση ενός βαθμωτού μεγέθους– πλήρως προσδιορισμένο. Με την εξίσωση τυποποίησης των τιμών καθορίζεται εξωγενώς το άγνωστο αυτό βαθμωτό, τυποποιείται δηλαδή το διάνυσμα των τιμών. Το επίπεδο –όχι όμως και οι λόγοι– των απολύτων τιμών εξαρτάται λοιπόν από τον τρόπο τυποποίησης των τιμών, δηλαδή από το τυπικό εμπόρευμα και από το μέγεθος της θετικής σταθεράς, με την οποία εξισώνεται η τιμή του τυπικού εμπορεύματος.

Σε μια οικονομία επιβίωσης οι τιμές είναι πάντα ανάλογες των αξιών. Αν κατά την τυποποίησή τους έχει τεθεί η τιμή του τυπικού εμπορεύματος ίση με την αξία του, τότε οι τιμές αυτές είναι και ίσες με τις αξίες.

Η οικονομία επιβίωσης του Sraffa δεν είναι ταυτόσημη με την απλά αναπαραγόμενη οικονομία του Marx. Η τελευταία δεν χαρακτηρίζεται, όπως η πρώτη, από την έλλειψη πλεονάσματος, αλλά από το γεγονός, ότι το παραγόμενο πλεόνασμα δεν επισωρεύεται, αλλά καταναλώνεται από τους καπιταλι-

στές, δηλαδή από την έλλειψη επισώρευσης. Βέβαια τόσο το σύστημα επιβίωσης όσο και αυτό της απλής αναπαραγωγής αναπαράγονται σε κάθε περίοδο στο ίδιο επίπεδο –με τη διαφορά, ότι η αναπαραγωγή του πρώτου συστήματος είναι απλή αναπαραγωγή των *υλικών* μεγεθών του συστήματος *χωρίς υλικό* πλεόνασμα, η του δευτέρου όμως απλή αναπαραγωγή των *αξιακών* μεγεθών του συστήματος με *υλικό* και, επομένως, και αξιακό πλεόνασμα (=υπεραξία), η οποία στην περίπτωση, που η παραγωγικότητα της εργασίας αυξάνεται, εμπεριέχει μια *διευρυμένη* αναπαραγωγή των *υλικών* μεγεθών του συστήματος. (Αντιθέτως στο σύστημα επιβίωσης η παραγωγικότητα της εργασίας παραμένει, συνεπεία της αμετάβλητης τεχνικής, αμετάβλητη).

3. Ο προσδιορισμός των τιμών σ' ένα σύστημα με πλεόνασμα, στο οποίο ο μισθός αποτελεί άδηλο μέρος των εισροών

Εάν ένα τουλάχιστον εμπόρευμα παράγεται σε ποσότητα μεγαλύτερη από το άθροισμα των εισροών αυτού του εμπορεύματος σ' όλες τις διαδικασίες παραγωγής (όπου οι εισροές περιλαμβάνουν τα φθαρέντα μέσα παραγωγής και τους πραγματικούς μισθούς) και τα υπόλοιπα εμπορεύματα παράγονται σε ποσότητες ίσες με τις εισροές τους, τότε το σύστημα παράγει πλεόνασμα. Το (υλικό) πλεόνασμα του συστήματος είναι η διαφορά μεταξύ του ακαθαρίστου προϊόντος, δηλαδή του συνόλου των εκροών, και του αθροίσματος των φθαρέντων μέσων παραγωγής και των πραγματικών μισθών, δηλαδή των συνολικών εισροών. Το άθροισμα των –με τις αντίστοιχες τιμές πολλαπλασιασμένων– ποσοτήτων εμπορευμάτων, από τις οποίες αποτελείται το (υλικό) πλεόνασμα, είναι το κέρδος. (Ο Sraffa χρησιμοποιεί στην αρχή *τόσο* για το χαρακτηρισμό του υλικού πλεονάσματος *όσο* και γι' αυτόν του κέρδους τον όρο πλεόνασμα).

Χωρίς να το θεμελιώνει, ο Sraffa θεωρεί δεδομένο, ότι το κέρδος κατανέμεται στους ιδιοκτήτες των εμπορευμάτων, στους καπιταλιστές, ανάλογα με το ύψος του κεφαλαίου, που χρη-

σιμοποίησε ο καθένας τους, και συγκεκριμένα έτσι, ώστε κάθε ιδιοκτήτης εμπορευμάτων να επιτυγχάνει με την πώλησή τους τον ίδιο λόγο κέρδους προς κεφάλαιο, δηλαδή το ίδιο ποσοστό κέρδους, όπως και κάθε άλλος. Αν όμως όλα τα ποσοστά κέρδους είναι ίσα κι επομένως ίσα με το μέσο, τότε υπάρχει ένα γενικό, ενιαίο ποσοστό κέρδους. Ο Sraffa προσδιορίζει λοιπόν σε συστήματα με πλεόνασμα τις τιμές των εμπορευμάτων ως τις τιμές, που κατανέμουν το συνολικό κέρδος έτσι, ώστε να διαμορφώνεται ένα ενιαίο ποσοστό κέρδους. Κατά τον προσδιορισμό αυτό των τιμών ο Sraffa προϋποθέτει, ότι τα μέσα παραγωγής φθείρονται κατά τη διάρκεια της περιόδου παραγωγής καθ' ολοκληρίαν, δηλαδή ότι το κυκλοφορούν σταθερό κεφάλαιο είναι ίσο με το σταθερό κεφάλαιο. Επιπλέον προϋποθέτει, ότι οι μισθοί της περιόδου προκαταβάλλονται, θεωρεί δηλαδή τους συνολικούς μισθούς της περιόδου μέρος του κεφαλαίου. Συνεπώς το ποσοστό κέρδους είναι ίσο με το λόγο των κέρδων προς το άθροισμα του σταθερού και του μεταβλητού κεφαλαίου, όπου το μεταβλητό κεφάλαιο είναι ίσο με τους μισθούς της περιόδου. Ο συνολικός πραγματικός μισθός της περιόδου είναι ένα μη δεδηλωμένο μέρος των συνολικών εισροών κι επομένως άγνωστος. Ο ονομαστικός μισθός είναι συνεπώς και αυτός ένα άγνωστο μέρος του αθροίσματος των –με τις αντίστοιχες τιμές πολλαπλασιασμένων– συνολικών εισροών. Άγνωστα μεγέθη είναι επίσης το πραγματικό και το ονομαστικό ωρομίσθιο καθώς και οι εισροές σε εργασιακή δύναμη. Το μόνο που είναι δυνατόν να γνωρίζει κανείς για τον πραγματικό μισθό είναι, ότι αυτός, επειδή εμπεριέχεται στις εισροές, δεν μπορεί ν' αποτελείται και από εμπορεύματα, που εμπεριέχονται μόνον στο πλεόνασμα, δηλαδή από εμπορεύματα, που εμπεριέχονται στις εκροές και, ειδικότερα, στο πλεόνασμα, χωρίς όμως να εμπεριέχονται και στις εισροές.

Η τιμή ενός εμπορεύματος του συστήματος που περιγράψαμε είναι ίση με το άθροισμα του κόστους σε υλικά και μισθούς και του κέρδους ανά μονάδα του εμπορεύματος, όπου το κέρδος ανά μονάδα του εμπορεύματος είναι ίσο με το γινόμενο του χρησιμοποιηθέντος κεφαλαίου (= κόστος σε υλικά και μισθούς) ανά μονάδα του εμπορεύματος και του ενιαίου ποσοστού κέρδους.

Αν παράγονται κ εμπορεύματα, τότε υπάρχουν κ τέτοιες εξισώσεις. Ο ίδιος ο Sraffa ισχυρίζεται, ότι οι κ αυτές εξισώσεις είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και προσδιορίζουν τις κ-1 (σχετικές) τιμές των εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους, δηλαδή ότι αποτελούν ένα *κλειστό γραμμικό* σύστημα εξισώσεων, το οποίο δίνει μία λύση για το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές.

Ας δούμε πώς έχει το πράγμα. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση το σύστημα παραγωγής παράγει μόνον αναπαραγωγικά εμπορεύματα και κανένα μη αναπαραγωγικό εμπόρευμα, δηλαδή εδώ, που οι πραγματικοί μισθοί αποτελούν άδηλο μέρος των εισροών σε υλικά, μόνον εμπορεύματα, τα οποία εισέρχονται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή όλων των εμπορευμάτων, και κανένα εμπόρευμα που δεν εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή όλων των εμπορευμάτων. (Τις έννοιες των αναπαραγωγικών και μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων αναλύουμε στα αμέσως επόμενα). Στη δεύτερη περίπτωση το σύστημα παραγωγής παράγει και ένα τουλάχιστον μη αναπαραγωγικό εμπόρευμα.

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε ένα ομογενές σύστημα κ εξισώσεων με κ+1 αγνώστους (τις κ απόλυτες τιμές των εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους) ή με κ αγνώστους (τις κ-1 *σχετικές* τιμές των εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους), από τις οποίες κ-1 είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Η επίλυση αυτού του συστήματος δίνει, για $p \neq 0$, όπου p το διάνυσμα των τιμών των εμπορευμάτων, κ λύσεις για τις κ-1 σχετικές τιμές των εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους. Μία μόνον από αυτές τις κ λύσεις δίνει θετικές σχετικές τιμές για όλα τα εμπορεύματα και θετικό ποσοστό κέρδους: εκείνη από τις κ λύσεις, η οποία δίνει την μικρότερη θετική αριθμητική τιμή για το ποσοστό κέρδους απ' όλες τις άλλες λύσεις. Η λύση αυτή, επειδή είναι η μόνη από τις κ λύσεις που δίνει θετικές σχετικές τιμές εμπορευμάτων και θετικό ποσοστό κέρδους είναι και η μόνη οικονομικά σημαντική. Αυτήν και επιλέγουμε, γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο, τελικά. Διότι όλες οι άλλες λύσεις, επειδή δίνουν και αρνητικές «τιμές» για το ποσοστό κέρδους ή και για τις σχετικές τιμές των εμπορευμάτων, δεν έχουν οικονομικό νόημα.

Αν όμως εισάγουμε μια εξίσωση τυποποίησης, τότε παίρνουμε ένα σύστημα κ+1 εξισώσεων (από τις οποίες κ μόνον είναι ανεξάρτητες) με κ+1 αγνώστους (τις κ απόλυτες τιμές των εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους). Το σύστημα αυτό δίνει, επειδή η εξίσωση τυποποίησης συνεπάγεται p≠0, όπως ακριβώς και το προηγούμενο, κ λύσεις για τις *απόλυτες* όμως τώρα πλέον τιμές των εμπορευμάτων και για το ποσοστό κέρδους. Μία μόνον από αυτές τις κ λύσεις δίνει θετικό ποσοστό κέρδους και θετικές *απόλυτες* τιμές εμπορευμάτων: αυτή με το μικρότερο θετικό ποσοστό κέρδους. Η λύση αυτή είναι και η μόνη οικονομικά σημαντική. Οι κ λύσεις αυτού του συστήματος συμπίπτουν, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις *σχετικές* τιμές των εμπορευμάτων, με τις κ λύσεις του προηγούμενου συστήματος εξισώσεων. Επομένως και η οικονομικά σημαντική λύση του συστήματος συμπίπτει, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις *σχετικές* τιμές, με την οικονομικά σημαντική λύση του προηγούμενου συστήματος εξισώσεων. Ο λόγος, για τον οποίο και τα δύο συστήματα εξισώσεων δίνουν κ –και όχι μία– λύσεις, είναι απλούστατος: διότι δεν είναι γραμμικά. Γραμμικό είναι το σύστημα παραγωγής. Όμως άλλο η γραμμικότητα του συστήματος παραγωγής και άλλο η γραμμικότητα ή η μη γραμμικότητα του συστήματος εξισώσεων προσδιορισμού των τιμών και του ποσοστού κέρδους σ' ένα γραμμικό σύστημα παραγωγής, στις συνολικές υλικές εισροές του οποίου συμπεριλαμβάνονται και οι πραγματικοί μισθοί. Καίτοι μερικοί συγχέουν αυτά τα δύο πράγματα και νομίζουν, ότι η γραμμικότητα του συστήματος παραγωγής συνεπάγεται και γραμμικότητα του συστήματος εξισώσεων προσδιορισμού των τιμών και του ποσοστού κέρδους αυτού του γραμμικού συστήματος παραγωγής και ως εκ τούτου ότι αυτό το σύστημα εξισώσεων έχει μία και μόνον λύση.

Μία και μοναδική λύση έχει το σύστημα των κ εξισώσεων με κ αγνώστους (το ποσοστό κέρδους και τις κ-1 σχετικές τιμές), το οποίο παίρνουμε πριν την τυποποίηση των τιμών, μόνον όταν το δεδομένο σύστημα παραγωγής είναι ένα πρότυπο σύστημα του Charasoff, δηλαδή ένα σύστημα, του οποίου το υλικό πλεόνασμα έχει την ίδια σύνθεση με το σύνολο των μέσων παραγωγής και των πραγματικών μισθών του. Και

το σύστημα των κ+1 εξισώσεων με κ+1 αγνώστους (το ποσοστό κέρδους και τις κ απόλυτες τιμές των εμπορευμάτων) έχει μία μόνον λύση, όταν τυποποιήσουμε τις τιμές με τυπικό εμπόρευμα το πρότυπο εμπόρευμα του Charasoff, δηλαδή το υλικό πλεόνασμα του προτύπου συστήματος του Charasoff*.

Διαφορετικά έχει το πράγμα, όταν το δεδομένο σύστημα παραγωγής παράγει και μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα. Στην περίπτωση αυτή φυσικά, επειδή τα μισθιακά εμπορεύματα είναι πάντα αναπαραγωγικά εμπορεύματα, οι πραγματικοί μισθοί αποτελούνται αποκλειστικά και μόνον από αναπαραγωγικά εμπορεύματα. Έστω ότι το σύστημα παραγωγής παράγει n αναπαραγωγικά εμπορεύματα και κ-n μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα ($1 \leq n < \kappa$, $\kappa - n \geq 1$). Τότε διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση τα μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα δεν εισέρχονται στην παραγωγή μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων, ενώ στη δεύτερη περίπτωση τα αναπαραγωγικά εμπορεύματα εισέρχονται στην παραγωγή μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων και μάλιστα, όπως επιθυμούμε να προϋποθέσουμε εδώ χάριν απλούστευσης του πράγματος, στην παραγωγή *όλων* των μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων.

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε ένα σύστημα κ εξισώσεων με κ+1 αγνώστους που αποτελείται από ένα ομογενές υποσύστημα n εξισώσεων, από τις οποίες n-1 είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, και από ένα δεύτερο υποσύστημα κ-n ανεξαρτήτων εξισώσεων. Το πρώτο υποσύστημα εξισώσεων έχει n+1 αγνώστους, τις n απόλυτες τιμές των n αναπαραγωγικών εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους, και το δεύτερο υποσύστημα εξισώσεων έχει κ+1 αγνώστους, τις n απόλυτες τιμές των n αναπαραγωγικών εμπορευμάτων, τις κ-n απόλυτες τιμές των κ-n μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους. Επειδή n+1 άγνωστοι (οι n απόλυτες τιμές των n αναπαραγωγικών εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους) είναι κοινοί και στα δύο υποσυστήματα εξισώσεων κι επειδή από τις n εξισώσεις του πρώτου υποσυστήματος μόνον n-1 είναι ανεξάρτητες, το συνολικό σύστημα εξισώσεων

* Για μια μαθηματική απόδειξη των παραπάνω δες τον πρόλογο αυτού του βιβλίου.

αποτελείται από κ εξισώσεις, από τις οποίες κ–1 είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, με κ+1 αγνώστους (τις κ απόλυτες τιμές των εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους) ή με κ αγνώστους (τις κ–1 σχετικές τιμές των εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους).

Η επίλυση του συνολικού συστήματος εξισώσεων δίνει για $p_I \neq 0$, όπου p_I το διάνυσμα των τιμών των αναπαραγωγικών εμπορευμάτων, n λύσεις για το ποσοστό κέρδους και τις κ-1 σχετικές τιμές των εμπορευμάτων. Για $p_I=0$ το ίδιο σύστημα εξισώσεων δίνει μία ακόμη λύση, η οποία όμως, επειδή συνεπάγεται και $p_{II}=0$, όπου p_{II} το διάνυσμα των τιμών των μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων, είναι η τετριμμένη λύση. Έτσι το παραπάνω σύστημα εξισώσεων δίνει, πέραν της τετριμμένης, συνολικά n λύσεις. Μία μόνο από αυτές τις n λύσεις δίνει θετικές σχετικές τιμές εμπορευμάτων και θετικό ποσοστό κέρδους, είναι δηλαδή θετική και συνεπώς οικονομικά σημαντική: εκείνη από τις n λύσεις, η οποία δίνει την μικρότερη θετική αριθμητική τιμή για το ποσοστό κέρδους από όλες τις άλλες λύσεις. Το ποσοστό κέρδους αυτής της μοναδικής θετικής και συνεπώς μοναδικής οικονομικά σημαντικής από τις n λύσεις είναι ίσο με το ποσοστό κέρδους r_b του πρώτου υποσυστήματος εξισώσεων, το οποίο προκύπτει απ' αυτό το υποσύστημα εξισώσεων για θετικές τιμές των αναπαραγωγικών εμπορευμάτων.

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων δίνει τότε και μόνον μία και μόνη, *θετική*, λύση, όταν το δεδομένο σύστημα παραγωγής είναι, όσον αφορά το αναπαραγωγικό του μέρος, ένα πρότυπο σύστημα του Charasoff. Η λύση αυτή συμπίπτει με την οικονομικά σημαντική από τις προαναφερθείσες n λύσεις του συστήματος.

Αν εισάγουμε μια εξίσωση τυποποίησης, τότε παίρνουμε ένα σύστημα κ+1 εξισώσεων, από τις οποίες κ μόνον είναι ανεξάρτητες, με κ+1 αγνώστους (τις κ απόλυτες τιμές των εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους). Αν ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί ένα οποιοδήποτε καλάθι οποιωνδήποτε αναπαραγωγικών μόνον εμπορευμάτων (πλην του προτύπου εμπορεύματος του Charasoff), τότε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων δίνει n λύσεις για το ποσοστό κέρδους και τις κ από-

λυτες τιμές των εμπορευμάτων, οι οποίες, επειδή η παραπάνω τυποποίηση συνεπάγεται προφανώς $p_I \neq 0$, συμπίπτουν, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις *σχετικές* τιμές των εμπορευμάτων, με τις n λύσεις του ιδίου αυτού συστήματος εξισώσεων, πριν την εισαγωγή της εξίσωσης τυποποίησης, τις οποίες πήραμε για $p_I \neq 0$. Από τις n λοιπόν λύσεις του συστήματος μία μόνον είναι οικονομικά σημαντική. Η μοναδική αυτή οικονομικά σημαντική λύση συμπίπτει, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις *σχετικές* τιμές, με την μοναδική οικονομικά σημαντική λύση του ιδίου συστήματος εξισώσεων *πριν* την εισαγωγή της εξίσωσης τυποποίησης και για $p_I \neq 0$.

Αν τυποποιήσουμε τις τιμές με τυπικό εμπόρευμα ένα καλάθι εμπορευμάτων, το οποίο αποτελείται είτε (α) μόνον από ένα ή περισσότερα ή όλα τα μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα, είτε (β) από ένα ή περισσότερα ή όλα τα μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα και ένα ή περισσότερα ή όλα τα αναπαραγωγικά εμπορεύματα, τότε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων δίνει n λύσεις για τις κ απόλυτες τιμές των εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους. Για τους εξής λόγους: Η τυποποίηση της περίπτωσης (α) συνεπάγεται $p_{II} \neq 0$. Συνεπώς το σύστημα εξισώσεων δίνει για $p_{II} \neq 0$ και $p_I \neq 0$, όπως έδωσε και πριν την εισαγωγή της εξίσωσης τυποποίησης για $p_{II} \neq 0$ και $p_I \neq 0$, n λύσεις, και για $p_I = 0$, όπως και πριν την εισαγωγή της εξίσωσης τυποποίησης $p_{II} = 0$, δηλαδή τελικά $p = 0$ και συνεπώς την τετριμμένη λύση. Έτσι λοιπόν δίνει συνολικά, πέραν της τετριμμένης, όπως και πριν την εισαγωγή της εξίσωσης τυποποίησης, n λύσεις. Οι n αυτές λύσεις συμπίπτουν, όσον αφορά τις *σχετικές* τιμές και το ποσοστό κέρδους, με τις n λύσεις του ίδιου συστήματος πριν την εισαγωγή της εξίσωσης τυποποίησης. Από τις n αυτές λύσεις του συστήματος μία μόνον είναι οικονομικά σημαντική. Η μοναδική αυτή οικονομικά σημαντική λύση του συστήματος συμπίπτει και αυτή φυσικά, όσον αφορά τις *σχετικές* τιμές και το ποσοστό κέρδους με την μοναδική οικονομικά σημαντική λύση του ιδίου συστήματος πριν την εισαγωγή της εξίσωσης τυποποίησης. Η τυποποίηση της περίπτωσης (β) συνεπάγεται είτε $p_I \neq 0$ και $p_{II} \neq 0$ ή $p_{II} = 0$, είτε $p_I \neq 0$ και $p_I \neq 0$ ή $p_I = 0$, δηλαδή πάντα $p \neq 0$. Επειδή όμως, όπως είδαμε, εδώ, όταν είναι $p_I = 0$, είναι και $p_{II} = 0$ και συνε-

πώς p=0, η τυποποίηση αυτή συνεπάγεται $p_I \neq 0$ και $p_{II} \neq 0$. Συνεπώς το σύστημα των εξισώσεων δίνει και κατ' αυτήν την τυποποίηση n λύσεις –τις ίδιες ακριβώς που δίνει και κατά την τυποποίηση της περίπτωσης (α) πλην της τετριμμένης.

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων δίνει τότε και μόνον μία και μόνη, *θετική*, λύση για τις κ απόλυτες τιμές και το ποσοστό κέρδους, όταν οι τιμές έχουν τυποποιηθεί με τυπικό εμπόρευμα το πρότυπο εμπόρευμα του Charasoff. Η λύση αυτή συμπίπτει, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές, με την οικονομικά σημαντική λύση από τις προαναφερθείσες n λύσεις, οι οποίες προκύπτουν για κάθε άλλη τυποποίηση.

Στην δεύτερη περίπτωση, στην οποία τα μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα εισέρχονται στην παραγωγή όλων των μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων, διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις. Και στις δύο υποπεριπτώσεις το σύστημα εξισώσεων διασπάται όπως και στην προηγούμενη περίπτωση σε δύο υποσυστήματα εξισώσεων.

Στην πρώτη υποπερίπτωση το ποσοστό κέρδους r_b, το οποίο προκύπτει από το πρώτο υποσύστημα εξισώσεων για θετικές τιμές όλων των αναπαραγωγικών εμπορευμάτων, είναι *μικρότερο* από το ποσοστό κέρδους R_n, το οποίο προκύπτει από το δεύτερο υποσύστημα εξισώσεων για θετικές τιμές όλων των μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων και για μηδενικές τιμές όλων των αναπαραγωγικών εμπορευμάτων (επειδή εδώ όλα τα μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα εισέρχονται εξ υποθέσεως στην παραγωγή όλων των μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων και επειδή στην περίπτωση αυτή οι τιμές όλων των αναπαραγωγικών εμπορευμάτων έχουν προϋποτεθεί ως ίσες με μηδέν, το υποσύστημα αυτό γίνεται κι αυτό, όπως το πρώτο, ένα *ομογενές* σύστημα εξισώσεων και συγκεκριμένα ένα ομογενές σύστημα κ-n εξισώσεων, από τις οποίες κ-n-1 είναι ανεξάρτητες, με κ-n+1 αγνώστους, το ποσοστό κέρδους και τις κ-n απόλυτες τιμές των μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων, ή με κ-n αγνώστους, το ποσοστό κέρδους και τις κ-n-1 σχετικές τιμές των μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων). Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων δίνει, για $p_I \neq 0$, n λύσεις, και για $p_I=0$, (εδώ, που τα μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα εισέρχο-

νται στην παραγωγή μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων, η p_I=0 δεν συνεπάγεται και p_{II}=0 και συνεπώς p=0), άλλες κ-η λύσεις, δηλαδή συνολικά κ λύσεις για το ποσοστό κέρδους και τις κ-1 σχετικές τιμές. Από τις τελευταίες κ-η λύσεις καμία φυσικά δεν είναι θετική (επειδή όλες ενέχουν p_I=0), και μόνον μία είναι ημιθετική, δίνει δηλαδή p_I=0, p_{II}>0 και r>0: αυτή με το μικρότερο θετικό r (το οποίο είναι ίσο με R_n). Οι πρώτες n λύσεις που δίνει το σύστημα συμπίπτουν με τις n λύσεις που δίνει το ίδιο σύστημα, όταν τα μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα δεν εισέρχονται στην παραγωγή των μη αναπαραγωγικών εμπορευμάτων. Ισχύει λοιπόν, ό,τι ελέχθη γι' αυτές τις τελευταίες και κυρίως ότι μία μόνον από αυτές είναι θετική και ως εκ τούτου οικονομικά σημαντική: αυτή με το μικρότερο θετικό ποσοστό κέρδους (το οποίο είναι ίσο με r_b). Αν τυποποιήσουμε τις τιμές με τυπικό εμπόρευμα ένα καλάθι αναπαραγωγικών μόνον εμπορευμάτων (το οποίο ωστόσο δεν συμπίπτει με το πρότυπο εμπόρευμα του Charasoff), τότε παίρνουμε n λύσεις για το ποσοστό κέρδους και τις απόλυτες τιμές, οι οποίες, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές, συμπίπτουν με τις παραπάνω πρώτες n λύσεις του ιδίου συστήματος πριν την εισαγωγή της εξίσωσης τυποποίησης. Αν τέλος τυποποιήσουμε τις τιμές με τυπικό εμπόρευμα ένα από τα τυπικά εμπορεύματα των περιπτώσεων (α) και (β) που αναφέραμε παραπάνω, τότε το σύστημα έχει κ λύσεις για το ποσοστό κέρδους και τις απόλυτες τιμές, οι οποίες συμπίπτουν, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές, με τις n+(κ-n) (=κ) λύσεις, που δίνει το ίδιο σύστημα εξισώσεων πριν την τυποποίηση των τιμών, και n από αυτές με τις n λύσεις που δίνει το ίδιο σύστημα κατά την τυποποίηση με τυπικό εμπόρευμα ένα καλάθι αναπαραγωγικών μόνον εμπορευμάτων (που ωστόσο δεν συμπίπτει με το πρότυπο εμπόρευμα του Charasoff). Μία και μόνη θετική λύση έχει το σύστημα, μόνον όταν οι τιμές τυποποιηθούν με τυπικό εμπόρευμα το πρότυπο εμπόρευμα του Charasoff. Η λύση αυτή συμπίπτει, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές, με την οικονομικά σημαντική λύση από τις n λύσεις που δίνει το ίδιο σύστημα, όταν ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί ένα αποτελούμενο από αναπαραγωγικά μόνον εμπο-

ρεύματα καλάθι εμπορευμάτων.

Στην δεύτερη υποπερίπτωση είναι $r_b \geq R_n$. Το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων δίνει πριν την τυποποίηση των τιμών κ λύσεις: n λύσεις για $p_I \neq 0$ και κ-n λύσεις για $p_I=0$ (εδώ η $p_I=0$ δεν συνεπάγεται και $p_{II}=0$ και συνεπώς p=0). Η μοναδική «οικονομικά σημαντική» από τις πρώτες n λύσεις, αυτή με το μικρότερο θετικό ποσοστό κέρδους, δίνει ένα ποσοστό κέρδους ίσο με r_b, θετικές τιμές για τα αναπαραγωγικά εμπορεύματα και αρνητικές (όταν $r_b > R_n$) ή τείνουσες προς το -∞ (όταν το ποσοστό κέρδους τείνει μειούμενο προς το R_n) ή απροσδιόριστες (όταν το ποσοστό κέρδους είναι ίσο με R_n) σχετικές τιμές για τά μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα. Οι υπόλοιπες κ-n λύσεις είναι φυσικά, λόγω της $p_I=0$, ημιθετικές. Η μοναδική «οικονομικά σημαντική» από αυτές τις κ-n λύσεις, αυτή με το μικρότερο θετικό ποσοστό κέρδους, δίνει ένα ποσοστό κέρδους ίσο με R_n, θετικές τιμές για τα μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα και μηδενικές τιμές για τα αναπαραγωγικά εμπορεύματα.

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων δίνει πριν την τυποποίηση των τιμών τότε και μόνον μία και μόνη λύση, την «οικονομικά σημαντική» από τις πρώτες n λύσεις ή τις τελευταίες κ-n λύσεις, όταν το δεδομένο σύστημα παραγωγής είναι ένα πρότυπο σύστημα του Charasoff, το οποίο παράγει αναπαραγωγικά *και* μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα αντιστοίχως.

Αν τυποποιήσουμε τις τιμές με τυπικό εμπόρευμα ένα καλάθι αναπαραγωγικών μόνον εμπορευμάτων (πλην του αποτελούμενου από αναπαραγωγικά μόνον εμπορεύματα προτύπου εμπορεύματος του Charasoff), τότε παίρνουμε ένα σύστημα κ+1 εξισώσεων, από τις οποίες μόνον κ είναι ανεξάρτητες με κ+1 αγνώστους, το ποσοστό κέρδους και τις κ απόλυτες τιμές των εμπορευμάτων, το οποίο έχει n λύσεις. Οι λύσεις αυτές, μεταξύ αυτών και η μοναδική «οικονομικά σημαντική», συμπίπτουν, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές των εμπορευμάτων, με τις πρώτες n λύσεις που δίνει το ίδιο σύστημα πριν την εισαγωγή της εξίσωσης τυποποίησης των τιμών.

Αν ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί το αποτελούμενο μό-

νον από αναπαραγωγικά εμπορεύματα πρότυπο εμπόρευμα του Charasoff, τότε το παραπάνω σύστημα έχει μία και μόνη λύση, η οποία συμπίπτει, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές των εμπορευμάτων, με την μοναδική «οικονομικά σημαντική» λύση που δίνει το ίδιο σύστημα κατά την προαναφερθείσα τυποποίηση ή το ίδιο σύστημα πριν την τυποποίηση των τιμών.

Αν όμως τυποποιήσουμε τις τιμές με τυπικό εμπόρευμα ένα καλάθι εμπορευμάτων αποτελούμενο είτε (α) από ένα ή περισσότερα ή όλα τα μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα είτε (β) από ένα ή περισσότερα ή όλα τα μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα και ένα ή περισσότερα ή όλα τα αναπαραγωγικά εμπορεύματα (πλην του αποτελούμενου από αναπαραγωγικά και μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα προτύπου εμπορεύματος του Charasoff), τότε, για $p_i \neq 0$, παίρνουμε n λύσεις και, για $p_i=0$, παίρνουμε άλλες κ-n λύσεις, δηλαδή συνολικά κ λύσεις. Οι πρώτες n από αυτές τις κ συνολικά λύσεις, μεταξύ αυτών και η μοναδική «οικονομικά σημαντική», συμπίπτουν, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές, με τις πρώτες n λύσεις που δίνει το σύστημα εξισώσεων πριν την τυποποίηση των τιμών για $p_i \neq 0$ και με τις n λύσεις που δίνει το ίδιο σύστημα κατά την τυποποίηση των τιμών με τυπικό εμπόρευμα ένα καλάθι αναπαραγωγικών μόνον εμπορευμάτων (πλην του αποτελούμενου από αναπαραγωγικά μόνον εμπορεύματα προτύπου εμπορεύματος του Charasoff), και οι τελευταίες κ-n λύσεις, μεταξύ αυτών και η μοναδική «οικονομικά σημαντική», συμπίπτουν, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές, με τις τελευταίες κ-n λύσεις που δίνει το ίδιο σύστημα εξισώσεων πριν την τυποποίηση των τιμών για $p_i=0$.

Αν ως τυπικό εμπόρευμα λειτουργεί το αποτελούμενο από αναπαραγωγικά και μη αναπαραγωγικά εμπορεύματα πρότυπο εμπόρευμα του Charasoff, τότε το παραπάνω σύστημα έχει μία και μόνη λύση, η οποία συμπίπτει, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές, με την μοναδική «οικονομικά σημαντική» από τις τελευταίες κ-n λύσεις του ιδίου συστήματος πριν την τυποποίηση και συνεπώς με την μοναδική λύση του ιδίου συστήματος πριν την τυποποίηση