ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ΦΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ

Τα μαθηματικά οικονομικά δεν είναι ένας ξεχωριστός κλάδος των οικονομικών όπως είναι η Δημόσια Οικονομική ή το Διεθνές Εμπόριο. Μάλλον είναι μια *προσέγγιση* στην οικονομική ανάλυση, με την οποία ο οικονομολόγος χρησιμοποιεί μαθηματικά σύμβολα στη διατύπωση του προβλήματος και επίσης βασίζεται σε γνωστά μαθηματικά θεωρήματα τα οποία βοηθούν στο συλλογισμό. Όσον αφορά το συγκεκριμένο αντικείμενο της ανάλυσης, αυτό μπορεί να είναι Μικρο- ή Μακροοικονομική θεωρία, Δημόσια Οικονομική, Αστική Οικονομική ή κάτι άλλο.

Χρησιμοποιώντας τον όρο *μαθηματικά οικονομικά*, με την ευρύτερη δυνατή έννοια, μπορούμε κάλλιστα να πούμε ότι κάθε βασικό σημερινό βιβλίο οικονομικών χρησιμοποιεί μαθηματικά οικονομικά, στον ίδιο βαθμό που χρησιμοποιούνται συχνά γεωμετρικές μέθοδοι για να παράγουν θεωρητικά αποτελέσματα. Συνήθως, όμως, τα μαθηματικά οικονομικά καλούνται να περιγράψουν πιο περίπλοκες περιπτώσεις χρησιμοποιώντας μαθηματικές τεχνικές πέραν της απλής γεωμετρίας, όπως άλγεβρα πινάκων, διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, διαφορικές εξισώσεις, εξισώσεις διαφορών κ.λπ. Ο σκοπός αυτού του βιβλίου είναι να εισάγει τον αναγνώστη στα πιο βασικά θέματα αυτών των μαθηματικών μεθόδων – αυτών που συναντώνται καθημερινά στην τρέχουσα οικονομική βιβλιογραφία.

1.1 Μαθηματικά και μη μαθηματικά οικονομικά

Επειδή τα μαθηματικά οικονομικά είναι απλά και μόνο μια προσέγγιση της οικονομικής ανάλυσης, δεν θα πρέπει και όντως δεν διαφέρουν κατά βάση από τη *μη* μαθηματική προσέγγιση της οικονομικής ανάλυσης. Ο σκοπός της θεωρητικής ανάλυσης, ανεξάρτητα από την προσέγγιση, είναι πάντα να παράγει ένα σύνολο συμπερασμάτων ή θεωρημάτων από ένα δεδομένο σύνολο υποθέσεων ή αξιωμάτων μέσω μιας συλλογιστικής διαδικασίας. Η κύρια διαφορά μεταξύ «μαθηματικών οικονομικών» και «φιλολογικών» (λεκτικών) οικονομικών έγκειται κυρίως στο γεγονός ότι, στην πρώτη, οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα διατυπώνονται με μαθηματικά σύμβολα αντί για λέξεις και με εξισώσεις αντί για προτάσεις. Επιπλέον, στη θέση της συλλογιστικής των εννοιών, χρησιμοποιούνται μαθηματικά θεωρήματα –τα οποία υπάρχουν εν αφθονία– στη συλλογιστική διαδικασία. Επειδή τα σύμβολα και οι λέξεις είναι πράγματι ισοδύναμες έννοιες (μαρτυρία αυτού του γεγονότος είναι ότι τα σύμβολα ορίζονται συνήθως με λέξεις), δεν έχει μεγάλη σημασία ποιο από τα δύο επιλέγεται. Αλλά είναι ίσως πέραν κάθε αμφισβήτησης ότι τα σύμβολα είναι πιο εύχρηστα για την εξαγωγή συμπερασμάτων και βέβαια πιο αποτελεσματικά για τη σαφήνεια και την ακρίβεια της διατύπωσης.

Η επιλογή μεταξύ της «φιλολογικής» (λεκτικής) λογικής και της μαθηματικής λογικής, λοιπόν, είναι ένα ζήτημα μικρής σπουδαιότητας, αλλά τα μαθηματικά έχουν το πλεονέκτημα να αναγκάζουν τους αναλυτές να διατυπώνουν καθαρά τις υποθέσεις τους σε κάθε στάδιο του συλλογισμού. Αυτό συμβαίνει επειδή τα μαθηματικά θεωρήματα διατυπώνονται συνήθως στη μορφή «αν-τότε», οπότε για να προκύψει το «τότε» (αποτέλεσμα) του θεωρήματος, πρέπει πρώτα να βεβαιωθούν ότι το «αν» (συνθήκη) συμφωνεί με τις συγκεκριμένες υποθέσεις που έχουν υιοθετηθεί.

Δεχόμενος αυτά τα σημεία, όμως, κάποιος μπορεί ακόμη να ρωτήσει γιατί είναι απαραίτητο να προχωρήσουμε πέραν των γεωμετρικών μεθόδων. Η απάντηση είναι ότι ενώ η γεωμετρική ανάλυση έχει το πλεονέκτημα ότι είναι εποπτική, υποφέρει από τον σοβαρό περιορισμό των διαστάσεων. Στη γραφική παρουσίαση των καμπυλών αδιαφορίας, για παράδειγμα, η συνήθης υπόθεση είναι ότι μόνο *δύο* αγαθά είναι διαθέσιμα στον καταναλωτή. Μια τέτοια απλουστευμένη υπόθεση δεν είναι ηθελημένα υιοθετημένη αλλά μας επιβάλλεται, διότι το έργο της σχεδίασης ενός τρισδιάστατου γραφήματος είναι αρκετά δύσκολο και η κατασκευή ενός τετρα- (ή μεγαλύτερου) διάστατου γραφήματος είναι φυσικά αδύνατη. Για να αντιμετωπίσουμε την πιο γενική περίπτωση των 3, 4 ή n αγαθών, πρέπει να καταφύγουμε στο πιο ευέλικτο εργαλείο των εξισώσεων. Αυτός ο λόγος αρκεί ως επαρκές κίνητρο για τη μελέτη των μαθηματικών μεθόδων πέραν της γεωμετρίας.

Εν συντομία, βλέπουμε ότι η μαθηματική προσέγγιση έχει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα: (1) Η «γλώσσα» που χρησιμοποιείται είναι πιο σαφής και ακριβής, (2) έχουμε μια πλειάδα μαθηματικών θεωρημάτων στη διάθεσή μας, (3) αναγκάζοντάς μας να διατυπώσουμε σαφώς όλες τις υποθέσεις μας ως προϋπόθεση για τη χρησιμοποίηση των μαθηματικών θεωρημάτων, μας προστατεύει από την παγίδα τού να υιοθετήσουμε άθελά μας ανεπιθύμητες περίπλοκες υποθέσεις και (4) μας επιτρέπει να χειριστούμε τη γενική περίπτωση n-μεταβλητών.

Έναντι αυτών των πλεονεκτημάτων ακούμε συχνά την κριτική ότι μια θεωρία που παράγεται μαθηματικά είναι αναπόφευκτα *μη ρεαλιστική*. Όμως, η κριτική αυτή δεν ευσταθεί. Στην πραγματικότητα, το επίθετο «μη ρεαλιστική» δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ούτε στην κριτική της οικονομικής θεωρίας γενικά, είτε η προσέγγιση είναι μαθηματική είτε όχι. Η θεωρία είναι από την ίδια τη φύση της μια αφαίρεση από την πραγματικότητα. Είναι μια επινόηση να ξεχωρίζει μόνο τους πιο ουσιώδεις παράγοντες και τις σχέσεις, έτσι ώστε να μπορούμε να μελετήσουμε την ουσία του προβλήματος που έχουμε, ελεύθεροι από τις τόσες περιπλοκές οι οποίες υπάρχουν στον πραγματικό κόσμο. Έτσι, η πρόταση «η θεωρία στερείται ρεαλισμού» είναι απλά και μόνο μια κοινοτοπία, η οποία δεν μπορεί να γίνει δεκτή ως έγκυρη κριτική της θεωρίας. Οπότε προκύπτει λογικά ότι είναι σαφέστατα χωρίς νόημα να πούμε ότι μια οποιαδήποτε προσέγγιση στη θεωρία είναι «μη ρεαλιστική». Για παράδειγμα, η θεωρία της επιχείρησης σε καθεστώς αμιγούς ανταγωνισμού είναι μη ρεαλιστική, όπως είναι και η θεωρία της επιχείρησης υπό ατελή ανταγωνισμό, αλλά αν οι θεωρίες αυτές παρήχθησαν μαθηματικά ή όχι, είναι άσχετο και ανούσιο.

Για να αξιοποιήσουμε τον πλούτο των μαθηματικών εργαλείων, πρέπει, φυσικά, πρώτα να εξοικειωθούμε με αυτά. Δυστυχώς, τα εργαλεία που έχουν ενδιαφέρον για τους οικονομολόγους είναι διασκορπισμένα σε διαφορετικές μαθηματικές ενότητες – που είναι πολλές για να ταιριάξουν ακριβώς σ' ένα τυπικό πρόγραμμα οικονομικών σπουδών. Το πλεονέκτημα αυτού του τόμου είναι ότι συνενώνει εκείνες τις μαθηματικές μεθόδους που συναντώνται πιο συχνά στην οικονομική βιβλιογραφία, τις οργανώνει με μια λογική σειρά, τις επεξηγεί πλήρως και δείχνει πώς αυτές οι μέθοδοι εφαρμόζονται στην οικονομική ανάλυση. Συνδέοντας τις μεθόδους με τις εφαρμογές τους, η σχέση μαθηματικών και οικονομίας γίνεται περισσότερο εμφανής από ό,τι στα συνήθη μαθήματα μαθηματικών όπου παραδοσιακά οι εφαρμογές προέρχονται από τη φυσική ή τη μηχανολογία. Εξοικείωση με το περιεχόμενο αυτού του βιβλίου θα σας βοηθήσει να κατανοείτε τα πιο πολλά άρθρα που θα συναντήσετε σε περιοδικά όπως τα *American Economic Review, Quarterly Journal of Economics, Journal of Political Economy, Review of Economics and Statistics* και *Economic Journal*. Εκείνοι από εσάς που, μέσω αυτής της διαδικασίας, θα αποκτήσουν ένα σοβαρό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά οικονομικά, μπορούν τότε να προχωρήσουν σε μια πιο αυστηρή και προχωρημένη μελέτη των μαθηματικών.

1.2 Μαθηματικά οικονομικά και οικονομετρία

Ο όρος «οικονομικά μαθηματικά» μερικές φορές συγχέεται με έναν συνδεόμενο όρο, την «οικονομετρία». Όπως το «μετρικό» μέρος του τελευταίου όρου συνεπάγεται ότι η οικονομετρία ασχολείται κυρίως με τη μέτρηση οικονομικών δεδομένων. Έτσι, έχει σχέση με τη μελέτη *εμπειρικών* παρατηρήσεων χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους εκτίμησης και ελέγχου των υποθέσεων. Τα μαθηματικά οικονομικά, από την άλλη, αναφέρονται στην εφαρμογή των μαθηματικών στις καθαρά *θεωρητικές* όψεις της οικονομικής ανάλυσης, επιδεικνύοντας λίγο ή και καθόλου ενδιαφέρον για τέτοια στατιστικά προβλήματα όπως τα λάθη μέτρησης των υπό μελέτη μεταβλητών.

Στον παρόντα τόμο, θα περιοριστούμε στα μαθηματικά οικονομικά. Δηλαδή, θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην εφαρμογή των μαθηματικών στη συμπερασματική συλλογιστική αντί της επαγωγικής μελέτης και ως αποτέλεσμα θα ασχοληθούμε πρωταρχικά με θεωρητικό αντί για εμπειρικό υλικό. Αυτό είναι, βέβαια, αποκλειστικά ζήτημα επιλογής και με κανένα τρόπο δεν συνεπάγεται ότι η οικονομετρία είναι λιγότερο σημαντική.

Πράγματι, εμπειρικές μελέτες και θεωρητικές αναλύσεις είναι συχνά συμπληρωματικές και αμοιβαία ενισχυόμενες. Από τη μια μεριά, οι θεωρίες πρέπει να ελέγχονται από τα εμπειρικά δεδομένα ως προς την εγκυρότητα πριν εφαρμοστούν με βεβαιότητα. Από την άλλη, η στατιστική δουλειά χρειάζεται την οικονομική θεωρία ως οδηγό, για να προσδιοριστεί η πλέον σωστή και καρποφόρα κατεύθυνση της έρευνας.

Υπό μια έννοια, όμως, τα μαθηματικά οικονομικά μπορεί να θεωρηθούν ως το πιο βασικό από τα δύο: διότι, για να έχουμε μια σημαντική στατιστική και οικονομετρική μελέτη, είναι απαραίτητο ένα καλό θεωρητικό πλαίσιο – κατά προτίμηση με μια μαθηματική διατύπωση. Έτσι, το αντικείμενο του παρόντος τόμου θα πρέπει να είναι χρήσιμο όχι μόνο γι' αυτούς που ενδιαφέρονται για τα θεωρητικά οικονομικά, αλλά και γι' αυτούς που αναζητούν τις βάσεις των οικονομετρικών σπουδών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Όπως ανεφέρθη προηγουμένως, κάθε οικονομική θεωρία έχει απαραίτητα το στοιχείο της αφαίρεσης από την πραγματικότητα. Η τεράστια πολυπλοκότητα της πραγματικής οικονομίας καθιστά αδύνατο σε μας να κατανοήσουμε όλες τις αλληλεξαρτήσεις μονομιάς, όπως και το ότι όλες αυτές οι αλληλεξαρτήσεις έχουν την ίδια σημασία για την κατανόηση του υπό μελέτη οικονομικού φαινομένου. Έτσι, η λογική διαδικασία είναι να διαλέξουμε τους παράγοντες και τις σχέσεις που σχετίζονται με το πρόβλημά μας και να συγκεντρώσουμε εκεί την προσοχή μας. Κάθε τέτοιο «εσκεμμένα απλοποιημένο» αναλυτικό πλαίσιο ονομάζεται *οικονομικό υπόδειγμα*, επειδή είναι μόνο μια «χοντρική» αναπαράσταση της πραγματικής οικονομίας.

2.1 Συστατικά ενός μαθηματικού υποδείγματος

Ένα οικονομικό υπόδειγμα είναι απλά και μόνον ένα θεωρητικό πλαίσιο, και δεν υπάρχει ειδικός λόγος να είναι μαθηματικό. Όμως, αν το υπόδειγμα *είναι* μαθηματικό, τότε απαρτίζεται συνήθως από ένα σύνολο *εξισώσεων*, οι οποίες περιγράφουν τη διάρθρωση του υποδείγματος. Σχετίζοντας ένα συγκεκριμένο αριθμό *μεταβλητών* μεταξύ τους, με ένα δεδομένο τρόπο, οι εξισώσεις αυτές δίνουν μαθηματική μορφή στο σύνολο των αναλυτικών υποθέσεων. Ύστερα, εφαρμόζοντας τις σχετικές μαθηματικές πράξεις στις εξισώσεις αυτές, μπορούμε να εξαγάγουμε ένα σύνολο συμπερασμάτων που προκύπτουν λογικά από αυτές τις υποθέσεις.

Μεταβλητές, σταθερές και παράμετροι

Μια *μεταβλητή* είναι κάτι που το μέγεθός του μπορεί να μεταβληθεί, δηλαδή κάτι που μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές. Μεταβλητές που συχνά χρησιμοποιούνται στην οικονομία είναι η τιμή, το κέρδος, το έσοδο, το κόστος, το εθνικό εισόδημα, η κατανάλωση, η επένδυση, οι εισαγωγές, οι εξαγωγές κ.ο.κ. Επειδή κάθε μεταβλητή μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές, πρέπει να παριστάνεται από ένα σύμβολο αντί από ένα συγκεκριμένο αριθμό. Για παράδειγμα, μπορούμε να συμβολίζουμε την τιμή με P, το κόστος με C, το εθνικό εισόδημα με Y, το κέρδος με π, το έσοδο με R, και ούτω καθεξής. Όμως, όταν γράφουμε $P = 3$ ή $C = 18$, «παγώνουμε» αυτές τις μεταβλητές στις συγκεκριμένες τιμές (σε κατάλληλα επιλεγμένες μονάδες μέτρησης).

Ένα οικονομικό υπόδειγμα που είναι σωστά κατασκευασμένο, μπορεί να επιλυθεί και να μας δώσει τις *λύσεις* ενός συγκεκριμένου συνόλου μεταβλητών, όπως το επίπεδο της τιμής ισορροπίας ή το επίπεδο παραγωγής που εξασφαλίζει το μέγιστο κέρδος. Μεταβλητές, των οποίων οι τιμές υπολογίζονται από το υπόδειγμα, είναι γνωστές ως *ενδογενείς μεταβλητές* (προερχόμενες από μέσα). Όμως, το υπόδειγμα μπορεί να περιέχει και μεταβλητές που υποτίθεται ότι προσδιορίζονται από δυνάμεις εκτός υποδείγματος, και των οποίων τα μεγέθη αποδεχόμαστε ως δεδομένα. Τέτοιες μεταβλητές καλούνται *εξωγενείς μεταβλητές* (προέρχονται από έξω). Πρέπει να σημειωθεί ότι μια μεταβλητή που είναι ενδογενής για ένα υπόδειγμα, μπορεί κάλλιστα να είναι εξωγενής για κάποιο άλλο. Για παράδειγμα, σε μια ανάλυση της αγοράς για τον προσδιορισμό της τιμής του σταριού (P), η μεταβλητή P πρέπει υποχρεωτικά να είναι ενδογενής. Αλλά στο πλαίσιο μιας θεωρίας δαπάνης του καταναλωτή, η P θα γίνεται ένα δεδομένο για τον καταναλωτή, κι έτσι πρέπει να θεωρηθεί εξωγενής.

Οι μεταβλητές συχνά εμφανίζονται σε συνδυασμό με αριθμούς ή σταθερές, όπως στις εκφράσεις $7P$ ή $0{,}5R$. Αντίθετα με την έννοια της μεταβλητής, μια *σταθερά* είναι ένα μέγεθος που δεν μεταβάλλεται. Όταν μια σταθερά τοποθετείται δίπλα σε μια μεταβλητή, τότε καλείται *συντελεστής* αυτής της μεταβλητής. Όμως, ένας συντελεστής μπορεί να είναι και σύμβολο αντί αριθμός. Μπορούμε, για παράδειγμα, να υποθέσουμε ότι το σύμβολο a είναι μια δεδομένη σταθερά και να χρησιμοποιούμε την έκφραση aP στη θέση του $7P$ σ' ένα υπόδειγμα, για να έχουμε ένα υψηλότερο επίπεδο γενικότητας (βλέπε Παρ. 2.7). Αυτό το σύμβολο a είναι μια μάλλον ιδιόρρυθμη περίπτωση – υποτίθεται ότι παριστάνει μια δεδομένη σταθερά, όμως, επειδή δεν της έχει δοθεί ένας συγκεκριμένος αριθμός σαν τιμή, μπορεί κάλλιστα να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Εν ολίγοις, είναι μια *σταθερά*, που είναι *μεταβλητή*! Σαν αναγνώριση αυτής της ειδικής κατάστασης, της δίνουμε το όνομα *παραμετρική σταθερά* (ή απλά *παράμετρος*).

Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι, μολονότι μπορούν να δοθούν διαφορετικές τιμές σε μια παράμετρο, αυτή έτσι και αλλιώς θεωρείται ως δεδομένο του υποδείγματος. Αυτή είναι βασικά η αιτία που μερικές φορές λέμε «σταθερά» ακόμα και όταν πρόκειται για παράμετρο. Με αυτή την έννοια, οι παράμετροι μοιάζουν πολύ με εξωγενείς μεταβλητές, διότι και οι δύο θεωρούνται «δεδομένα» ενός υποδείγματος. Αυτό εξηγεί γιατί πολλοί συγγραφείς αναφέρονται, για ευκολία, και στις δύο ως «παραμέτρους».

Ως προς το συμβολισμό, οι παραμετρικές σταθερές συνήθως παρίστανται από τα σύμβολα a, b, c ή από τα αντίστοιχα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου α, β, γ. Αλλά φυσικά μπορεί να χρησιμοποιούνται και άλλα σύμβολα. Όσο για τις εξωγενείς μεταβλητές, στην προσπάθεια να τις ξεχωρίσουμε, τουλάχιστον οπτικά, από τις ξαδέλφες τους τις ενδογενείς, θα χρησιμοποιούμε την πρακτική να θέτουμε το δείκτη 0 στο δοθέν σύμβολο. Για παράδειγμα, αν P συμβολίζει την τιμή, τότε η P_0 θα παριστάνει μια εξωγενώς προσδιοριζόμενη τιμή.

Εξισώσεις και ταυτότητες

Οι μεταβλητές μπορεί να υπάρχουν ανεξάρτητα η μία από την άλλη, αλλά παρουσιάζουν ενδιαφέρον όταν σχετίζονται η μία με την άλλη μέσω εξισώσεων ή ανισώσεων. Σ' αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε μόνο τις εξισώσεις.

Στις οικονομικές εφαρμογές ξεχωρίζουμε τρεις τύπους εξισώσεων: εξισώσεις ορισμού, εξισώσεις συμπεριφοράς και εξισώσεις συνθηκών.

Μια *εξίσωση ορισμού* είναι μια ταυτότητα μεταξύ δύο εναλλακτικών εκφράσεων, οι οποίες έχουν ακριβώς την ίδια σημασία. Για μια τέτοια εξίσωση, το σύμβολο της ταυτότητας-ισότητας $\equiv$ (το οποίο διαβάζεται: «είναι ταυτοτικά ίσο με») χρησιμοποιείται συχνά στη θέση του κανονικού συμβόλου της ισότητας $=$, μολονότι το τελευταίο είναι επίσης αποδεκτό. Για παράδειγμα, το συνολικό κέρδος ορίζεται ως η διαφορά των συνολικών εσόδων και του συνολικού κόστους. Έτσι λοιπόν γράφουμε

$$\pi \equiv R - C$$

Μια *εξίσωση συμπεριφοράς*, εξάλλου, προσδιορίζει τον τρόπο με τον οποίο μια μεταβλητή ανταποκρίνεται σε μεταβολές άλλων μεταβλητών. Αυτό μπορεί να περιλαμβάνει είτε ανθρώπινη συμπεριφορά (όπως η συνολική κατανάλωση σε σχέση με το εθνικό εισόδημα) ή μη ανθρώπινη συμπεριφορά (όπως κατά ποιον τρόπο το συνολικό κόστος μιας επιχείρησης αντιδρά σε μεταβολές του προϊόντος). Γενικά, οι εξισώσεις συμπεριφοράς μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή της γενικής διάρθρωσης ενός υποδείγματος, συμπεριλαμβανομένων των τεχνολογικών (π.χ. συνάρτηση παραγωγής) και των νομικών θεμάτων (π.χ. φορολογικό πλαίσιο). Όμως, πριν γραφτεί μια εξίσωση συμπεριφοράς, είναι πάντα απαραίτητο να δεχθούμε ορισμένες υποθέσεις σχετικά με τη συμπεριφορά της δεδομένης μεταβλητής. Ας θεωρήσουμε τις δύο συναρτήσεις κόστους

$$C = 75 + 10Q \tag{2.1}$$

$$C = 110 + Q^2 \tag{2.2}$$

όπου το Q συμβολίζει την ποσότητα του προϊόντος. Επειδή οι δύο αυτές εξισώσεις έχουν διαφορετική μορφή, η υποτιθέμενη συνθήκη παραγωγής σε καθεμιά από αυτές είναι προφανώς διαφορετική από την άλλη. Στη (2.1), το σταθερό κόστος (η τιμή της C όταν $Q = 0$) είναι 75, ενώ στη (2.2) είναι 110. Η μεταβολή του κόστους είναι επίσης διαφορετική. Στη (2.1), για κάθε μονάδα αύξησης της Q, η C αυξάνεται σταθερά κατά 10 μονάδες. Όμως στη (2.2), καθώς η Q αυξάνει ανά μία μονάδα, η C θα αυξηθεί με σταδιακά μεγαλύτερα ποσά. Είναι προφανές ότι μέσω της χρήσης ειδικών μορφών των εξισώσεων συμπεριφοράς μπορούμε να δώσουμε μαθηματική έκφραση στις υποθέσεις που υιοθετούμε για ένα υπόδειγμα.

Ο τρίτος τύπος, οι *εξισώσεις συνθηκών* χρησιμοποιούνται όταν ζητάμε να ικανοποιείται μία συνθήκη. Παραδείγματος χάριν, αν ένα υπόδειγμα εμπλέκει την έννοια της ισορροπίας, τότε πρέπει να χρησιμοποιηθούν *συνθήκες ισορροπίας* που περιγράφουν τις προϋποθέσεις για την επίτευξη της ισορροπίας. Δύο από τις πιο γνωστές συνθήκες ισορροπίας στα οικονομικά είναι

$$Q_d = Q_s \quad [\text{ζητούμενη ποσότητα} = \text{προσφερόμενη ποσότητα}]$$

$$\text{και} \qquad S = I \quad [\text{προσδοκώμενη αποταμίευση} = \text{προσδοκώμενη επένδυση}]$$

που αναφέρονται στην ισορροπία ενός υποδείγματος αγοράς και στην ισορροπία ενός απλού υποδείγματος εθνικού εισοδήματος, αντίστοιχα. Ομοίως, ένα υπόδειγμα βελτιστοποίησης παράγει ή χρησιμοποιεί μία ή περισσότερες *συνθήκες βελτιστοποίησης*. Μια τέτοια συνθήκη που έρχεται εύκολα στο νου είναι η

$$\mathrm{MC} = \mathrm{MR} \quad [\text{οριακό κόστος} = \text{οριακό έσοδο}]$$

από τη θεωρία της επιχείρησης. Επειδή εξισώσεις αυτού του τύπου δεν είναι ούτε ορισμού ούτε συμπεριφοράς, αποτελούν μια δική τους κατηγορία.

2.2 Το σύστημα των πραγματικών αριθμών

Εξισώσεις και μεταβλητές είναι τα απαραίτητα συστατικά ενός μαθηματικού υποδείγματος. Αλλά επειδή οι τιμές που παίρνει μια οικονομική μεταβλητή είναι συνήθως αριθμητικές, θα πρέπει να ειπωθούν μερικά πράγματα για το σύστημα των αριθμών. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με τους λεγόμενους «πραγματικούς αριθμούς».

«Ολόκληροι» αριθμοί όπως οι $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ καλούνται *θετικοί ακέραιοι*. Αυτοί είναι οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται συχνά στη μέτρηση. Οι αντίστοιχοι αρνητικοί -1, -2, -3, ... καλούνται *αρνητικοί ακέραιοι*. Αυτοί, για παράδειγμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μας δείξουν θερμοκρασίες κάτω από το μηδέν (σε βαθμούς Κελσίου). Ο αριθμός 0 (μηδέν), ωστόσο, δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός, και με αυτή τη λογική είναι μοναδικός. Θα βάλουμε λοιπόν τους θετικούς, τους αρνητικούς ακέραιους και το μηδέν σε μια κατηγορία και θα τους καλούμε το *σύνολο όλων των ακεραίων*.

Οι ακέραιοι, βέβαια, δεν εξαντλούν όλους τους πιθανούς αριθμούς, κι αυτό διότι έχουμε τα *κλάσματα*, όπως $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ και $\frac{7}{3}$, τα οποία, αν θα τα βάλουμε σ' έναν χάρακα, θα βρεθούν μεταξύ των ακεραίων. Επίσης, έχουμε αρνητικά κλάσματα, όπως $-\frac{1}{2}$ και $-\frac{2}{5}$. Αυτά τα δύο μαζί μάς φτιάχνουν το *σύνολο των κλασμάτων*.

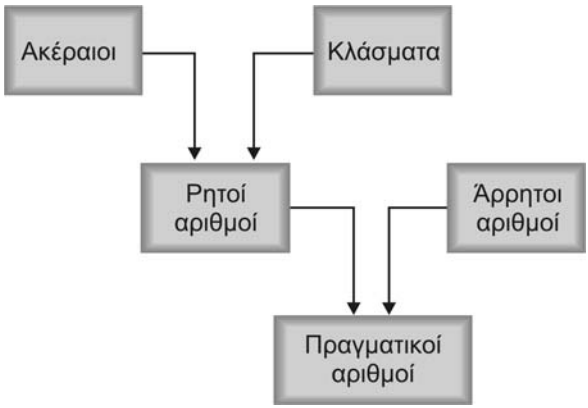
Η κοινή ιδιότητα όλων των κλασματικών αριθμών είναι ότι εκφράζονται ως το πηλίκο δύο ακεραίων. Έτσι τα κλάσματα αναφέρονται ως *ρητοί αριθμοί*. Αλλά και οι ακέραιοι είναι επίσης ρητοί, επειδή κάθε ακέραιος n μπορεί να θεωρηθεί ως το πηλίκο $n/1$. Το σύνολο των ακεραίων και των κλασμάτων μαζί φτιάχνουν το *σύνολο των ρητών αριθμών*. Μια άλλη χαρακτηριστική ιδιότητα των ρητών αριθμών είναι ότι μπορούν να εκφραστούν είτε σαν πεπερασμένοι δεκαδικοί (π.χ. $\frac{1}{4} = 0{,}25$) είτε σαν περιοδικοί άπειροι δεκαδικοί (π.χ. $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$), όπου κάποιοι αριθμοί ή σειρές αριθμών στα δεξιά της υποδιαστολής επαναλαμβάνονται επ' άπειρον.

Από τη στιγμή που έχουμε ορίσει τους ρητούς αριθμούς, προκύπτει, με φυσικό τρόπο, και η έννοια των *άρρητων αριθμών* – των αριθμών εκείνων που *δεν μπορούν* να εκφραστούν ως λόγος δύο ακεραίων. Ένα παράδειγμα είναι ο αριθμός $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, ο οποίος είναι ένας μη περιοδικός, άπειρος δεκαδικός αριθμός. Ένας άλλος είναι η σταθερά $\pi = 3{,}1415\ldots$ (ο οποίος παριστάνει το πηλίκον του μήκους της περιφέρειας ενός κύκλου διά της διαμέτρου), ο οποίος και πάλι είναι ένας μη περιοδικός, άπειρος δεκαδικός, όπως άλλωστε είναι ένα χαρακτηριστικό όλων των άρρητων αριθμών.

Αν ένας άρρητος αριθμός τοποθετηθεί πάνω σ' έναν χάρακα, θα πέσει μεταξύ δύο ρητών, και όπως τα κλάσματα γεμίζουν τα κενά μεταξύ των ακεραίων, έτσι και οι άρρητοι γεμίζουν τα κενά μεταξύ των ρητών αριθμών. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας του «γεμίσματος» είναι ένα συνεχές αριθμών, το οποίο καλείται *σύνολο* των *πραγματικών αριθμών*, και συμβολίζεται με R. Όταν τα στοιχεία του συνόλου R τοποθετηθούν σε μια ευθεία γραμμή (έναν άπειρο χάρακα), ονομάζουμε αυτή τη γραμμή *ευθεία των πραγματικών αριθμών*.

Στο Σχ. 2.1 παραθέτουμε όλα τα αριθμοσύνολα, ανάλογα με τη μεταξύ τους σχέση. Διαβάζοντας αυτή τη σχέση από κάτω προς τα πάνω, βλέπουμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών έχει διασπαστεί στις συνιστώσες του και στις υποσυνιστώσες των αριθμοσυνόλων του. Έτσι, αυτό το σχήμα μάς δείχνει τη δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Οι πραγματικοί αριθμοί είναι αυτοί που θα χρειαστούμε για τα πρώτα 15 κεφάλαια αυτού του βιβλίου, αλλά δεν είναι μόνον αυτοί που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά. Στην πραγματικότητα, η αιτία για τον όρο «πραγματικοί» είναι ότι υπάρχουν επίσης και οι «φανταστικοί» αριθμοί, οι οποίοι έχουν να κάνουν με τις τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών. Αυτή η έννοια θα συζητηθεί αργότερα, στο Κεφ. 16.



ΣΧΗΜΑ 2.1

2.3 Η έννοια των συνόλων

Μέχρι τώρα έχουμε ήδη αναφέρει τη λέξη «σύνολο» αρκετές φορές. Λόγω του ότι αυτή η έννοια υπεισέρχεται σε κάθε περιοχή των μοντέρνων μαθηματικών, είναι επιθυμητό να εξοικειωθούμε τουλάχιστον με τις βασικότερες πλευρές της.

Συμβολισμός

Ένα *σύνολο* είναι απλώς μια συλλογή διακριτών αντικειμένων. Αυτά τα αντικείμενα μπορεί να είναι μια ομάδα αριθμών, ή κάτι άλλο. Έτσι, όλοι οι φοιτητές που παίρνουν κάποιο μάθημα οικονομικών μπορούν να θεωρηθούν ένα σύνολο, όπως και οι τρεις ακέραιοι 2, 3 και 4 μπορούν να φτιάξουν ένα σύνολο. Τα αντικείμενα ενός συνόλου καλούνται *στοιχεία* του συνόλου.

Βασικά υπάρχουν δύο τρόποι γραφής ενός συνόλου: με *αναγραφή* ή με *περιγραφή*. Αν S είναι το σύνολο των τριών αριθμών 2, 3, 4, μπορούμε να γράψουμε, αναγράφοντας τα στοιχεία του,

$$S = \{2, 3, 4\}$$

Αλλά αν με I συμβολίζουμε το σύνολο *όλων* των θετικών ακεραίων, η αναγραφή γίνεται μια εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία, και στην περίπτωση αυτή απλώς περιγράφουμε τα στοιχεία και γράφουμε

$$I = \{x \mid x \text{ ένας θετικός ακέραιος}\},$$

το οποίο διαβάζεται: «I είναι το σύνολο όλων των (αριθμών) x, έτσι ώστε x είναι ένας θετικός ακέραιος». Σημειωτέον ότι χρησιμοποιούνται αγκύλες για να περιγράψουμε το σύνολο. Στον περιγραφικό τρόπο, μια κατακόρυφη γραμμή (ή στήλη) παρεμβάλλεται για να διαχωρίσει το γενικό σύμβολο των στοιχείων από την περιγραφή των στοιχείων. Ένα άλλο παράδειγμα, το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών μεγαλύτερων του 2 αλλά μικρότερων του 5 (ας το ονομάσουμε J) μπορεί να εκφραστεί συμβολικά ως

$$J = \{x \mid 2 < x < 5\}$$

Εδώ, ακόμη και η περιγραφική πρόταση εκφράζεται συμβολικά.

Ένα σύνολο με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, για παράδειγμα το S, καλείται *πεπερασμένο* σύνολο. Τα σύνολα *I και J*, καθένα με άπειρο αριθμό στοιχείων, είναι και παραδείγματα *απείρων συνόλων*. Τα πεπερασμένα σύνολα είναι πάντα *αριθμήσιμα* (ή *μετρήσιμα*), δηλαδή τα στοιχεία τους μπορούν να μετρηθούν ένα προς ένα με την ακολουθία, $1, 2, 3, \ldots$. Όμως, ένα άπειρο σύνολο μπορεί να είναι είτε αριθμήσιμο (το σύνολο I), είτε *μη αριθμήσιμο* (το σύνολο J). Στην τελευταία περίπτωση, δεν υπάρχει τρόπος αντιστοιχίας μεταξύ των στοιχείων του συνόλου με τα στοιχεία του συνόλου των φυσικών $1, 2, 3, \ldots$, και έτσι το σύνολο είναι μη αριθμήσιμο.

Η έννοια του «ανήκει» σ' ένα σύνολο συμβολίζεται με το σύμβολο $\in$ (από το ελληνικό γράμμα ε για τη λέξη element (στοιχείο) και διαβάζεται: «είναι ένα στοιχείο τού»). Έτσι για δύο σύνολα S και I που ορίστηκαν παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε

$$2 \in S \qquad 3 \in S \qquad 8 \in I \qquad 9 \in I \quad (\text{κ.ο.κ.})$$

αλλά προφανώς $8 \notin S$ (διαβάζεται: «το 8 δεν είναι στοιχείο του συνόλου S»). Αν συμβολίζουμε με R το σύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε η πρόταση «το x είναι πραγματικός αριθμός» μπορεί να εκφραστεί ως

$$x \in R$$

Σχέσεις μεταξύ συνόλων

Όταν συγκρίνουμε δύο σύνολα μεταξύ τους, πολλά πιθανά είδη σχέσεων μπορούν να παρατηρηθούν. Αν δύο σύνολα S_1 και S_2 συμβαίνει να περιέχουν τα ίδια στοιχεία,

$$S_1 = \{2, 7, a, f\} \quad \text{και} \quad S_2 = \{2, a, 7, f\}$$

τότε τα S_1 και S_2 λέγονται *ίσα* ($S_1 = S_2$). Σημειωτέον ότι η διάταξη των στοιχείων ενός συνόλου δεν παίζει κανένα ρόλο. Όμως, ακόμα και ένα στοιχείο να είναι διαφορετικό, τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα.

Ένα άλλο είδος σχέσης είναι όταν ένα σύνολο μπορεί να είναι *υποσύνολο* ενός άλλου συνόλου. Αν έχουμε δύο σύνολα

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{και} \quad T = \{3, 7\}$$

τότε το T είναι ένα υποσύνολο του S, επειδή κάθε στοιχείο του T είναι και στοιχείο του S. Μια αυστηρότερη διατύπωση του παραπάνω είναι: το T είναι ένα υποσύνολο του S αν και μόνον αν το «$x \in T$» συνεπάγεται «$x \in S$». Χρησιμοποιώντας το σύμβολο της έγκλεισης $\subset$ (περιέχεται) και $\supset$ (περιέχει), μπορούμε τότε να γράψουμε

$$T \subset S \quad \text{ή} \quad S \supset T$$

Είναι πιθανόν δύο σύνολα να είναι υποσύνολα το ένα του άλλου. Όμως, όταν αυτό συμβαίνει, είμαστε σίγουροι ότι τα δύο αυτά σύνολα είναι ίσα. Πιο αυστηρά: έχουμε $S_1 \subset S_2$ και $S_2 \subset S_1$ αν και μόνον αν $S_1 = S_2$.

Αν παρατηρήσουμε ότι, ενώ το σύμβολο $\in$ σχετίζει ένα *στοιχείο* με ένα *σύνολο*, το σύμβολο $\subset$ σχετίζει ένα *υποσύνολο* με ένα *σύνολο*. Ως εφαρμογή αυτής της ιδέας, μπορούμε να πούμε με βάση το Σχ. 2.1 ότι το σύνολο των ακεραίων είναι ένα υποσύνολο των ρητών αριθμών. Ομοίως, το σύνολο των ρητών αριθμών είναι ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Πόσα υποσύνολα μπορούν να σχηματιστούν από τα πέντε στοιχεία του συνόλου $S = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$; Πρώτα απ' όλα, κάθε στοιχείο του S μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υποσύνολο του S, όπως $\{1\}$, $\{3\}$ κ.ο.κ. Αλλά το ίδιο ισχύει και για κάθε ζεύγος, τριάδα ή τετράδα αυτών των στοιχείων, όπως $\{1, 3\}, \{1, 5\}, \ldots, \{3, 7, 9\}$, κ.ο.κ. Για τον ίδιο λόγο, το ίδιο το σύνολο S (με τα πέντε στοιχεία του) μπορεί να θεωρηθεί ως ένα από τα δικά του υποσύνολα – κάθε στοιχείο του S είναι στοιχείο του S, και έτσι το S πληροί τον ορισμό του υποσυνόλου. Βέβαια, αυτό είναι μια οριακή περίπτωση, από την οποία παίρνουμε το «μεγαλύτερο» δυνατό υποσύνολο του S, δηλαδή το ίδιο το S.

Στο άλλο άκρο, το «μικρότερο» δυνατό υποσύνολο του S είναι ένα σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Ένα τέτοιο σύνολο καλείται *κενό* σύνολο και συμβολίζεται με $\varnothing$ ή $\{\}$. Η αιτία της θεώρησης του κενού συνόλου ως υποσυνόλου του S είναι πάρα πολύ ενδιαφέρουσα: Αν το κενό σύνολο δεν είναι υποσύνολο του S ($\varnothing \not\subset S$), τότε το $\varnothing$ πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο x, έτσι ώστε $x \notin S$. Αλλά επειδή εξ ορισμού το κενό σύνολο δεν περιέχει κανένα στοιχείο, δεν μπορούμε να πούμε ότι $\varnothing \not\subset S$. Έτσι, το κενό σύνολο είναι υποσύνολο του S.

Είναι πολύ σημαντικό να διακρίνουμε τα σύμβολα $\varnothing$ ή $\{\}$ από το $\{0\}$. Το πρώτο δεν έχει καθόλου στοιχεία, αλλά το δεύτερο περιέχει ένα στοιχείο, το μηδέν. Το κενό σύνολο είναι μοναδικό. Υπάρχει μόνον ένα τέτοιο σύνολο, και είναι υποσύνολο *κάθε* συνόλου.

Υπολογίζοντας όλα τα υποσύνολα του S, περιλαμβανομένων των δύο οριακών περιπτώσεων S και $\varnothing$, βρίσκουμε ένα σύνολο $2^5 = 32$ υποσυνόλων. Γενικά, αν ένα σύνολο έχει n στοιχεία, τότε μπορεί να σχηματιστούν 2^n υποσύνολα.[1]

---

1. Δεδομένου ενός συνόλου με n στοιχεία $\{a, b, c, \ldots, n\}$, μπορούμε πρώτα να τα-

Σαν μια τρίτη πιθανή μορφή σχέσης, δύο σύνολα μπορεί να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Σ' αυτήν την περίπτωση, τα δύο αυτά σύνολα καλούνται *ξένα μεταξύ τους*. Για παράδειγμα, τα σύνολα των θετικών ακεραίων και των αρνητικών ακεραίων είναι ξένα μεταξύ τους. Μια τέταρτη μορφή σχέσης εμφανίζεται όταν δύο σύνολα έχουν μερικά κοινά στοιχεία, αλλά και κάποια που είναι ιδιαίτερα στο καθένα. Στην περίπτωση αυτή, τα δύο σύνολα δεν είναι ούτε ίσα ούτε ξένα˙ επίσης, κανένα δεν είναι υποσύνολο του άλλου.

Πράξεις μεταξύ συνόλων

Όταν προσθέτουμε, αφαιρούμε, πολλαπλασιάζουμε, διαιρούμε ή υπολογίζουμε την τετραγωνική ρίζα αριθμών, εκτελούμε μαθηματικές πράξεις. Τα σύνολα είναι διαφορετικά από τους αριθμούς, αλλά πάλι μπορούμε να εκτελούμε μαθηματικές πράξεις μ' αυτά. Οι βασικές πράξεις που θα συζητηθούν εδώ είναι η ένωση, η τομή και το συμπλήρωμα των συνόλων.

Για να έχουμε την *ένωση* δύο συνόλων A και B, σχηματίζουμε ένα νέο σύνολο με εκείνα τα στοιχεία (και μόνον εκείνα) τα οποία ανήκουν στο A, ή στο B, ή και στο A και στο B. Η ένωση των A και B συμβολίζεται με $A \cup B$ (και διαβάζεται: «A ένωση B»).

Παράδειγμα 1 Αν $A = \{3, 5, 7\}$ και $B = \{2, 3, 4, 8\}$, τότε

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$$

Αυτό το παράδειγμα δείχνει την περίπτωση όπου τα δύο σύνολα A και B δεν είναι ούτε ίσα ούτε ξένα και ούτε το ένα είναι υποσύνολο του άλλου.

Παράδειγμα 2 Παραπέμποντας ξανά στο Σχ. 2.1, βλέπουμε ότι η ένωση του συνόλου των ακεραίων και του συνόλου των κλασμάτων είναι το σύνολο των ρητών αριθμών. Ομοίως, η ένωση του συνόλου των ρητών και του συνόλου των αρρήτων μάς δίνει το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

ξινομήσουμε τα υποσύνολά του σε δύο κατηγορίες: Μία με το στοιχείο a και μία χωρίς το a. Καθεμιά από αυτές τις δύο μπορεί ακόμη να ταξινομηθεί σε δύο υποκατηγορίες: μία με το στοιχείο b και μία χωρίς αυτό. Ας σημειωθεί ότι αν θεωρήσουμε το δεύτερο στοιχείο b, διπλασιάζουμε τον αριθμό των κατηγοριών στην ταξινόμηση από 2 σε 4 $(= 2^2)$. Ομοίως, η θεώρηση του στοιχείου c θα αυξήσει τον συνολικό αριθμό των κατηγοριών σε 8 $(= 2^3)$. Όταν ληφθούν υπόψη όλα τα n στοιχεία, ο συνολικός αριθμός των κατηγοριών θα είναι ο συνολικός αριθμός των υποσυνόλων, και αυτός είναι 2^n.