

πως ο όγκος της επένδυσης μεταβάλλεται ευθέως με το επίπεδο του εθνικού εισοδήματος και αντιστρόφως με το ήδη υπάρχον απόθεμα κεφαλαίου. Έτσι μια γραμμική έκφραση της αρχής αυτής, που ενσωματώνει τις προσδοκίες, μπορεί να δοθεί με τη μορφή

$$I_t = \alpha Y_t^E - bK_t \quad (2.3.9)$$

όπου τα σύμβολα έχουν προφανή σημασία. Ο φοιτητής θα πρέπει να αναρωτηθεί αν κάποια από τις παραπάνω αρχές είναι «ορθολογική» για τον ιδιώτη επιχειρηματία.

Μια εναλλακτική προσέγγιση στην ανάλυση του προσδιορισμού του επιπέδου της αθροισμένης επένδυσης απορρέει από την ιδέα της *παρούσας αξίας* που επανεξετάστηκε στην ενότητα 2.2 (β). Ο φοιτητής πρέπει να εξοικειωθεί με την ιδέα ότι τόσο η προσέγγιση αυτή, η οποία λέει ότι οι ατομικές επενδύσεις πραγματοποιούνται εάν η παρούσα αξία τους ξεπερνά το παρόν κόστος τους, όσο και η εναλλακτική προσέγγιση του *εσωτερικού ρυθμού απόδοσης*, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το επίπεδο της συνολικής καθαρής επένδυσης θα είναι συνάρτηση του επιτοκίου¹⁴ και ότι έτσι οι προσδοκίες θα έχουν και πάλι να διαδραματίσουν έναν κρίσιμο ρόλο. Εφόσον η προσέγγιση αυτή δεν έχει ιδιαίτερη σπουδαιότητα για κανένα από τα μοντέλα μεγέθυνσης που αναλύουμε, δεν πρόκειται να εξετάσουμε τις λεπτομέρειες. Ωστόσο, μπορούμε να συζητήσουμε τους τρόπους, με τους οποίους η εισαγωγή μιας τέτοιας συνάρτησης επένδυσης μπορεί να μεταβάλλει τα συμπεράσματα των αναλύσεών μας.

2.4 Η τεχνολογία της οικονομίας

Είναι φανερό ότι η ποσότητα του προϊόντος που παράγεται από οποιαδήποτε οικονομία, περιορίζεται από τα διαθέσιμα αποθέματα κεφαλαίου και εργασίας¹⁵. Φαίνεται δύσκολο να αρνηθεί κανείς τον εντυπωσιακό ισχυρισμό του Samuelson:

«Μέχρι να ανακληθούν οι νόμοι της θερμοδυναμικής, θα συνεχίσω να συσχετίζω τις εκροές με τις εισροές» ((223) σ. 444).

Αυτό το είδος της σχέσης συνοψίζεται συχνά σε μια *αθροιστική συνάρτηση παραγωγής*

$$Y = F(K, L) \quad (2.4.1)$$

η οποία λέει ότι το συνολικό προϊόν, Y , είναι συνάρτηση των ποσοτήτων του

¹⁴ Βλέπε, για παράδειγμα, Brooman (29), Κεφ. 7, Junankar (123) ή, σε ανώτερο επίπεδο, Lund (167).

¹⁵ Βλέπε Samuelson (227) Κεφ. 2. Για λεπτομερή μαθηματική εξέταση των περισσότερων θεμάτων, βλέπε Allen (7) Κεφ. 3.

κεφαλαίου, K , και της εργασίας, L , στην οικονομία. Παρακολουθώντας τη συζήτηση των δυσκολιών που συνδέονται με τις αθροιστικές μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην (2.4.1) και την αντίστοιχη διαμάχη, οι αναγνώστες δεν θα εκπλαγούν εάν μάθουν ότι η χρήση μιας αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής, κυρίως σε μερικές από τις εξειδικευμένες μορφές που εξετάζονται παρακάτω, είναι ιδιαίτερα διαφιλονικούμενη.

Η συνάρτηση παραγωγής (2.4.1) ερμηνεύεται συνήθως ως δεικνύουσα τη μέγιστη ροή του προϊόντος που συνδέεται με τα δεδομένα ποσά κεφαλαίου και εργασίας. Τα K και L ερμηνεύονται μερικές φορές ως αποθέματα και άλλοτε ως ροές του κεφαλαίου και των υπηρεσιών εργασίας αντίστοιχα. Συχνά απαιτείται προσεκτική ανάγνωση ώστε να εξακριβωθεί ποια ερμηνεία χρησιμοποιήθηκε σε κάθε δεδομένο πλαίσιο. Μας ενδιαφέρουν δύο μορφές της γενικής αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής (2.4.1): η *μορφή σταθερών συντελεστών* και η *συνεχής μορφή*.

(α) Σταθεροί συντελεστές

Αυτή η απλή μορφή της σχέσης της αθροισμένης παραγωγής εμφανίζει το προϊόν, Y , προσδιορισμένο ευθέως ανάλογα από τις ποσότητες του κεφαλαίου και της εργασίας. Έτσι, $Y = K/v$ ή L/u όπου τα v και u είναι σταθερές. Διαφορετικές ερμηνείες μπορούν να δοθούν σ' αυτούς τους σταθερούς συντελεστές, και ορισμένες συζητούνται στην ενότητα 3.6. Αυτή η μορφή της σχέσης παραγωγής υπονοεί βασικά ότι, δεδομένου του συγκεκριμένου αποθέματος κεφαλαίου, υπάρχει μία και μόνο μία ροή προϊόντος που μπορεί να παραχθεί —και ομοίως για κάθε δεδομένο απόθεμα εργασίας. Η πραγματική συνάρτηση παραγωγής παίρνει τη μορφή:

$$Y = \min \left[\frac{K}{v}, \frac{L}{u} \right] \quad (2.4.2)$$

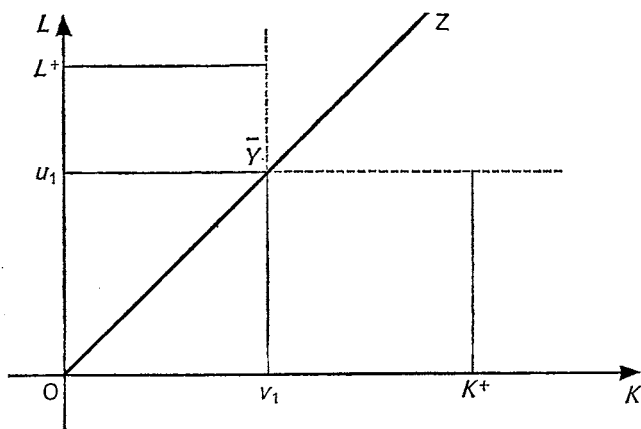
Αν πούμε, για παράδειγμα, ότι το L/u είναι το ελάχιστον της (2.4.2), τότε το Y προσδιορίζεται από το L/u και το αναγκαίο κεφάλαιο από το vY . Αυτό υποδηλώνει φυσικά ότι η διατύπωση (2.4.2) επιτρέπει είτε το κεφάλαιο είτε η εργασία να παραμείνουν *αχρησιμοποίητα*. Αυτή η μορφή τεχνολογίας υπονοεί ότι δεν υπάρχει *καμιά υποκατάσταση* μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας στην παραγωγή του προϊόντος. Δεδομένης μιας κάποιας ποσότητας του K , μία και μόνο μία ροή του Y μπορεί να παραχθεί, οσηδήποτε περισσότερη εργασία κι αν είναι διαθέσιμη. Αυτή η μορφή της συνάρτησης συνολικής παραγωγής μπορεί να δοθεί γραφικά όπως στο Σχήμα 2.2, όπου το σημείο \bar{Y} παριστά τον ένα και μοναδικό συνδυασμό των K και L που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραχθεί μια δεδομένη ποσότητα του προϊόντος \bar{Y} . Εάν διαθέτουμε περισσότερη εργασία, ας πούμε L^+ , τότε η ποσότητα $u_1 L^+$ είναι πλεονάζουσα και θα παραμείνει αχρησιμοποίητη. Ομοίως, εάν είναι διαθέσιμο περισσότερο κεφάλαιο, ας πούμε K^+ , τότε η ποσότητα $v_1 K^+$ του κεφαλαίου είναι πλεονάζουσα. Περισσότερο ή λιγότερο προϊόν λαμβάνεται μόνο από

ακτινική επέκταση ή συστολή κατά μήκος της ακτίνας OZ —κατά μήκος της οποίας οι ποσότητες του κεφαλαίου και της εργασίας διατηρούνται σε αυστηρή αναλογία. (Βλέπε Allen (7) σσ. 35-7).

(β) Η συνεχής αθροιστική συνάρτηση παραγωγής

(i) ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Η μορφή αυτή επιτρέπει την υποκατάσταση αθροισμένου κεφαλαίου διά της εργασίας στην παραγωγή του προϊόντος. Έτσι, κάθε δεδομένη ροή προϊόντος \bar{Y}

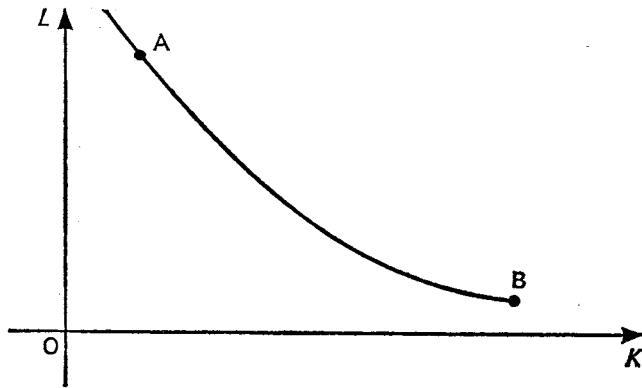


Σχ. 2.2

μπορεί να παραχθεί από ένα πλήθος συνδυασμών κεφαλαίου και εργασίας. Με τις δυνατότητες συνεχούς υποκατάστασης, η μορφή αυτή μπορεί να απεικονιστεί όπως στο Σχήμα 2.3. Στο Σχήμα 2.3 η καμπύλη AB , η οποία στο μικροοικονομικό πλαίσιο ονομάζεται «καμπύλη ίσου προϊόντος», δείχνει τους διαφορετικούς δυνατούς συνδυασμούς αθροισμένου κεφαλαίου και εργασίας που μπορούν να παράγουν την καθορισμένη ροή του εθνικού εισοδήματος ή προϊόντος \bar{Y} . Έτσι, το σημείο A , που υποδηλώνει μια μεγάλη ποσότητα εργασίας και μια μικρή ποσότητα κεφαλαίου, είναι ισοδύναμο με το σημείο B , που υποδηλώνει μια σχετικά μικρή ποσότητα εργασίας και μια μεγάλη ποσότητα κεφαλαίου, στην παραγωγή του επιπέδου προϊόντος \bar{Y} .

(ii) ΤΑ ΟΡΙΑΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Με τη συνεχή μορφή της αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής, είναι δυνατό να εξετάσουμε την επίδραση που έχει μια οριακή αύξηση είτε του κεφαλαίου είτε της εργασίας στο συνολικό προϊόν. Ορίζουμε το οριακό προϊόν της εργασίας ως το



Σχ. 2.3

επιπλέον προϊόν που παράγεται από μια προσαύξηση του εργατικού δυναμικού (ή της προσφοράς υπηρεσιών εργασίας), ενώ το απόθεμα κεφαλαίου διατηρείται σταθερό. Ακριβέστερα, το οριακό προϊόν της εργασίας είναι ο λόγος της μεταβολής του προϊόντος, Y , προς τη μεταβολή της εργασίας, L , και γράφεται $\partial Y/\partial L$ δηλ. η μερική παράγωγος του προϊόντος ως προς την εργασία¹⁶. Το οριακό προϊόν του κεφαλαίου $\partial Y/\partial K$ ορίζεται με εντελώς ανάλογο τρόπο ως ο λόγος της μεταβολής του προϊόντος προς τη μεταβολή του K , ενώ το απόθεμα εργασίας διατηρείται σταθερό.

Δεδομένου του ορισμού που δώσαμε για τα οριακά προϊόντα, μπορούμε να εξειδικεύσουμε περισσότερο τη συνεχή μορφή, υποθέτοντας:

ΥΠΟΘΕΣΗ 2.4.1 ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΑΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

Τα οριακά προϊόντα κεφαλαίου και εργασίας είναι θετικά, δηλ.

$$\frac{\partial Y}{\partial K} > 0 \text{ και } \frac{\partial Y}{\partial L} > 0$$

Αυτό φυσικά σημαίνει ότι μια αύξηση είτε του κεφαλαίου είτε της εργασίας, θα επιφέρει *πάντα* αύξηση της ροής του προϊόντος. Η στοιχειώδης μικροοικονομική υποθέτει συχνά τη δυνατότητα να γίνουν τα οριακά προϊόντα, τελικά, αρνητικά, εάν όλο και περισσότερες μονάδες ενός συντελεστή παραγωγής προστίθενται σ' έναν συντελεστή παραγωγής σταθερής ποσότητας. Η Υπόθεση 2.4.1 αποκλείει αυτή τη δυνατότητα.

¹⁶ Ο μη μαθηματικός δεν θα πρέπει να απελπιστεί. Ο λόγος $\partial Y/\partial L$ θα πρέπει απλώς να διαβαστεί ως «ο λόγος μεταβολής του Y προς τη μεταβολή του L , με το K να διατηρείται σταθερό». Ωστόσο, μια μικρή επένδυση για να διαβάσετε τον Allen (6) Κεφ. VI και Κεφ. XI, ή τα σχετικά κεφάλαια άλλων διδακτικών βιβλίων όπως του Casson (37) ή των Archibald και Lipsey (8), θα απέδιδε σημαντικά οφέλη.

Ο φοιτητής των στοιχειωδών οικονομικών θα είναι ασφαλώς εξοικειωμένος με την ακόλουθη υπόθεση (βλέπε Samuelson (237) σσ. 24-7 ή Lipsey (164) σ. 215), η οποία εξειδικεύει περισσότερο τη συνεχή μορφή της συνάρτησης παραγωγής:

ΥΠΟΘΕΣΗ 2.4.2 ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΟΡΙΑΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΤΗΤΑ

Μολονότι κάθε αύξηση του κεφαλαίου ή της εργασίας επιφέρει αύξηση της ροής του προϊόντος, διαδοχικές προσυξήσεις του κεφαλαίου ή της εργασίας παράγουν φθίνουσες αυξήσεις της ροής του προϊόντος. Η υπόθεση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0 \text{ και } \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$$

δηλ. ο λόγος μεταβολής του λόγου μεταβολής του προϊόντος ως προς το κεφάλαιο ή την εργασία είναι αρνητικός. Η υπόθεση αυτή αντιστοιχεί στη γνωστή ιδέα των φθίνουσών αποδόσεων κλίμακος για οποιοδήποτε συντελεστή παραγωγής, ενώ ο άλλος διατηρείται σταθερός, αλλά στη στοιχειώδη μικροοικονομική οι φθίνουσες αποδόσεις κλίμακος συνήθως υποτίθεται ότι δεν εμφανίζονται αμέσως. Η Υπόθεση 2.4.2 υποδηλώνει ότι οι φθίνουσες αποδόσεις κλίμακος είναι παρούσες για *κάθε ύψος* του προϊόντος.

(iii) ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑ Η΄ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

Μια συνάρτηση παραγωγής λέγεται ότι είναι γραμμικά ομοιογενής, δηλ. υπόκειται σε σταθερές αποδόσεις κλίμακος, εάν ο πολλαπλασιασμός τόσο του κεφαλαίου όσο και της εργασίας με ένα θετικό αριθμό συνεπάγεται ότι το προϊόν που λαμβάνεται πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) = \lambda Y, \text{ για κάθε } \lambda > 0 \quad (2.4.3)$$

δηλ., εάν διπλασιάσουμε τα ποσά του κεφαλαίου και της εργασίας στην οικονομία, τότε διπλασιάζεται και η ροή του προϊόντος. Οι συνεχείς αθροιστικές συναρτήσεις παραγωγής θεωρούνται συχνά ότι είναι της μορφής αυτής, κι έτσι σημειώνουμε για μελλοντική αναφορά:

ΥΠΟΘΕΣΗ 2.4.3 ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

Η αθροιστική συνάρτηση παραγωγής είναι γραμμικά ομοιογενής. Θα πρέπει να γίνει φανερό ότι η υπόθεση των σταθερών αποδόσεων κλίμακος δεν είναι ασυμβίβαστη με την Υπόθεση 2.4.2. Ο «νόμος» της φθίνουσας απόδοσης αναφέρεται σε μια κατάσταση όπου η οριακή παραγωγικότητα ενός συντελεστή μειώνεται καθώς τη ποσότητα του χρησιμοποιούμενου συντελεστή αυξάνεται ενώ οι *ποσότητες των άλλων συντελεστών διατηρούνται σταθερές*. Οι σταθερές αποδόσεις

κλίμακος καθορίζονται στην περίπτωση όπου *όλοι* οι συντελεστές αυξάνονται στο ίδιο ποσοστό.

Η υπόθεση των σταθερών αποδόσεων κλίμακος επιτρέπει μια ουσιώδη απλοποίηση της αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής, γιατί μπορεί να γραφεί σε μια *ανά εργάτη* ή «εντατική» μορφή. Δεδομένης μιας αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής σταθερών αποδόσεων, $Y = F(K, L)$, γνωρίζουμε ότι πολλαπλασιάζοντας τα K και L με έναν αριθμό λ , θα έχουμε ως αποτέλεσμα τον πολλαπλασιασμό του Y με τον ίδιο αριθμό. Θέτουμε $\lambda = 1/L$ και πολλαπλασιάζουμε ώστε να έχουμε

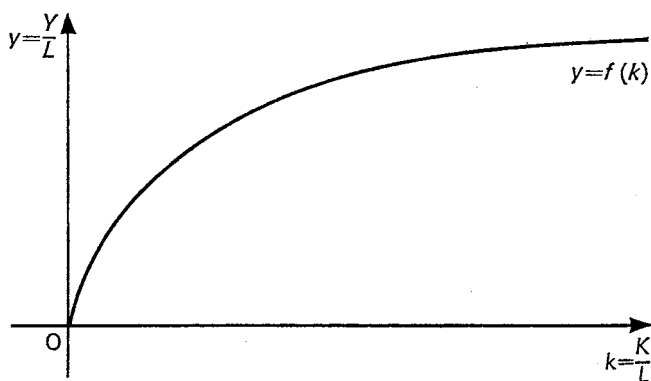
$$\frac{Y}{L} = F\left[\frac{K}{L}, 1\right] \quad (2.4.4)$$

Η εξίσωση (2.4.4) λέει απλά ότι οι εκροές ανά εργάτη, Y/L , εξαρτώνται από το κεφάλαιο ανά εργάτη ή από τον λόγο κεφαλαίου-εργασίας, K/L . Η (2.4.4) μπορεί απλά να γραφεί ως

$$y = f(k) \quad (2.4.5)$$

όπου $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$ και $f(k) = F(k, 1)$

Η εξίσωση (2.4.5) είναι μια μορφή της αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής ανά εργάτη και αποτελεί ένα βασικό εργαλείο πολλών μοντέλων οικονομικής μεγέθυνσης. Χρησιμοποιείται πολύ συχνά στο βιβλίο αυτό. Εάν κάνουμε ακόμα μια υπόθεση, τότε η συνάρτηση της παραγωγής ανά εργάτη μπορεί να απεικονιστεί μ' ένα διάγραμμα.



Σχ. 2.4

ΥΠΟΘΕΣΗ 2.4.4 ΚΑΜΙΑ ΕΙΣΡΟΗ, ΚΑΜΙΑ ΕΚΡΟΗ

Εάν δεν χρησιμοποιείται κανένα κεφάλαιο ή εργασία, τότε δεν μπορεί να παραχθεί κανένα προϊόν, δηλ. δεδομένης της $y = f(k)$, εάν $k = 0$, τότε $y = 0$.

Δεδομένων των υποθέσεων 2.4.1-2.4.4, η αθροιστική συνάρτηση παραγωγής μπορεί να απεικονιστεί όπως στο Σχήμα 2.4. Κάθε σημείο της καμπύλης $f(k)$ στο Σχήμα 2.4 δείχνει την ποσότητα του προϊόντος ανά εργάτη που παράγεται από την αντίστοιχη εισροή κεφαλαίου ανά εργάτη. Εάν το εργατικό δυναμικό διατηρείται σταθερό και, με μια κατάλληλη επιλογή μονάδων, εξισωθεί με τη μονάδα, τότε το Σχήμα 2.4 μπορεί να θεωρηθεί ότι απεικονίζει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο αθροισμένο προϊόν και στο αθροισμένο κεφάλαιο που χρησιμοποιούνται. Από την Υπόθεση 2.4.4 έπεται ότι η καμπύλη ξεκινά από το σημείο τομής των αξόνων. Η Υπόθεση 2.4.1 υποδηλώνει ότι η καμπύλη κλίνει προς τα άνω και η Υπόθεση 2.4.2 είναι η αιτία που η κλίση της καμπύλης μειούται συνεχώς και τείνει προς το μηδέν. Όπως θα περίμενε κανείς, είναι μεγάλη διευκόλυνση το ότι οι παραγωγικές ή τεχνολογικές δυνατότητες ενός οικονομικού μοντέλου μπορούν να απεικονιστούν με τόσο απλό τρόπο, και η καμπύλη $f(k)$ εμφανίζεται ως συστατικό στοιχείο πολλών άλλων διαγραμμάτων που υπάρχουν στο βιβλίο αυτό.

(iv) Η ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΤΗΤΑΣ

Ένα συμβατικό αποτέλεσμα της μικροοικονομικής θεωρίας δείχνει ότι ένας επιχειρηματίας που μεγιστοποιεί το κέρδος του θα εκμισθώνει συντελεστές παραγωγής (π.χ. κεφάλαιο ή εργασία) μέχρι το σημείο όπου τα έσοδα των οριακών προϊόντων τους θα είναι ίσα με την τιμή τους. (Βλέπε Lipsey (164) Μέρος 6ο ή Samuelson (227) Μέρος 4ο). Όταν αυτή η θεωρία μεταφερθεί σε μακροοικονομικό πλαίσιο, υπό τον τίτλο «θεωρία κατανομής βάσει της οριακής παραγωγικότητας», τότε υπονοεί ότι σε συνθήκες ανταγωνισμού το πραγματικό ωρομίσθιο θα εξισωθεί με «το» οριακό προϊόν της συνολικής εργασίας και ότι η πραγματική πρόσδοδος για μια μονάδα κεφαλαίου θα εξισωθεί με «το» οριακό προϊόν του συνολικού κεφαλαίου.

Η θεωρία αναπτύχθηκε από τους λεγόμενους νεοκλασικούς θεωρητικούς (βλέπε 4.1) στο τελευταίο τέταρτο του δέκατου ένατου αιώνα. Μια σειρά συγγραφέων — ο J.B. Clark στις Ηνωμένες Πολιτείες, οι Marshall και Wicksteed στην Αγγλία, ο Walras στην Ελβετία, ο Wicksell στη Σουηδία και ο Barone στην Ιταλία —παρήγαγαν όλοι θεωρίες οι οποίες, με αξιοσημείωτη συγχρονικότητα, ενσωμάτωσαν την ουσία της θεωρίας της οριακής παραγωγικότητας¹⁷. Η έντονη διαμάχη, που περιέβαλλε αυτή τη θεωρία για τα ογδόντα περίπου χρόνια της ύπαρξής της (βλέπε Κεφ. 6), πηγάζει όχι μόνο από τα σχετικά με αυτήν θεωρητικά προβλήματα, αλλά και από τις προσπάθειες μερικών από τους πρωτοπόρους της, κυρίως του J.B. Clark, να ενδώσουν σ' αυτό που αποκάλεσε ο Stigler «απλοϊκή ηθική της παραγωγικότητας», δηλ. να υποστηρίξουν ότι ο ελεύθερος ανταγωνισμός παράγει «δίκαιο» μισθό και δίκαιη κατανομή του εισοδήματος. Με τα λόγια του Clark:

¹⁷ Για μια ιστορική εξέταση της θεωρίας βλέπε Stigler (257) ή Blaug (25) Κεφ. 11.

«Όπου υπάρχουν οι φυσικοί νόμοι, το μερίδιο του εισοδήματος που συνδέεται με κάθε παραγωγική λειτουργία μετρίεται με το πραγματικό προϊόν της. Με άλλα λόγια, ο ελεύθερος ανταγωνισμός τείνει να δώσει στην εργασία αυτό που η εργασία δημιουργεί»¹⁸ (J.B. Clark (42) σ. 3).

Δεδομένων των επακόλουθων διαμαχών (βλέπε Κεφ. 6), είναι ειρωνικό αν σκεφτούμε ότι ο πρόλογος του έργου του Clark *Philosophy of Wealth* τόνισε την πεποίθηση ότι «η περίοδος της ασυμφιλίωτης διαφορετικότητας των θεμελιακών αρχών της επιστήμης μοιάζει να είναι παρελθόν και μια εποχή σχετικής ομοφωνίας ... έρχεται στο προσκήνιο».

Εάν το κεφάλαιο και η εργασία αμοιβονται με τα οριακά τους προϊόντα, τι εγγυάται ότι η συνολική παραγωγή θα εξαντληθεί επακριβώς —δηλ. δεν θα υπάρχει κανένα πλεόνασμα ή έλλειμμα; Το μαθηματικό θεώρημα του Euler εγγυάται ότι εάν η συνάρτηση παραγωγής υπόκειται σε σταθερές αποδόσεις κλίμακος, τότε η πληρωμή των οριακών προϊόντων στους συντελεστές παραγωγής θα εξαντλήσει το προϊόν (βλέπε Allen (6) σσ. 317-19).

$$\begin{array}{cccccc}
 \text{δηλ. Ποσότητα} & \times & \text{Οριακό} & + & \text{Ποσότητα} & \times & \text{Οριακό} & = & \text{Συνολικό} \\
 \text{Κεφαλαίου} & & \text{Προϊόν} & & \text{Εργασίας} & & \text{Προϊόν} & & \text{Προϊόν} \\
 & & \text{Κεφαλαίου} & & & & \text{Εργασίας} & &
 \end{array}$$

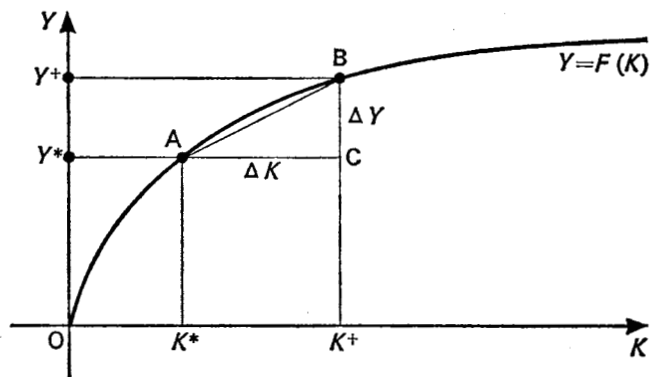
ή, σε μαθηματική μορφή,

$$K \frac{\partial Y}{\partial K} + L \frac{\partial Y}{\partial L} = Y \tag{2.4.6}$$

όπου η σημασία της $\partial Y/\partial K$ και της $\partial Y/\partial L$ εξηγούνται στην παράγραφο 2.4 (ii). Εάν δεχθούμε τη θεωρία κατανομής βάσει της οριακής παραγωγικότητας, τότε η τιμή του κεφαλαίου, το πραγματικό ποσοστό κέρδους, εξισώνεται με το οριακό προϊόν του κεφαλαίου και η τιμή της εργασίας, το πραγματικό ωρομίσθιο, εξισώνεται με το οριακό προϊόν της εργασίας.

Η κατανομή του εισοδήματος μεταξύ του κεφαλαίου και της εργασίας μπορεί να απεικονιστεί απλά στο πλαίσιο του διαγράμματος του Σχήματος 2.4. Ας δούμε το Σχήμα 2.5. Ενώ αρχικά φαίνεται ταυτόσημο με το Σχήμα 2.4, ο φοιτητής θα παρατηρήσει ότι υποθέσαμε το εργατικό δυναμικό ρητά σταθερό και ίσο με τη μονάδα, έτσι ώστε στον κατακόρυφο άξονα να μετρίεται το εθνικό προϊόν, και όχι το προϊόν ανά εργάτη, και στον οριζόντιο άξονα να μετρίεται το απόθεμα του αθροισμένου κεφαλαίου, και όχι το κεφάλαιο ανά εργάτη. Εάν η ποσότητα του κεφαλαίου στην οικονομία είναι αρχικά K^* τότε, δεδομένης της συνάρτησης παραγωγής, παράγεται το προϊόν Y^* . Ας θεωρήσουμε μια προσαύξηση ΔK στο απόθεμα

¹⁸ Απαιτείται προσεκτική ανάγνωση του βιβλίου του Clark (42) για να μπορέσουμε να συλλάβουμε όλη την ουσία της προσέγγισής του.



Σχ. 2.5

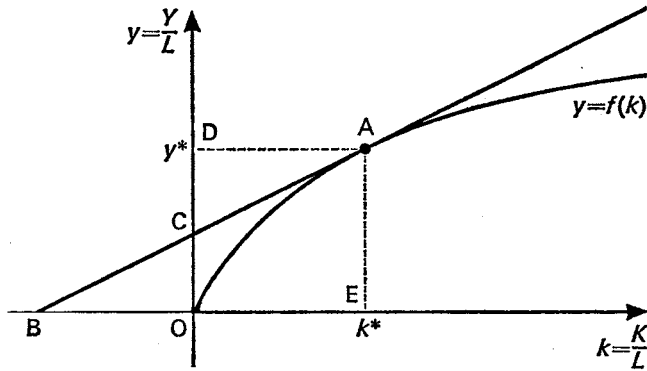
κεφαλαίου —αυξάνοντας το K σε K^+ . Αυτή επιφέρει μια προσαύξηση ΔY στο προϊόν —αυξάνοντας το Y σε Y^+ . Τώρα το $\Delta Y/\Delta K$, η προσαύξηση του προϊόντος διαιρημένη δια της προσαύξησης του κεφαλαίου, είναι μια χοντρική μέτρηση του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου και μετριέται από την κλίση της γραμμής που ενώνει τα σημεία AB της συνάρτησης παραγωγής (βλέπε Lipsey (164) Κεφ. 2 Παράρτημα). Ας σκεφτούμε τι θα συνέβαινε στη μέτρηση αυτή αν η αύξηση του κεφαλαίου γινόταν όλο και μικρότερη. Το οριακό προϊόν θα συνέχιζε να μετριέται με την κλίση της γραμμής AB αλλά το σημείο B θα ερχόταν όλο και πιο κοντά στο A . Εάν η προσαύξηση του K γινόταν απειροελάχιστα μικρή, τότε θα ήταν φανερό ότι το οριακό προϊόν του κεφαλαίου στο σημείο A θα μετριόταν από την κλίση της συνάρτησης παραγωγής στο σημείο αυτό¹⁹. Τώρα, η κλίση της καμπύλης σε κάθε σημείο ισούται με την κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη στο σημείο αυτό. Κατά συνέπεια, μπορούμε να συνοψίσουμε ως εξής:

Στο Σχήμα 2.5, η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A μετρά το οριακό προϊόν του κεφαλαίου, $\partial Y/\partial K$, στο σημείο αυτό. Εάν δεχτούμε τη θεωρία της οριακής παραγωγικότητας, η ίδια εφαπτομένη μετρά το ποσοστό κέρδους ή το ποσοστό απόδοσης του κεφαλαίου που μπορεί να παραχθεί υπό συνθήκες ανταγωνισμού, δεδομένης μιας ποσότητας κεφαλαίου K^ .*

Η κλίση της καμπύλης $Y = F(K)$ είναι συνεχώς φθίνουσα στο Σχήμα 2.5 —αντανακλώντας την υπόθεση της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας.

Ας πάρουμε τώρα το Σχήμα 2.6. Δεδομένου ενός λόγου κεφαλαίου-εργασίας k^* , παράγεται ένα προϊόν ανά εργάτη y^* . Τώρα, κατ' αναλογία με το Σχήμα 2.5, δεν είναι δύσκολο να δεχτούμε ότι η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A μετρά το οριακό προϊόν του κεφαλαίου στο σημείο αυτό και, εάν δεχτούμε τη θεωρία

¹⁹ Πολλοί αναγνώστες θα αναγνωρίσουν πως το προηγούμενο θέμα είναι μια εκδοχή της βασικής ιδέας του διαφορικού λογισμού. Βλέπε Allen (6) Κεφ. V και VI.



Σχ. 2.6

κατανομής βάσει της οριακής παραγωγικότητας, η κλίση αυτή θα ισούται με το ποσοστό κέρδους, r . Τώρα, η κλίση της γραμμής CA δίνεται από το CD/DA : δηλ.

$$\text{κλίση της εφαπτόμενης } CA = r = \frac{CD}{DA}$$

Αλλά το DA ισούται με το OE , που είναι ο λόγος κεφαλαίου-εργασίας, k^* , που συνδέεται με την εφαπτομένη CA . Επομένως,

$$r = \frac{CD}{OE} = \frac{CD}{k^*}$$

Τώρα, το rk^* είναι το ποσοστό κέρδους πολλαπλασιασμένο με την ποσότητα του κεφαλαίου ανά εργάτη. Είναι επομένως φανερό ότι η απόσταση CD μετρά τη ποσότητα των *κερδών ανά εργάτη*. Επειδή το OD μετρά τη συνολική ποσότητα προϊόντος ανά εργάτη και οι σταθερές αποδόσεις κλίμακας συνεπάγονται, σύμφωνα με το θεώρημα του Euler, την εξάντληση του προϊόντος, οι *μισθοί ανά εργάτη*, ή το *ωρομίσθιο*, δίνονται από την

$$\begin{aligned} \text{Μισθοί ανά εργάτη} &= OD - CD \\ &= OC \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Τα αποτελέσματα αυτά χρησιμοποιούνται συχνά στο βιβλίο και είναι βασικό να βεβαιωθεί ο αναγνώστης για την παραγωγή τους. Η κλίση της «εντατικής» συνάρτησης παραγωγής σε ένα σημείο *συμβολίζεται συχνά* ως $f'(k)$. Έτσι, δεδομένου ενός λόγου κεφαλαίου-εργασίας k^* , το ποσοστό κέρδους, r , θα γράφεται συχνά ως

$$r = f'(k^*) \tag{2.4.9}$$

Τα κέρδη ανά εργάτη θα είναι επομένως ίσα με $k^*f'(k^*)$ και οι μισθοί ανά εργάτη, w , θα δίνονται στην παράσταση αυτή, από

$$\begin{aligned} w &= \text{Προϊόν ανά εργάτη} - \text{κέρδη ανά εργάτη} \\ &= f(k^*) - k^*f'(k^*) \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η κλίση της εφαπτομένης CA μπορεί να γραφεί και εναλλακτικά

$$\text{Κλίση της CA} = r = \frac{OC}{OB}$$

Δείξαμε πως το OC μετρά το ωρομίσθιο w . Επομένως

$$r = \frac{w}{OB}$$

ή,

$$OB = \frac{w}{r} \quad (2.4.11)$$

Έτσι μπορούμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα που συνδέονται με τη χρήση της ανά εργάτη συνεχούς συνάρτησης παραγωγής στο Σχήμα 2.6 και την υπόθεση της θεωρίας της οριακής παραγωγικότητας με τα εξής:

- (1) Τα κέρδη ανά εργάτη μετρούνται από την απόσταση CD.
- (2) Οι μισθοί ανά εργάτη μετρούνται από την απόσταση OC.
- (3) Ο λόγος των μισθών ανά εργάτη, w , προς το ποσοστό του κέρδους, r , μετράται από την απόσταση OB.

Συμβουλεύουμε τον αναγνώστη να πειραματιστεί με το διάγραμμα αυτό ώστε να επιβεβαιώσει την κατανόησή του. Μια έρευνα για την επίπτωση που έχει στα w και r η αύξηση του λόγου κεφαλαίου-εργασίας μπορεί να αποδειχθεί ιδιαίτερα καρποφόρα²⁰.

(v) Η ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Η χρήσιμη αυτή έννοια, η οποία συνήθως αποδίδεται στον J.R. (τώρα Sir John) Hicks ((107) σ. 289) μπορεί να οριστεί ως ο ρυθμός μεταβολής του λόγου κεφαλαίου-εργασίας προς τον ρυθμό μεταβολής του λόγου των τιμών του κεφαλαίου και

²⁰ Μια τυπική μαθηματική παραγωγή των αποτελεσμάτων (2.4.9) και (2.4.10) είναι άμεση. Αν έχουμε $Y = L f(k)$, λαμβάνονται οι μερικές παράγωγοι του Y ως προς K και L , και αυτά είναι τα αντίστοιχα οριακά προϊόντα. Βλέπε Allen (7) σσ. 45-6.