ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Άσκηση 21.

Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών θεωρούμε τις σχέσεις $R_1 - R_5$ που ορίζονται ως εξής:

(α) $(x, y) \in R_1 \Leftrightarrow\ x > y$.

(β) $(x, y) \in R_2 \Leftrightarrow\ < \exists\, n \in \mathbb{Z} : x - y = 2n + 1 >$.

(γ) $(x, y) \in R_3 \Leftrightarrow\ x + y = 4$.

(δ) $(x, y) \in\ R_4 \Leftrightarrow\ \mu.\kappa.\delta.(x, y) = 1$.

(ε) $(x, y) \in R_5 \Leftrightarrow\ \varepsilon.\kappa.\pi.(x, y) = 6$.

(ζ) $(x, y) \in R_6 \Leftrightarrow$ <αν οι x, y είναι ακέραιοι αριθμοί και το γινόμενό τους είναι τέλειο τετράγωνο > $\Leftrightarrow$ < αν $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ και $\exists\, m \in \mathbb{Z} : xy = m^2$>.

Να εξεταστεί ποιές από τις σχέσεις αυτές είναι ανακλαστικές, συμμετρικές, αντισυμμετρικές, μεταβατικές και ποιές είναι σχέσεις ισοδυναμίας ή σχέσεις μερικής διάταξης.

(**Απάντηση: (α)** Η R_1 δεν είναι ανακλαστική [για την ακρίβεια, $(x, x) \notin R_1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$], δεν είναι συμμετρική [για την ακρίβεια, $(x, y) \in R_1 \Rightarrow (y, x) \notin R_1,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$), είναι αντισυμμετρική, είναι μεταβατική, δεν είναι σχέση ισοδυναμίας, ούτε σχέση μερικής διάταξης.

(β) Η R_2 δεν είναι ανακλαστική [για την ακρίβεια, $(x, x) \notin\ R_2, \forall\, x \in \mathbb{Z})$], είναι συμμετρική [για την ακρίβεια, $(x, y) \in R_2 \Rightarrow (y, x) \in R_2,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}, x \neq y]$, δεν είναι αντισυμμετρική, δεν είναι μεταβατική [για παράδειγμα, $(5{,}2) \in\ R_2$, $(2{,}3) \in\ R_2$ και $(5, 3) \notin R_2$], δεν είναι σχέση ισοδυναμίας, ούτε σχέση μερικής διάταξης.

(γ) Η R_3 δεν είναι ανακλαστική, είναι συμμετρική, δεν είναι αντισυμμετρική, δεν είναι μεταβατική, δεν είναι σχέση ισοδυναμίας, ούτε σχέση μερικής διάταξης.

(δ) Η R_4 δεν είναι ανακλαστική{ για παράδειγμα, μ.κ.δ.(2,2) = 2 $\Rightarrow (2, 2) \notin R_4$), είναι συμμετρική, δεν είναι αντισυμμετρική, δεν είναι μεταβατική [για παράδειγμα, $(3, 5) \in R_4$, $(5, 9) \in R_4$ και $(3, 9) \notin R_4$], δεν είναι σχέση ισοδυναμίας, ούτε σχέση μερικής διάταξης.

(ε) Η R_5 δεν είναι ανακλαστική [για παράδειγμα, ε.κ.π.(3,3) = 3 $\Rightarrow (3, 3) \notin R_5$], είναι συμμετρική, δεν είναι αντισυμμετρική [για παράδειγμα, $(2{,}3) \in R_5$ και $(3{,}2) \in R_5$], δεν είναι μεταβατική [για παράδειγμα, $(3, 6) \in R_5$, $(6, 3) \in R_5$ και $(3, 3) \notin R_5$], δεν είναι σχέση ισοδυναμίας, ούτε σχέση μερικής διάταξης.

(ζ) Η R_6 είναι ανακλαστική, είναι συμμετρική, δεν είναι αντισυμμετρική. Αποδεικνύουμε ότι **είναι μεταβατική.** Θεωρούμε $x, y, z \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε να είναι

$$xy = m^2 \ \text{ και } \ yz = n^2 \tag{1}$$

όπου $m, n \in \mathbb{Z}$. Πολλαπλασιάζοντας τις (1) κατά μέλη παίρνουμε $xy^2z = m^2n^2$ ή

$$xz = \frac{m^2n^2}{y^2} = \left(\frac{mn}{y}\right)^2. \tag{2}$$

Παρατηρούμε ότι αν ο αριθμός $\frac{mn}{y}$ δεν είναι ακέραιος, τότε θα υπάρχει ένας τουλάχιστον πρώτος παράγοντας p του y ο οποίος δεν απλοποιείται με κανέναν από τους πρώτους παράγοντες των m και n. Στην περίπτωση αυτή ο παράγοντας p^2 του παρονομαστή (y^2) του « κλάσματος » $\frac{m^2n^2}{y^2}$ δεν απλοποιείται με κανέναν από τους πρώτους παράγοντες του αριθμητή m^2n^2 και άρα το « κλάσμα » αυτό δεν είναι ακέραιος αριθμός. Αυτό όμως είναι αντίφαση, αφού το xz σαν γινόμενο δυο ακεραίων αριθμών είναι ακέραιος αριθμός. Επομένως ο αριθμός $\frac{mn}{y} = \omega$ είναι ακέραιος, ο $xz = \omega^2$ είναι τέλειο τετράγωνο και **η σχέση R_6 είναι μεταβατική.** Έτσι, η R_6 είναι σχέση ισοδυναμίας, αλλά δεν είναι σχέση μερικής διάταξης.

Άσκηση 31.

(α) Να δειχτεί ότι μια σχέση S στο σύνολο A είναι συμμετρική αν, και μόνο αν, ταυτίζεται με την αντίστροφή της, δηλ. αν, και μόνο αν, είναι $S = S^{-1}$.

(β) Να δειχτεί ότι μια σχέση S στο σύνολο A είναι ανακλαστική αν, και μόνο αν, η αντίστροφή της σχέση S^{-1}είναι ανακλαστική.

(**(α) Λύση.** Υποθέτουμε πρώτα ότι η σχέση S είναι συμμετρική και υπενθυμίζουμε ότι από τον ορισμό της σχέσης S^{-1} έχουμε

$$(\alpha,\beta) \in S \Leftrightarrow (\beta,\alpha) \in S^{-1}. \tag{1}$$

Ας είναι τώρα τυχαίο $(\alpha,\beta) \in S$. Επειδή η S είναι συμμετρική, $(\alpha,\beta) \in S \Rightarrow (\beta,\alpha) \in S$ και εξαιτίας της (1), $(\beta,\alpha) \in S \Rightarrow (\alpha,\beta) \in S^{-1}$. Με άλλα λόγια,

$$(\alpha,\beta) \in S \Rightarrow (\alpha,\beta) \in S^{-1}, \forall\, \alpha,\beta \in A$$

και άρα είναι $S \subseteq S^{-1}$. Αντίστροφα, θεωρούμε τυχαίο $(\alpha,\beta) \in S^{-1}$. Εξαιτίας της (1) έχουμε $(\beta,\alpha) \in S$ και επειδή η S είναι συμμετρική, $(\beta,\alpha) \in S \Rightarrow (\alpha,\beta) \in S$. Με άλλα λόγια,

$$(\alpha,\beta) \in S^{-1} \Rightarrow (\alpha,\beta) \in S, \forall\, \alpha,\beta \in A$$

και άρα είναι $S^{-1} \subseteq S$. Τέλος, $S \subseteq S^{-1}, S^{-1} \subseteq S \Rightarrow S = S^{-1}$.

(β) <u>Βοήθεια:</u> Παρατηρήστε ότι αν στην (1) θέσουμε $\beta = \alpha$, τότε αυτή γίνεται

$$(\alpha,\alpha) \in S \Leftrightarrow (\alpha,\alpha) \in S^{-1}.)$$

Άσκηση 44.

Ας είναι $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Να εκφραστεί με τους αριθμούς $\lceil x \rceil$ και $\lfloor y \rfloor$ το πλήθος των ακεραίων αριθμών m που επαληθεύουν τη σχέση:

(α) $m \in [x-1,\ y+1]$ **(β)** $m \in (x+2,\ y-3)$.

(**Λύση .** ($\boldsymbol{\alpha}$) Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$m \in [x-1,\ y+1] \Leftrightarrow x-1 \le m \le y+1.$$

Ακόμη, επειδή είναι $x-1 \le m$ και εξορισμού ο $\lceil x-1 \rceil$ είναι ο μικρότερος ακέραιος n που επαληθεύει τη σχέση $x-1 \le n$, έχουμε $\lceil x-1 \rceil \le m$. Ακόμη, επειδή είναι $y+1 \le m$ και εξορισμού ο $\lfloor y+1 \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ν που επαληθεύει τη σχέση $y+1 \le \nu$, έχουμε $m \le \lfloor y+1 \rfloor$. Το πλήθος των ακέραιων m, που επαληθεύουν τη διπλή ανισότητα $\lceil x-1 \rceil \le m \le \lfloor y+1 \rfloor$, είναι ίσο με τη διαφορά $\lfloor y+1 \rfloor - \lceil x-1 \rceil$ αυξημένη κατά $+1$, αφού περιλαμβάνονται σ'αυτό και τα δύο άκρα του διαστήματος $[\lceil x-1 \rceil,\ \lfloor y+1 \rfloor]$, δηλ. είναι ίσο με $\lfloor y+1 \rfloor - \lceil x-1 \rceil + 1$.

Τέλος, επειδή (Βλέπε Άσκηση 41) $\lfloor y+1 \rfloor = \lfloor y \rfloor + 1$ και $\lceil x-1 \rceil = \lceil x \rceil - 1$, έχουμε

$$\lfloor y+1 \rfloor - \lceil x-1 \rceil + 1 = \lfloor y \rfloor + 1 - (\lceil x \rceil - 1) + 1 = \lfloor y \rfloor - \lceil x \rceil + 3$$

και άρα το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με $\lfloor y \rfloor - \lceil x \rceil + 3$.

(β) Το πλήθος των ακεραίων αριθμών m που επαληθεύουν τη διπλή ανισότητα

$$\lceil x+2 \rceil < m < \lfloor y-3 \rfloor$$

ισούται με τη διαφορά $\lfloor y-3 \rfloor - \lceil x+2 \rceil$ των άκρων του διαστήματος

$(\lceil x+2 \rceil\ ,\ \lfloor y-3 \rfloor\ )$ ελαττωμένη κατά 1 (μία μονάδα), αφού σ'αυτό δεν περιλαμβάνονται τα άκρα του διαστήματος, δηλ. είναι ίσο με

$$\lfloor y-3 \rfloor - \lceil x+2 \rceil - 1.$$

Τέλος, επειδή $\lfloor y-3 \rfloor = \lfloor y \rfloor - 3$ και $\lceil x+2 \rceil = \lceil x \rceil + 2$, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$\lfloor y \rfloor - 3 - (\lceil x \rceil + 2) - 1 = \lfloor y \rfloor - \lceil x \rceil - 6.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.3.10. Θεώρημα. (Αλγόριθμος του Ευκλείδη). Ας είναι a, b δυο θετικοί ακέραιοι με $\alpha \ge b$ και ας εκτελέσουμε τη διαίρεση $a : b$. Σύμφωνα με το Θεώρημα διαίρεσης (§ 2.3.3) βρίσκουμε δυο άλλους ακέραιους q, r_1 που επαληθεύουν τις

$$\alpha = bq + r_1,\ 0 \le r_1 < b.$$

Αν είναι $r_1 = 0$, τότε είναι μ.κ.δ.$(a,b) = b$ και αν είναι $r_1 \ne 0$, τότε ο μ.κ.δ. των α, b ισούται με

το πρώτο μη μηδενικό υπόλοιπο των διαδοχικών διαιρέσεων

$$b : r_1, \qquad r_1 : r_2, \qquad r_2 : r_3, \qquad \cdots .$$

Απόδειξη. Αν είναι $r_1 = 0$, τότε σύμφωνα με την Πρότ.2.3.8. είναι μ.κ.δ.$(a,b) = b$. Υποθέτουμε ότι είναι $r_1 \ne 0$ και εκτελούμε τις διαδοχικές διαιρέσεις

$$b : r_1,\ \ r_1 : r_2,\ \ r_2 : r_3,\ \cdots .$$

Τότε έχουμε

$$\begin{cases} b = r_1 q_1 + r_2,\ \ 0 \le r_2 < r_1 , \\ r_1 = r_2 q_2 + r_3, 0 \le r_3 < r_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι επειδή είναι $b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$ και οι r_i είναι ακέραιοι, η ακολουθία $b, r_1, r_2, \cdots$ είναι γνησίως φθίνουσα και οι όροι της σε κάθε βήμα ελαττώνονται κατά μια τουλάχιστον μονάδα. Επομένως μετά από το πολύ b βήματα το υπόλοιπο θα είναι μηδέν και η διαδικασία θα τερματιστεί. Υποθέτουμε ότι αυτό γίνεται μετά από k ακριβώς βήματα, ότι δηλ. έχουμε $r_{k-1} \neq 0$ και $r_k = 0$. Τα δύο τελευταία βήματα θα είναι τα

$$r_{k-3} = r_{k-2} q_{k-2} + r_{k-1}, 0 \le r_{k-1} < r_{k-2},$$

$$r_{k-2} = r_{k-1} q_{k-1} + 0 = r_{k-1} q_{k-1}.$$

Σύμφωνα με την Πρότ. 2.3.8. θα είναι τότε

$$\text{μ.κ.δ.}(a, b) = \mu.\kappa.\delta.(b, r_1) = \mu.\kappa.\delta.(r_1, r_2) = \cdots = \mu.\kappa.\delta.(r_{k-2}, r_{k-1}) = r_{k-1}.$$

2.3.13. Παράδειγμα . Να βρεθεί ο μ.κ.δ. των ακεραίων $\alpha = 1023$, $b = 875$ και να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός τους.

Λύση. Εκτελούμε τις διαδοχικές διαιρέσεις $\alpha : b$, $b : r_1$, $r_1 : r_2$ κ.λπ. ώσπου να βρούμε υπόλοιπο μηδέν.

<table>
<tr>
<td>Έχουμε
$1023 = 1 \cdot (875) + 148$
$875 = 5 \cdot (148) + 135$
$148 = 1 \cdot (135) + 13$
$135 = (10) \cdot (13) + 5$
$13 = 2 \cdot 5 + 3$
$5 = 1 \cdot 3 + 2$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$</td>
<td>Επειδή το πρώτο μη μηδενικό υπόλοιπο είναι το 1, έχουμε μ.κ.δ.(1023, 875)=1. Άρα οι ακέραιοι 1023 και 875 είναι σχετικά πρώτοι. Τώρα εκφράζουμε το 1 σαν γραμμικό συνδυασμό των 1023 και 875, ξεκινώντας από την προτελευταία ισότητα.
$1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - 1 \cdot (5 - 1 \cdot 3) =$
$= 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 =$
$= 2 \cdot (13 - 2 \cdot 5) - 1 \cdot 5 = 2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 =$
$= 2 \cdot 13 - 5 \cdot (135 - 10 \cdot 13) =$
$= 52 \cdot 13 - 5 \cdot 135 =$
$= 52 \cdot (148 - 1 \cdot 135) - 5 \cdot 135 =$
$= 52 \cdot 148 - 57 \cdot 135 =$
$= 52 \cdot 148 - 57 \cdot (875 - 5 \cdot 148) =$
$= 337 \cdot 148 - 57 \cdot 875 =$
$= 337 \cdot (1023 - 1 \cdot 875) - 57 \cdot 875 =$
$= 337 \cdot 1023 - 394 \cdot 875$,
δηλ. $\mathbf{1} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{1023}) + \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{875})$,
όπου $\lambda = 337$ και $\mu = -394$.</td>
</tr>
</table>

2.4.4. Παράδειγμα. Να βρεθούν το δυαδικό, το 5—αδικό, το 7—αδικό και το 8—αδικό ανάπτυγμα του αριθμού 257.

Δυαδικό ανάπτυγμα. Εκτελούμε τις διαδοχικέ ς διαιρέσεις :

$$\begin{cases} 257 = 2\cdot 128+1,\ \pi_0 = 128,\ \upsilon_0 = 1 \\ 128 = 2\cdot 64+0,\ \pi_1 = 64,\ \upsilon_1 = 0 \\ 64 = 2\cdot 32+0,\ \pi_2 = 32,\ \upsilon_2 = 0 \\ 32 = 2\cdot 16+0,\ \pi_3 = 16,\ \upsilon_3 = 0 \\ 16 = 2\cdot 8+0, \pi_4 = 8,\ \upsilon_4 = 0 \\ 8 = 2\cdot 4+0,\ \pi_5 = 4,\ \upsilon_5 = 0 \\ 4 = 2\cdot 2+0,\ \pi_6 = 2,\ \upsilon_6 = 0 \\ 2 = 2\cdot 1+0, \pi_7 = 1,\ \upsilon_7 = 0 \\ 1 = 2\cdot 0+1,\ \boldsymbol{\pi_8} = \mathbf{0}, \upsilon_8 = 1. \end{cases}$$

Το ζητούμενο ανάπτυγμα είναι το

$257 = (\upsilon_8\upsilon_7\ \cdots\ \upsilon_2\upsilon_1\upsilon_0)_2 = (100000001)_2 =$

$= 2^8 + 0\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 +$

$+0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 2^8 + 1.$

Πενταδικό ανάπτυγμα .

$$\begin{cases} 257 = 5\cdot 51+2,\ \pi_0 = 51,\ \upsilon_0 = 2 \\ 51 = 5\cdot 10+1,\ \pi_1 = 10,\ \upsilon_1 = 1 \\ 10 = 5\cdot 2+0, \pi_2 = 2,\ \upsilon_2 = 0 \\ 2 = 5\cdot 0+2, \boldsymbol{\pi_3} = \mathbf{0},\ \upsilon_3 = 2 \end{cases}$$

Το ζητούμενο ανάπτυγμα είναι το

$257 = (\upsilon_3\upsilon_2\upsilon_1\upsilon_0)_5 = (2012)_5 =$

$2\cdot 5^3 + 0\cdot 5^2 + 1\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0 =$

$2\cdot 5^3 + 1\cdot 5 + 2.$

Επταδικό ανάπτυγμα.

$$\begin{cases} 257 = 7\cdot 36+5\,, \pi_0 = 36\,, \upsilon_0 = 5 \\ 36 = 7\cdot 5+1\,, \pi_1 = 5,\ \upsilon_1 = 1 \\ 5 = 7\cdot 0+5\,, \boldsymbol{\pi_2} = \mathbf{0}\,, \upsilon_2 = 5 \end{cases}$$

Το ζητούμενο ανάπτυγμα είναι το

$257 = (\upsilon_2\upsilon_1\upsilon_0)_7 = (515)_7 =$

$= 5\cdot 7^2 + 1\cdot 7^1 + 5\cdot 7^0 =$

$= 5\cdot 7^2 + 1\cdot 7 + 5.$

Οκταδικό ανάπτυγμα.

$$\begin{cases} 257 = 8\cdot 32+1\,, \pi_0 = 32\,, \upsilon_0 = 1 \\ 32 = 8\cdot 4+0, \pi_1 = 4, \upsilon_1 = 0 \\ 4 = 8\cdot 0+4\,, \boldsymbol{\pi_2} = \mathbf{0}, \upsilon_2 = 4\,. \end{cases}$$

Το ζητούμενο ανάπτυγμα είναι το

$257 = (\upsilon_2\upsilon_1\upsilon_0)_8 = (401)_8 =$

$= 4\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 1\cdot 8^0 = 4\cdot 8^2 + 1.$

2.4.11. Παράδειγμα. Να γραφεί ο αριθμός

$$X = (1001011110001101011)_2$$

στο 16 —αδικό σύστημα.

<u>1^{0}βήμα:</u> Χωρίζουμε τα ψηφία του σε ομάδες ανά τέσσερα, ξεκινώντας από τα τελευταία. Έτσι, έχουμε τις ομάδες

$$(1011), (0110), (1100), (1011), (100).$$

Επειδή στην τελευταία ομάδα έχουμε λιγότερα από 4 ψηφία την συμπληρώνουμε με ένα μηδενικό στην αρχή της. Έτσι, οι ομάδες είναι οι

$$(1011), (0110), (1100), (1011), (0100).$$

<u>2^0βήμα</u>: Υπολογίζουμε τους αριθμούς $X_0 = (1011)_2 = 2^3 + 2 + 1$=11, $X_1 = (0110)_2 = 2^2 + 2 = 6$, $X_2 = (1100)_2 = 2^3 + 2^2$=12, $X_3 = (1011)_2 = 2^3 + 2 + 1$=11, $X_4 = (0100)_2 = 2^2 = 4$.

<u>3^0βήμα</u>: Μετατρέπουμε τους αριθμού X_i σε ψηφία του $16-$αδικού συστήματος. Έχουμε $X_0 = B,\ X_1 = 6,\ X_2 = C,\ X_3 = B,\ X_4 = 4$.

<u>4^0βήμα</u>: Το ζητούμενο ανάπτυγμα είναι το $X = (4BC6B)_{16}$.

(Βεβαιωθείτε ότι είναι X=$(310.379)_{10}$.)

2.5.25. Παράδειγμα. Να λυθούν οι Διοφαντικές εξισώσεις:

(α) $4x + 11y = 5$ **(β)** $6x + 9y = 7$ **(γ)** $14\,x + 21y = 70$ **(δ)** $17x$+23y $= 80$

Λύση. (α) Παίρνοντας ισοτιμία $(mod.11)$ των μελών της εξίσωσης (α) αυτή ανάγεται στην εξίσωση ισοτιμίας

$$4x \equiv 5(mod.11). \tag{10}$$

Επειδή μ.κ.δ.(4, 11) = 1, η εξίσωση (10) έχει μία και μόνο λύση. Βρίσκουμε κατά τα γνωστά, ότι η λύση αυτή είναι η $x \equiv 4(mod.11)$ και δίνει $x = 4 + 11k$, όπου k είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\mathbb{Z}$. Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή αυτή του x στην εξίσωση (α) βρίσκουμε ότι

$$4(4 + 11k) + 11y = 5 \text{ ή } 11y = -11 - 44k \text{ ή } y = -1 - 4k.$$

Επομένως η γενική λύση της Διοφαντικής εξίσωσης (α) είναι η $x = 4 + 11k,\ y = -1 - 4k$, όπου $k \in \mathbb{Z}, k =$ αυθαίρετο.

(β) Επειδή μ.κ.δ.(6,9)=3 και $3 \nmid 7$, η εξίσωση (β) δεν έχει λύση.

(γ) Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές της εξίσωσης (γ) έχουν κοινό παράγοντα τον 7. Αυτή γράφεται $7(2\,x + 3y)$ =7· 10 και είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $2x + 3y = 10$. Παίρνοντας ισοτιμία $(mod.3)$ των μελών της τελευταίας εξίσωσης αυτή ανάγεται στην εξίσωση ισοτι-μίας $2\,x \equiv 10(mod.3)$, της οποίας η λύση είναι η $x \equiv 2(mod.3)$. Έτσι, γενική λύση της Διο-φαντικής εξίσωσης (γ) είναι η

$$x = 2 + 3k,\ y = 2 - 2k,\ k \in \mathbb{Z},\ k = \text{αυθαίρετο}.$$

(δ)) Παίρνοντας ισοτιμία $(mod.23)$ των μελών της εξίσωσης (δ) αυτή ανάγεται στην εξίσωση ισοτιμίας

$$17x \equiv 80(mod.23). \tag{10(α)}$$

Επειδή μ.κ.δ(17,23) = 1 η εξίσωση (10(α)) έχει μία και μόνη λήση. Βρίσκουμε κατά τα γνωστά ότι η λύση αυτή είναι $x \equiv 2(mod. 23)$. Επομένως είναι $x = 2 + 23k$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Θέτοντας την τιμή αυτή του x στην εξίσωση (19(α)) έχουμε, διαδοχικά,

$$17(2 + 23k) + 23y = 80,\ 34{+}17\cdot 23k{+}23y = 80, 23y = 80 - 34 - 391k,$$

$$23y = 46 - 17 \cdot 23 \cdot k, y = 2 - 17k$$

και άρα γενική λύση της Διοφαντικής εξίσωσης (δ) είναι η

$$x = 2 + 23k, y = 2 - 17k, \text{όπου } k \in \mathbb{Z}, k = \text{αυθαίρετο.}$$

2.6.2.Παράδειγμα. Σε ένα ταχυδρομείο διαπίστωσαν ξαφνικά ότι τους τελείωσαν όλα τα άλλα γραμματόσημα και τους έμειναν μόνο γραμματόσημα ονομαστικής αξίας 3 και 5 λεπτών. Είναι φανερό ότι δεν μπορούν με τέτοια γραμματόσημα να «δημιουργήσουν» ταχυδρομικά τέλη αξίας 1λ (ενός λεπτού), 2λ, 4λ και 7λ, μπορούν όμως να δημιουργήσουν ταχυδρομικά τέλη αξίας 3λ και 5λ (αυτά άλλωστε τα έχουν έτοιμα) και 8λ με ένα γραμ.(γραμματόσημο) 3λ και ένα γραμ. 5λ. Ο Προϊστάμενος σκέφτηκε ότι μπορεί να δημιουργηθούν ταχ. (ταχυδρομικά) τέλη αξίας:

« 9 λεπτών με τρία 3λ γραμ. », « 10λ με δύο 5λ γραμ. »,
« 11λ με δύο 3λ γραμ. και ένα 5λ », «12λ με 4 γραμ. 3λ»

και αναρωτήθηκε αν είναι δυνατό να δημιουργηθούν ταχ. τέλη οποιασδήποτε αξίας μεγαλύτερης ή ίσης των 9λ. Για να ελέγξουμε αν αυτό είναι δυνατό εφαρμόζουμε την επαγωγική μέθοδο. Ονομάζουμε Ε(ν) την πρόταση

Ε(ν)= $<$ με 3λ και 5λ γραμ. μπορούμε να δημιουργήσουμε ταχ. τέλη αξίας ν λεπτών $>$

και παρατηρούμε ότι η πρόταση Ε(8) είναι αληθής. Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση Ε(ν) είναι αληθής για ν = κ ≥ 8, ότι δηλ. δημιουργήσαμε ταχ. τέλος αξίας κ−λεπτών και θεωρούμε ταχ. τέλος αξίας (κ+1)−λεπτών.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) αν το ταχ. τέλος των κ−λεπτών περιέχει ένα 5λ γραμ.

Τότε αντικαθιστούμε το 5λ αυτό γραμ. με δύο 3λ γραμ. και έχουμε ταχ. τέλος αξίας (κ+1)−λεπτών.

β) αν το ταχ. τέλος των κ−λεπτών δεν περιέχει κανένα 5λ γραμ.

Τότε επειδή είναι κ ≥ 8 το ταχ. τέλος των κ−λεπτών περιέχει τρία τουλάχιστον 3λ γραμ. Αντικαθιστούμε τρία 3λ γραμ. με δύο 5λ γραμ. και έχουμε ταχ. τέλη αξίας (κ+1)−λεπτών.

Αυτό σημαίνει ότι η πρόταση Ε(ν) είναι τότε αληθής και για τον ν = κ+1. Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.1.13, η πρόταση Ε(ν) είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό ν ≥ 8.

2.6.3.Παράδειγμα. Ο Πρόεδρος ενός Μαθηματικού Τμήματος (Σχολής Θ.Ε) συγκέντρωσε σε μεγάλη αίθουσα όλες τις Φοιτήτριες του Τμήματος και έδωσε σε όλες να φορέσουν ένα καπέλο μαύρου ή άσπρου χρώματος, χωρίς καμία να γνωρίζει το χρώμα του δικού της καπέλου και τις ανακοίνωσε τα εξής:

« Κάθε μία από εσάς φοράει καπέλο άσπρου ή μαύρου χρώματος. Στα κεφάλια σας επάνω υπάρχουν καπέλα και των δύο χρωμάτων. Επιτρέπεται να βλέπετε η μία την άλλη αλλά δεν επιτρέπεται να μιλάτε μεταξύ σας. Θα έρχομαι εδώ ανά μία ώρα και θα περιμένω όσες από σας έχετε καταλάβει ότι φοράτε μαύρο καπέλο να βγείτε και να μου το πείτε. »

Ο Πρόεδρος έφυγε και άρχισε να επανέρχεται ανά μία ώρα στην αίθουσα. Οι Φοιτ.(Φοιτήτριες) που φορούσαν μαύρο καπέλο και που ήταν σε πλήθος ν βγήκαν όλες μαζί στην υπ. αριθ. ν επίσκεψη του Προέδρου και του ανακοίνωσαν ότι φορούσαν μαύρο καπέλο. Πως το κατάλαβαν;

Θα απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό εφαρμόζοντας την επαγωγική μέθοδο. Θεωρούμε την πρόταση

Ε(ν)= $<$ αν οι Φοιτ. που φορούν μαύρο καπέλο είναι ν (σε πλήθος), αυτές θα το καταλάβουν

όλες μαζί στην υπ. αριθ. ν επίσκεψη του Προέδρου $>$

και παρατηρούμε ότι για $\nu = 1$ αυτή είναι αληθής . Πράγματι, η μόνη Φοιτ. που φορά μαύρο καπέλο βλέπει ότι όλα τα άλλα καπέλα στην αίθουσα είναι άσπρα. Επειδή στην αίθουσα υπάρχει και (ένα τουλάχιστον) μαύρο καπέλο καταλαβαίνει ότι αυτή φορά μαύρο καπέλο. Έτσι, στην πρώτη επίσκεψη του Προέδρου βγαίνει και του λέει ότι φορά μαύρο καπέλο.

Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση είναι αληθής για $\nu = \kappa$, ότι δηλ. αν οι Φοιτ. που φορούν μαύρο καπέλο ήταν σε πλήθος κ, αυτές θα το καταλάβαιναν και θα έβγαιναν όλες μαζί στην υπ. αριθ. κ επίσκεψη του Προέδρου να του ανακοινώσουν ότι φορούν μαύρο καπέλο και αποδεικνύουμε ότι τότε η πρόταση είναι αληθής και για $\nu = \kappa+1$. Στην πρόταση Ε(κ+1) υποθέτουμε ότι υπάρχουν κ+1 Φοιτ. που φορούν μαύρο καπέλο. Αυτό αρχικά σημαίνει ότι μέχρι την προηγούμενη (υπ. αριθ. κ επίσκεψη) του Προέδρου δεν βγήκαν Φοιτ. να του ανακοινώσουν το χρώμα του καπέλου που φορούν. Ακόμη, κάθε μία από τις Φοιτ. που φορούν μαύρο καπέλο βλέπει ότι υπάρχουν κ (σε πλήθος) άλλες Φοιτ. που φορούν μαύρο καπέλο. Σκέπτεται ότι αν η ίδια φορούσε άσπρο καπέλο, τότε κ μόνο Φοιτ. θα φορούσαν μαύρο καπέλο και θα έβγαιναν όλες μαζί στην προηγούμενη επίσκεψη (την υπ. αριθ. κ) του Προέδρου να του το ανακοινώσουν. Αφού αυτό δεν έγινε, καταλαβαίνει ότι η ίδια φορά μαύρο καπέλο και άρα κ+1 ακριβώς Φοιτ. φορούν μαύρο καπέλο. Το ίδιο ακριβώς καταλαβαίνει και κάθε μία από τις υπόλοιπες Φοιτ. που φορά μαύρο καπέλο. Έτσι, βγαίνουν όλες μαζί στην επόμενη (την υπ. αριθ. κ+1) επίσκεψη του Προέδρου και του λένε ότι φορούν μαύρο καπέλο.

Έχουμε αποδείξει ότι αν η πρόταση είναι αληθής για $n = k \in \mathbb{N}$, τότε είναι αληθής και για $n = k + 1$. Σύμφωνα με το 1^o Θεώρημα της πλήρους επαγωγής, η πρόταση είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. 7. 11. Παράδειγμα . Σκακιστής, ο οποίος έχει να δώσει έναν σπουδαίο αγώνα, σχεδιάζει να

προπονηθεί τις τελευταίες 35 μέρες πριν τον αγώνα του, δίνοντας φιλικούς αγώνες με τους δύο παρακάτω όρους :

(α) Να δίνει έναν τουλάχιστον φιλικό αγών κάθε μέρα.

(β) Να μη δώσει συνολικά περισσότερους από 59 φιλικούς αγώνες.

Να δειχτεί ότι όπως και να προγραμματίσει τις προπονήσεις του ή θα υπάρχει ημέρα κατά την οποία θα δώσει 10 ακριβώς φιλικούς αγώνες ή θα υπάρχει μια ομάδα διαδοχικών ημερών κατά τη διάρκεια των οποίων θα δώσει συνολικά 10 φιλικούς αγώνες.

Λύση. Ας υποθέσουμε ότι ο αθλητής προγραμματίζει να δώσει χ_1 αγώνες την πρώτη ημέρα, χ_2 τη δεύτερη κ.λπ. χ_{35} την 35η ημέρα των προπονήσεών του και ας κατασκευάσουμε την ακολουθία

$$\alpha_1, \alpha_2, \ \cdots \ , \alpha_{34}, \alpha_{35} \tag{4}$$

όπου $\alpha_1 = \chi_1$, $\alpha_2 = \chi_1 + \chi_2$ και γενικά

$$a_i = \sum_{k=1}^{k=i} \chi_\kappa, \forall\, i = 1, 2, 3, \ \cdots \ , 35. \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (4) είναι γνησίως αύξουσα, αφού $\chi_i \geq 1, \forall\, i = 2, 3, \cdots, 34, 35$ και ότι είναι

$$\alpha_{35} \leq 59, \tag{6}$$

αφού ο όρος α_{35} ισούται με το συνολικό πλήθος όλων των προπονήσεων που θα γίνουν. Κατασκευάζουμε τώρα και την ακολουθία

$$\alpha_1 + 10,\ \alpha_2 + 10,\ \cdots\ , \alpha_{34} + 10, \alpha_{35} + 10 \tag{7}$$

και παρατηρούμε ότι κι αυτή είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει

$$\alpha_{35} + 10 \leq 59 + 10\ (= 69). \tag{8}$$

Έτσι, όλοι οι όροι της ακολουθίας (4) είναι διάφοροι μεταξύ τους όπως και όλοι οι όροι της ακολουθίας (7). Οι όροι και των δύο μαζί ακολουθιών είναι σε πλήθος 35+35 =70 ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα $[1, 69]$. Επειδή το διάστημα αυτό περιέχει 69 διαφορετικούς ακέραιους, σύμφωνα με την αρχή των περιστεριών-κλουβιών (οι 69 ακέραιοι του διαστήματος $[1, 69]$ παίζουν το ρόλο των κλουβιών και 70 όροι και των δύο ακολουθιών παίζουν το ρόλο των πριστεριών) οι 70 όροι και των δύο ακολουθιών δεν μπορεί να είναι όλοι διάφοροι μεταξύ τους και άρα δύο τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσοι μεταξύ τους. Αλλά επειδή οι όροι της ακολουθίας (4), όπως επίσης και της ακολουθίας (7) είναι διάφοροι μεταξύ τους, η ισότητα θα υπάρχει μεταξύ ενός όρου της ακολουθίας (4) και ενός όρου της ακολουθίας (7). Με άλλα λόγια, υπάρχουν δείκτες i, j με $1 \leq i \neq j \leq 35$[1] και τέτοιοι ώστε να είναι $\alpha_i = \alpha_j + 10$. Επειδή είναι $\alpha_i > \alpha_j$ είναι και $i > j$. Επομένως

[1] $1 \leq i \neq j \leq 35 \Leftrightarrow i \neq j, 1 \leq i \leq 35, 1 \leq j \leq 35$.

$$a_i = a_j + 10 \Rightarrow \sum_{k=1}^{k=i} \chi_\kappa = \sum_{k=1}^{k=j} \chi_\kappa + 10 \Rightarrow \sum_{k=1}^{k=j} \chi_\kappa + \sum_{k=j+1}^{k=i} \chi_\kappa = \sum_{k=1}^{k=j} \chi_\kappa + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=j+1}^{k=i} \chi_\kappa = 10,$$

δηλ. θα είναι

$$\chi_{j+1} + \chi_{j+2} + \cdots + \chi_i = 10. \tag{9}$$

Τέλος, αν είναι $i = j+1$, τότε την υπ' αριθμόν $j+1$ ημέρα ο σκακιστής θα δώσει 10 αγώνες και αν είναι $i > j+1$, τότε τις υπ' αριθμόν $j+1, j+2, \cdots, i$ διαδοχικές ημέρες ο σκακιστής θα δώσει συνολικά 10 αγώνες.

2.7.16. Παράδειγμα. Έχουμε 16λ. σφ.(δηλ. 16 λευκά σφαιρίδια), 22μ. σφ. (μαύρα σφ.) και 30ε. σφ. (ερυθρά σφ.), όλα του ιδίου μεγέθους και υφής. Τα τοποθετούμε όλα στο ίδιο δοχείο, τα ανακατεύουμε καλά και κατόπιν βγάζουμε τυχαία ένα δείγμα μεγέθους n, όπου $n \in \mathbb{N}$ (δηλ. ένα δείγμα που περιέχει n σφαιρίδια). Να βρεθεί ποιός πρέπει να είναι ο ελάχιστος n ώστε το δείγμα να περιέχει τουλάχιστον 11 σφαιρίδια του ιδίου χρώματος.

Λύση. Χρησιμοποιούμε 3 δοχεία Δ_λ, Δ_μ και Δ_ε για να τοποθετήσουμε σ' αυτά τα σφαιρίδια του δείγματος κατά χρώμα, δηλ. να τοποθετήσουμε τα λευκά στο δοχείο Δ_λ, τα μαύρα στο Δ_μ και τα ερυθρά στο Δ_ε. Το ζητούμενο μέγεθος του δείγματος είναι ο ακέραιος n ο οποίος έχει τις δύο παρακάτω ιδιότητες (i) και (ii):

(i) Υπάρχει δείγμα με μέγεθος $n-1$, το οποίο δεν έχει την ιδιότητα "I",

(ii) Κάθε δείγμα με μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο του n έχει την ιδιότητα "I",

όπου $I = <$ το δείγμα περιέχει 11 τουλάχιστον σφαιρίδια του ιδίου χρώματος $>$.

Ο ακέραιος n ο οποίος έχει τις δύο αυτές ιδιότητες είναι ο $n = 31$. Πράγματι, το δείγμα με μέγεθος $31 - 1 = 30$, το οποίο περιέχει 10λ. σφ. , 10μ. σφ. και 10ε. σφ. δεν έχει τη ζητούμενη ιδιότητα, δηλ. ο $n = 31$ έχει την ιδιότητα (i) . Ας είναι τώρα τυχαίο δείγμα δ με μέγεθος $n \geq 31$. Ελέγχουμε τα 30 πρώτα σφαιρίδια του δείγματος δ. Αν σε αυτά υπάρχουν 11 σφ. του ιδίου χρώματος, τότε το δείγμα δ έχει και την ιδιότητα (ii). Στην αντίθετη περίπτωση, στα 30 πρώτα σφαιρίδια του δείγματος δ θα υπάρχουν 10λ. σφ. , 10μ. σφ. και 10ε. σφ. Αλλά τότε, αν σε αυτά προστεθεί και ένα ακόμη σφ., επειδή αυτό θα έχει ένα από τα 3 χρώματα, το δείγμα θα αποκτήσει 11 σφ. ενός εκ των 3 χρωμάτων και θα έχει και την ιδιότητα (ii). Έχουμε δείξει ότι το ζητούμενο μέγεθος δείγματος είναι το $n = 31$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.3.7. Ορισμός. (**Συνδυασμοί με επαναλήψεις των n αντικειμένων ανά r**).
Θεωρούμε ένα σύνολο με n στοιχεία $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, όπου $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ και υπενθυμίζουμε ότι ένας συνδυασμός των n στοιχείων του A ανά r είναι ένα $r-$υποσύνολο $A_r^{(i)} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}\}$ του A. Υπενθυμίζουμε, ακόμη, (Βλέπε § 1.1.10) ότι αν επιτρέψουμε σε

ορισμένα από τα στοιχεία του $A_r^{(i)}$ να επαναλαμβάνονται, τότε αυτό παύει να είναι σύνολο και μετατρέπεται σε **“r −συλλογή”** στοιχείων του συνόλου A. Με τον όρο

“ **συνδυασμοί με επαναλήψεις των στοιχείων του A ανά r** ”

θα εννοούμε όλα τα $r-$ υποσύνολα του A και όλες τις “r −συλλογές” στοιχείων του συνόλου A.

3.3.8. Παράδειγμα. Το 4 – υποσύνολο $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ του A, όπως και οι παρακάτω συλλογές αντικειμένων

$$[\![a_1, a_2, a_2, a_n]\!] \,,\ [\![a_3, a_2, a_{n-1}, a_{n-1}]\!] \,,\ [\![a_2, a_2, a_3, a_3]\!] \,,\ [\![a_n, a_n, a_n, a_n]\!]$$

είναι συνδυασμοί με επαναλήψεις των στοιχείων του συνόλου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ ανά 4, (όπου $n \geq 4$).

3.3.9. Πρόταση. “ Οι συνδυασμοί με επαναλήψεις των στοιχείων του συνόλου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots,$ $\alpha_n\}$ ανά r είναι σε πλήθος ίσο με

$$C(n+r-1, r) = \binom{n+r-1}{r} \text{”}. \tag{2}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σύνολο με $r-1$ στοιχεία

$$B_{r-1}^b = \{b_1, b_2, \cdots, b_{r-1}\},$$

τα οποία καλούμε **“ μπαλλαντέρ ”** και ας πάρουμε την ένωση

$$A \cup B_{r-1}^b = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, b_1, b_2, \cdots, b_{r-1}\}\ . \tag{3}$$

Επειδή το σύνολο (3) έχει $n+r-1$ στοιχεία, αυτό έχει και $C(n+r-1, r)$ σε πλήθος $r-$ υποσύνολα (δηλ. υποσύνολα με r −στοιχεία). Ένα τέτοιο υποσύνολο είναι της μορφής

$$\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, a_{i_\kappa}, b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_\lambda}\} \tag{4}$$

όπου $\kappa \geq 1$ και $\kappa + \lambda = r$. Παρατηρούμε τώρα ότι αν τα στοιχεία $b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_\lambda}$ (δηλ. τα στοιχεία-μπαλλαντέρ) του συνόλου (4) αντικατασταθούν από στοιχεία του συνόλου A, τότε το υποσύνολο (4) γίνεται ένας συνδυασμός με επαναλήψεις των στοιχείων του A ανά r. Αντίστροφα, αν τα επαναλαμβανόμενα στοιχεία(εφόσον υπάρχουν) ενός συνδυασμού με επαναλήψεις των στοιχείων του A ανά r, αντικατασταθούν με στοιχεία μπαλλαντέρ τότε ο συνδυασμός μετατρέπεται σε υποσύνολο του συνόλου $A \cup B_{r-1}^b$. Έτσι, το πλήθος των συνδυασμών με επαναλήψεις των στοιχείων του A ανά r ισούται με το πλήθος των $r-$ υποσυνόλων του συνόλου $A \cup B_{r-1}^b$, δηλ. ισούται με

$$C(n+r-1, r).$$

3.3.10. Παράδειγμα. Ένα αρτοποιείο παράγει 6 διαφορετικά είδη ψωμιού, των 350 gr. το τεμάχιο. Να βρεθεί με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να αγοράσουμε 8 τεμάχια ψωμιών από το αρτοποιείο αυτό.

Λύση. Επειδή κάθε διαφορετικός τρόπος εκλογής 8 τεμαχίων ψωμιού αντιστοιχεί σε έναν συνδυασμό με επανάληψη των 6 αντικειμένων ανά 8, το ζητούμενο πλήθος των διαφορετικών τρόπων αγοράς ισούται με τους συνδυασμούς με επανάληψη των 6 αντικειμένων ανά 8. Επομένως είναι ίσο με

$$C(6+8-1, 8) = \binom{13}{8} = \frac{13!}{(8!)\times(5!)} = \frac{9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 9\cdot11\cdot13 = 1.287.$$

3.3.11. Τοποθέτηση n ομοίων αντικειμένων σε r διαφορετικά δοχεία.

Θεωρούμε n ($\in \mathbb{N}$) όμοια αντικείμενα

$$\overbrace{b\ b\ \cdots\ b}^{n-\sigma\varepsilon\ \pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma} \tag{1}$$

και r αριθμημένα (άρα διαφορετικά) δοχεία

$$\varDelta_1, \varDelta_2, \cdots, \varDelta_r, \tag{2}$$

όπου $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Τοποθετούμε τώρα με κάποιο τρόπο ένα-ένα τα αντικείμενα (1) στα δοχεία (2). Μετά από κάθε τοποθέτηση ενός αντικειμένου, γράφουμε επί ευθείας γραμμής το δοχείο $\varDelta_i$ στο οποίο γίνεται η τοποθέτηση αυτή. Το δοχείο $\varDelta_i$ γράφεται στα αριστερά του $\varDelta_j$, για όλα τα $i < j$. Αν στο δοχείο $\varDelta_i$ έχουμε και δεύτερη ή τρίτη κ.λπ. τοποθέτηση αντικειμένου γράφουμε και δεύτερη ή και τρίτη κ.λπ. φορά το σύμβολο $\varDelta_i$ δίπλα στο προηγούμενο (ή στα δύο προηγούμενα) κ.λπ. Μετά την τοποθέτηση όλων των αντικειμένων (1) στα δοχεία, θα προκύψει ένα "σχήμα" της μορφής

$$\overbrace{\varDelta_1\varDelta_1 \cdots \varDelta_1}^{\kappa_1-\varphi o\rho\,\acute{\varepsilon}\varsigma}\overbrace{\varDelta_2\varDelta_2 \cdots \varDelta_2}^{\kappa_2-\varphi o\rho\,\acute{\varepsilon}\varsigma} \cdots \overbrace{\varDelta_r\,\varDelta_r \cdots \varDelta_r}^{\kappa_r-\varphi o\rho\,\acute{\varepsilon}\varsigma}, \tag{3}$$

όπου $0 \leq \kappa_i, \forall\, i$ και $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_r = n$. Όπως είναι φανερό, το σχήμα (3) αντιστοιχεί σε έναν συνδυασμό με επαναλήψεις των r αντικειμένων ($\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\cdots, \varDelta_r$) ανά n. Τέλος, επειδή η αντιστοιχία αυτή είναι $1-1$ και επί, το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης των n όμοιων αντικειμένων (1) σε r αριθμημένα δοχεία είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών με επαναλήψεις των r αντικειμένων ανά n, δηλ. ίσο με

$$C(r+n-1, n) = \binom{r+n-1}{n} \left[= \binom{r+n-1}{r-1}\right].$$

Σημειώνουμε το συμπέρασμα αυτό σαν:

3.3.12. Πρόταση. "Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης n όμοιων αντικειμένων σε r αριθμημένα (διαφορετικά) δοχεία είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών με επαναλήψεις των r αντικειμένων ανά n, δηλ. ίσο με

$$C(r+n-1, n)."$$

3.7.22. Παράδειγμα. Να βρεθούν η μέση τιμή και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί διωνυμική κατανομή, δηλ. που έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$f_X(\kappa) = \binom{\nu}{\kappa} p^\kappa q^{\nu-\kappa},\ \kappa = 0, 1, 2, \cdots, \nu,$$

όπου $\nu \in \mathbb{N}$ και $q = 1 - p$.

Λύση. Η μέση τιμή της X είναι η

$$\mu = \textstyle\sum_{\kappa=0}^{\kappa=\nu} \kappa \cdot f_X(\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\nu} \kappa \cdot \binom{\nu}{\kappa} p^\kappa q^{\nu-\kappa} = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\nu} \kappa \cdot \binom{\nu}{\kappa} p^\kappa q^{\nu-\kappa}.$$

Επειδή

$$\kappa \cdot \binom{\nu}{\kappa} = \kappa \cdot \frac{\nu!}{(\kappa!) \times (\nu-\kappa)!} = \nu \cdot \frac{(\nu-1)!}{[(\kappa-1)!] \times (\nu-\kappa)!} = \nu \cdot \binom{\nu-1}{\kappa-1},$$

έχουμε

$$\mu = \textstyle\sum_{\kappa=1}^{\kappa=\nu} \nu \cdot \binom{\nu-1}{\kappa-1} p^\kappa q^{\nu-\kappa} \overset{\kappa-1=\lambda}{\cong} \nu \left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-1} \binom{\nu-1}{\lambda} p^{\lambda+1} q^{(\nu-1)-\lambda}\right] =$$

$$= \nu \cdot p \cdot \left[\textstyle\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-1} \binom{\nu-1}{\lambda} p^\lambda q^{(\nu-1)-\lambda}\right] = \nu \cdot p \cdot (p+q)^{\nu-1} = \nu \cdot p \cdot 1^{\nu-1} = \nu \cdot p\,.$$

Η διακύμανση της X είναι η

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\nu}(\kappa-\mu)^2\, f_X(\kappa).$$

Επειδή

$$(\kappa-\mu)^2 = \kappa^2 - 2\kappa\mu + \mu^2 = \kappa(\kappa-1) + (1-2\mu)\kappa + \mu^2 \text{ και}$$

$$\kappa(\kappa-1)\cdot\binom{\nu}{\kappa} q^{\nu-\kappa}p^{\kappa} = \nu(\nu-1)\cdot p^2\cdot\binom{\nu-2}{\kappa-2} q^{(\nu-2)-(\kappa-2)}p^{\kappa-2},$$

έχουμε

$$Var(X) = \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\nu}[\kappa(\kappa-1)+(1-2\mu)\kappa+\mu^2]\binom{\nu}{\kappa} q^{\nu-\kappa}p^{\kappa} =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\nu}\kappa(\kappa-1)\binom{\nu}{\kappa} q^{\nu-\kappa}p^{\kappa} + (1-2\mu)\sum_{\kappa=0}^{\kappa=\nu}\kappa\cdot\binom{\nu}{\kappa} q^{\nu-\kappa}p^{\kappa} + \mu^2\cdot\sum_{\kappa=0}^{\kappa=\nu}\binom{\nu}{\kappa} q^{\nu-\kappa}p^{\kappa} =$$

$$= \nu(\nu-1)p^2\left[\sum_{\kappa=2}^{\kappa=\nu-2}\binom{\nu-2}{\kappa-2} q^{(\nu-2)-(\kappa-2)}p^{\kappa-2}\right] + (1-2\mu)\cdot\mu + \mu^2\cdot 1 =$$

$$\nu(\nu-1)p^2(q+p)^{\nu-2} + \mu - 2\mu^2 + \mu^2 = \nu(\nu-1)p^2 + \nu p - \nu^2p^2 =$$

$$= \nu p - \nu p^2 = \nu p(1-p) = \nu pq.$$

Άσκηση 4.

Δέκα Η/Υ , οι $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, Y_8, Y_9, Y_{10}$, συνδέονται με 6 εκτυπωτές, E_1, E_2 , E_3, E_4, E_5, E_6, έτσι ώστε το δίκτυο των συνδέσεων να έχει την παρακάτω ιδιότητα (Ι).

Ιδιότητα (Ι). « Έξι οποιδήποτε Η/Υ μπορούν ταυτόχρονα να συνδεθούν με τους 6 εκτυπωτές»

Να βρεθεί πόσες τουλάχιστον συνδέσεις (ή, ισοδύναμα, πόσα τουλάχιστον καλώδια τα οποία συνδέουν έναν Η/Υ με έναν εκτυπωτή, το καθένα) χρειάζονται για να έχει το δίκτυο την ιδιότητα (Ι).

Λύση. Παριστάνουμε με το σύμβολο $Y_i \leftrightarrow E_j$ τη σύνδεση του υπολογιστή Y_i με τον εκτυπωτή E_j, στη συνέχεια κάνουμε τις 6 συνδέσεις

$$Y_1 \leftrightarrow E_1, Y_2 \leftrightarrow E_2, Y_3 \leftrightarrow E_3, Y_4 \leftrightarrow E_4, Y_5 \leftrightarrow E_5, Y_6 \leftrightarrow E_6 \qquad (1)$$

και κατόπιν τις $4\cdot 6 = 24$ συνδέσεις

$$Y_i \leftrightarrow E_j\ ,\ \forall\, i = 7,8,9,10,\ j = 1,2,3,4,5,6, \qquad (2)$$

με τις οποίες συνδέονται καθένας από τους 4 υπολογιστές Y_7, Y_8, Y_9, Y_{10} με όλους τους εκτυπωτές. Όπως είναι φανερό, το παραπάνω δίκτυο με τις $6 + 24 = 30$ συνδέσεις (1) & (2) έχει την ιδιότητα (Ι). Απομένει να δείξουμε ότι ο αριθμός 30 είναι ο ελάχιστος αριθμός συνδέσεων ενός δικτύου, για να έχει το δίκτυο την ιδιότητα (Ι). Για το σκοπό αυτόν θεωρούμε ένα δίκτυο Δ με 29 συνδέσεις και αποδεικνύουμε ότι αυτό δεν μπορεί να έχει την ιδιότητα (Ι). Πράγματι, τότε στο δίκτυο Δ υπάρχει υποχρεωτικά ένας τουλάχιστον εκτυπωτής ο οποίος έχει το πολύ 4 συνδέσεις, γιατί στην αντίθετη περίπτωση κάθε εκτυπωτής θα είχε από 5 τουλάχιστον συνδέσεις στο Δ και όλοι οι εκτυπωτές θα είχαν τουλάχιστον $6 \cdot 5 = 30$ συνδέσεις στο Δ, αντίφαση. Ονομάζουμε τώρα E_{j_0} τον εκτυπωτή ο οποίος συνδέεται με 4 το πολύ Η/Υ (στο Δ) και παρατηρούμε ότι ο εκτυπωτής αυτός (E_{j_0}) δεν συνδέεται με τουλάχιστον 6 (Η/Υ). Αν

$$Y_{i_1},\ Y_{i_2}, Y_{i_3},\ Y_{i_4} Y_{i_5},\ Y_{i_6} \tag{3}$$

είναι 6 από τους Η/Υ οι οποίοι δεν συνδέονται με τον E_{j_0}, τότε η εξάδα αυτή (3) των Η/Υ δεν έχει την ιδιότητα (Ι), αφού κανένας από αυτούς δεν συνδέεται με τον εκτυπωτή E_{j_0} και άρα το δίκτυο Δ δεν έχει την ιδιότητα (Ι).

Άσκηση 13.

Τέσσερεις άνδρες, οι α_1, α_2, α_3, α_4 και πέντε γυναίκες, οι γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5 πρέπει να μπούν σε σειρά, ό ένας πίσω από τον άλλον, μπροστά σε ένα ταμείο για να πληρώσουν. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν

(α) οι γυναίκες προηγούνται των ανδρών;

(β) όλοι οι άνδρες κατέχουν γειτονικές θέσεις;

(γ) όλες οι γυναίκες κατέχουν γειτονικές θέσεις;

(δ) κανένα ζεύγος γυναικών δεν κατέχει γειτονικές θέσεις;

(ε) μεταξύ του άνδρα α_2 και της γυναίκας γ_2 παρεμβάλλονται 3 άτομα;

(**Λύση. (α)** Μια τέτοια τοποθέτηση θα είναι της μορφής

$$\text{ΤΑΜΕΙΟ} \ \leftarrow \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ \gamma_{i_3}\gamma_{i_4}\gamma_{i_5}\ a_{j_1}\ a_{j_2}\ a_{j_3}a_{j_4}, \tag{1}$$

όπου $\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ \gamma_{i_3}\gamma_{i_4}\gamma_{i_5}$ είναι μια μετάθεση των γυναικών μεταξύ τους και $a_{j_1}\ a_{j_2}\ a_{j_3}a_{j_4}$ είναι μια μετάθεση των ανδρών μεταξύ τους. Επειδή υπάρχουν 5! μεταθέσεις των γυναικών μεταξύ τους και 4! μεταθέσεις των ανδρών μεταξύ τους, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $(5!) \times (4!) = (120) \times (24) = 2.880$ διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης της μορφής (1).

(β) Συμβολίζουμε με $A = a_{j_1}\ a_{j_2}\ a_{j_3}a_{j_4}$ μια τοποθέτηση των 4 ανδρών σε γειτονικές θέσεις και παρατηρούμε ότι τα 6 σύμβολα $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \gamma_{i_3}, \gamma_{i_4}, \gamma_{i_5}$ και Α μπορούν να τοποθετηθούν μπροστά στο ταμείο με 6! διαφορετικούς τρόπους(όπως π.χ. τον

$$\text{ΤΑΜΕΙΟ} \leftarrow \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}A\ \gamma_{i_3}\gamma_{i_4}\gamma_{i_5}\ ). \tag{2}$$

Επειδή από κάθε μία μετάθεση των παραπάνω 6 συμβόλων παίρνουμε, μεταθέτοντας μόνο τους άνδρες μεταξύ τους, 4! μεταθέσεις του ζητούμενου τύπου, από όλες τις μεταθέσεις των 6 αντικειμένων θα πάρουμε $(6!) \times (4!) = (720) \times (24) = 17.280$ μεταθέσεις του ζητούμενου τύπου. Με άλλα λόγια, υπάρχουν 17.280 τρόποι τοποθέτησης των ανδρών και γυναικών σε μια γραμμή μπροστά στο ταμείο, στις οποίες οι άνδρες(όλοι) κατέχουν γειτονικές θέσεις.

(γ) Απάντηση : $(5!)\times(5!) = (120) \times (120) = 14.400$

(δ) Για να μην κατέχουν δύο γυναίκες διαδοχικές θέσεις, πρέπει μεταξύ δύο οποιονδήποτε γυναικών να παρεμβάλλεται ένας τουλάχιστον άνδρας. Έτσι, υποχρεωτικά όλοι οι άνδρες θα τοποθετηθούν μεταξύ δύο γυναικών και η ζητούμενη τοποθέτησή τους θα είναι μία και μόνη η:

$$\text{ΤΑΜΕΙΟ} \leftarrow \gamma_{i_1} a_{j_1} \gamma_{i_2}\ a_{j_2} \gamma_{i_3} a_{j_3} \gamma_{i_4} a_{j_4} \gamma_{i_5}. \qquad (3)$$

Μεταθέτοντας τώρα μόνο τις γυναίκες μεταξύ τους παίρνουμε 5! μεταθέσεις στις οποίες δύο οποιεσδήποτε γυναίκες δεν κατέχουν γειτονικές θέσεις. Ανάλογα, από κάθε μία τέτοια μετάθεση, μεταθέτοντας μόνο τους άνδρες μεταξύ τους, παίρνουμε 4! μεταθέσεις του ζητούμενου τύπου και άρα υπάρχουν

$$(5!)\times(4!) = 2.880$$

τρόποι τοποθέτησης των ανδρών και γυναικών μπροστά στο ταμείο σε σειρά έτσι ώστε δύο οιποιεσδήποτε γυναίκες να μην κατέχουν γειτονικές θέσεις.

(ε) Συμβολίζουμε με

$$\text{ΤΑΜΕΙΟ} \leftarrow \alpha_2 xxx\gamma_2 xxxx \qquad (4)$$

την τοποθέτηση των ανδρών και γυναικών με τον άνδρα α_2 να κατέχει την 1η θέση και τη γυναίκα γ_2 να κατέχει την 5^η θέση και παρατηρούμε ότι στην τοποθέτηση (4) οι 7 θέσεις που καλύπτονται με x μπορούν να καλυφθούν από οποιοδήποτε από τα υπόλοια 7 άτομα. Με άλλα λόγια, υπάρχουν 7! τρόποι τοποθετησης των ανδρών και γυναικών της μορφής (4). Παρατηρούμε, ακόμη, ότι η "δυάδα" $\alpha_2 - - - \gamma_2$ μπορεί να πάρει και τις θέσεις

$$x\alpha_2 xxx\gamma_2 xxx,\ xx\alpha_2 xxx\gamma_2 xx,\ xxx\alpha_2 xxx\gamma_2 x,\ xxxx\alpha_2 xxx\gamma_2$$

μέσα στην 9-άδα και επομένως παίρνουμε από την παραπάνω δυάδα $5 \times (7!)$ τρόπους τοποθέτησης. Επειδή όμως βρίσκουμε και άλλους τόσους ακριβώς τρόπους τοποθέτησης, αν ξεκινήσουμε τώρα από την τοποθέτηση

$$\gamma_2 xxx\alpha_2 xxxx,$$

οι διάφοροι τρόποι τοποθέτησης των 9 ανδρών και γυναικών μπροστά στο ταμείο σε σειρά έτσι ώστε μεταξύ των α_2 και γ_2 να παρεμβάλλονται 3 άλλα άτομα είναι σε πλήθος

$$2\times 5 \times (7!) = 50.400.$$

Άσκηση 27.

Θεωρούμε ένα σύνολο 80 ατόμων, τα οποία έχουν διαφορετικά ύψη. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να εκλέξουμε δύο ομάδες των 10 ατόμων η κάθε μία, έτσι ώστε το ψηλότερο άτομο της $1^{ης}$ ομάδας να είναι πιο κοντό από το κοντύτερο άτομο της δεύτερης ομάδας.

(**Λύση.** Τοποθετούμε τα 80 άτομα επί ευθείας με σειρά αυξανόμενου ύψους και τα αριθμούμε παίρνοντας τη μετάθεση

$$1, 2, 3, 4, \cdots ,77, 78, 79, 80. \tag{1}$$

Κατόπιν τα χωρίζουμε σε 8 ομάδες των 10 ατόμων από αριστερά προς τα δεξιά, παίρνοντας τις ομάδες

$$O_1 = < 1\ 2\ 3\ \cdots 9\ 10 >,\ O_2 = < 11, 12, \cdots, 20 > \text{ κ.ο.κ. } O_8 = < 71, 72, \cdots, 80 >.$$

Επιλέγουμε τώρα σαν πρώτη την ομάδα O_1 . Σαν δεύτερη ομάδα επιλέγουμε μία –μία όλες τις υπόλοιπες και έτσι έχουμε τα παρακάτω 7 ζεύγη ομάδων,

$$(O_1, O_2), (O_1, O_3), \cdots, (O_1, O_8)$$

τα οποία έχουν την απαιτούμενη ιδιότητα. Επιλέγουμε κατόπιν σαν πρώτη την ομάδα O_2 και σαν δεύτερες τις ομάδες $O_3, O_4, \cdots, O_8$ και έτσι έχουμε τα παρακάτω 6 ζεύγη ομάδων,

$$(O_2, O_3), (O_2, O_4), \cdots, (O_2, O_8),$$

τα οποία έχουν την απαιτούμενη ιδιότητα. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτόν θα πάρουμε 5

ακόμη ζεύγη, 4 ακόμη ζεύγη, 3 ακόμη ζεύγη, 2 ακόμη ζεύγη και τέλος 1 ακόμη ζεύγος που όλα θα έχουν την απαιτούμενη ιδιότητα. Έτσι, θα έχουμε πάρει συνολικά

$$7+6+5+4+3+2+1 = \frac{7\times(7+1)}{2} = \frac{7\cdot 8}{2} = 28$$

ζεύγη τα οποία θα έχουν την απαιτούμενη ιδιότητα.

Άσκηση 48.

(α) Να βρεθεί το πλήθος των ακεραίων μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 23. \tag{1}$$

(β) Πόσες από τις λύσεις αυτές της (α) επαληθεύουν τις συνθήκες

$$x_i \geq 2, \forall\, i = 1, 2, 3, 4, 5;$$

(γ) Το ίδιο με τη (β) για τις συνθήκες

$$x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 3,\ x_3 \geq 4,\ x_4 \geq 5,\ x_5 \geq 6.$$

(δ) Το ίδιο με τη (β) για τη συνθήκη $x_1 < 4$.

(**Λύση : (α)** Το πλήθος των ακεραίων μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης (1) ισούται με το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης 23 ομοίων αντικειμένων σε 5 αριθμημένα (

άρα διαφορετικά) δοχεία (τις μεταβλητές) . Σύμφωνα με την § 3.3.11, το πλήθος αυτό ισούται με

$$\binom{23+5-1}{23} = \binom{27}{23} = \frac{(27)!}{[(23)!]\times 4!} = \frac{(24)\times(25)\times(26)\times(27)}{2\times 3\times 4} = 17.550.$$

(β) Για να ικανοποιούνται οι συνθήκες $x_i \geq 2, \forall\, i$ πρέπει πρώτα να τοποθετηθούν από δύο αντικείμενα στα 5 δοχεία (μεταβλητές). Έτσι θα “δαπανηθούν” $2\times 5 = 10$ αντικείμενα και θα μείνουν για (ελεύθερη) κατανομή σε όλα τα δοχεία (5) τα υπόλοιπα $23 - 10 = 13$ αντικείμενα. Σύμφωνα με την § 3.3.11, αυτό γίνεται με

$$\binom{13+5-1}{13} = \binom{17}{13} = \frac{(17)!}{[(13)!]\times(4!)} = \frac{(14)\times(15)\times(16)\times(17)}{2\times 3\times 4} = 2.380 \text{ (τρόπους).}$$

(γ) Όπως και στη (β), πρέπει πρώτα να τοποθετηθούν 2 αντικείμενα στο 1^o δοχείο, 3 αντικ. στο 2^o δοχείο, 4 αντικ. στο 3^o δοχείο, 5 αντικ. στο 4^o δοχείο και 6 αντικ. στο 5^o δοχείο. Έτσι θα “δαπανηθούν” $2+3+4+5+6 = 20$ αντικείμενα και θα μείνουν για (ελεύθερη) κατάνομή σε όλα τα δοχεία (5) τα υπόλοιπα $23 - 20 = 3$ αντικείμενα. Σύμφωνα με την § 3.3.11, αυτό γίνεται με

$$\binom{3+5-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(3!)\times(4!)} = \frac{5\times 6\times 7}{2\times 3} = 35 \text{ (τρόπους).}$$

(δ) Επειδή $x_1 < 4 \Leftrightarrow x_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$ και επειδή:

(1) αν $x_1 = 0$, τότε πρέπει τα 23 αντικ. να κατανεμηθούν σε 4 δοχεία,

(2) αν $x_1 = 1$, τότε πρέπει τα 22 αντικ. να κατανεμηθούν σε 4 δοχεία

(3) αν $x_1 = 2$, τότε πρέπει τα 21 αντικ. να κατανεμηθούν σε 4 δοχεία

(4) αν $x_1 = 3$, τότε πρέπει τα 20 αντικ. να κατανεμηθούν σε 4 δοχεία

το πλήθος των ακεραίων μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης (1) που επαληθεύουν τη συνθήκη (δ) είναι ίσο με

$$\binom{23+4-1}{23} + \binom{22+4-1}{22} + \binom{21+4-1}{21} + \binom{20+4-1}{20} =$$

$$= \binom{26}{23} + \binom{25}{22} + \binom{24}{21} + \binom{23}{20} = 2.600 + 2.300 + 2.024 + 1.771 = 8.695.$$

Άσκηση 60.

Στο παιγνίδι Poker λέμε ότι ένας παίκτης “**πέτυχε ζεύγη**” αν δύο από τα φύλλα που κρατά είναι όμοια (π.χ. δύο 9—άρια), δύο από τα υπόλοιπα είναι κι αυτά όμοια αλλά ανόμοια των δύο πρώτων (π.χ. δύο ντάμες) και το 5^o φύλλο του είναι ανόμοιο των προηγούμενων (π.χ. ένας άσσος).

Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα μοίρασμα των φύλλων ο παίκτης Χ να πετύχει ζεύγη.

(**Λύση.** Ονομάζουμε Β το ενδεχόμενο να πετύχει ο παίκτης Χ ζεύγη και παρατηρούμε ότι επειδή στην τράπουλα υπάρχουν 13 τετράδες όμοιων φύλλων και επειδή δεν μας ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης των ζευγών στα φύλλα ενός παίκτη, από τις 13 αυτές τετράδες μπορούμε να επιλέξουμε τις δύο με

$$\binom{13}{2} = \frac{(13)!}{(2!) \times (11!)} = 6 \times 13 = 78$$

διαφορετικούς τρόπους. Παρατηρούμε, ακόμη, ότι από μια συγκεκριμένη τετράδα όμοιων φύλλων μπορούμε να επιλέξουμε τα δύο (δηλ. ένα ζεύγος) με $\binom{4}{2} = 6$ διαφορετικούς τρόπους και άρα από δύο συγκεκριμένες τετράδες μπορούμε να επιλέξουμε δύο ζεύγη, ένα από κάθε τετράδα, με $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 36$ διαφορετικούς τρόπους. Το 5^{o} φύλλο ενός παίκτη επειδή πρέπει να μην είναι όμοιο με τα φύλλα του $1^{ου}$ ούτε με τα φύλλα του $2^{ου}$ ζεύγους, αυτό δεν μπορεί να ανήκει στην τετράδα των όμοιων με το 1^{o} ζεύγος φύλλων ούτε στην τετράδα των όμοιων με το 2^{o} ζεύγος φύλλων και άρα μπορεί να είναι ένα από τα υπόλοιπα $52 - (4 + 4) = 44$ φύλλα. Ο κανόνας του γινομένου μας βεβαιώνει τώρα ότι τα ευνοϊκά για το Β απλά ενδεχόμενα είναι σε πλήθος

$$\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 44 = 78 \times 36 \times 44 = 123.552.$$

Τέλος, επειδή το πλήθος όλων των απλών ενδεχομένων είναι 2.598.960 (Βλέπε προηγούμενη Άσκηση 60), η πιθανότητα του ενδεχομένου Β είναι η

$$p(B) = \frac{123.552}{2.598.960} \cong 0{,}0475.\ )$$

Άσκηση 62.

Στο παιγνίδι του Poker (Βλέπε Άσκηση 59) λέμε ότι ο παίκτης Χ πέτυχε “**τρία όμοια**” αν στα 5 φύλλα που κρατά περιλαμβάνονται τρία όμοια και τα άλλα δύο είναι ανόμοια με αυτά της τριάδας και ανόμοια μεταξύ τους.

Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα μοίρασμα των φύλλων ο παίκτης Χ να πετύχει « τρία όμοια » και στη συνέχεια να εξηγηθεί γιατί στο Poker τα τρία όμοια κερδίζουν « τα ζεύγη ».

(**Λύση.** Ονομάζουμε Γ το ενδεχόμενο να πετύχει ο παίκτης Χ “τρία όμοια” και παρατηρούμε πρώτα ότι στην τράπουλα υπάρχουν 13 τετράδες όμοιων φύλλων και ότι από τα τέσσερα όμοια φύλλα εκλέγονται τα 3 με $\binom{4}{3} = 4$ διαφορετικούς τρόπους. Επομένως σε μία τράπουλα μπορεί να δημιουργηθούν $4 \times 13 = 52$ διαφορετικές τριάδες όμοιων φύλλων. Παρατηρούμε στη συνέχεια ότι μια ορισμένη τριάδα όμοιων φύλλων, π.χ. η $(\varphi_i^1, \varphi_i^2, \varphi_i^3)$, πρέπει να συμπληρωθεί με δύο ακόμη φύλλα, τα χ, ψ. Το πρώτο φύλλο χ είναι διαφορετικό από εκείνα της τριάδας, αλλά και ανόμοιο με αυτά και άρα είναι διαφορετικό από τα $\varphi_i^1, \varphi_i^2, \varphi_i^3, \varphi_i^4$. Επομένως για το φύλλο χ έχουμε $52 - 4 = 48$ διαφορετικές επιλογές. Επειδή το δεύτερο φύλλο ψ πρέπει κι αυτό να είναι διαφορετικό από τα $\varphi_i^1, \varphi_i^2, \varphi_i^3, \varphi_i^4$ και επιπλέον διαφορετικό και από τα 4 όμοια με το χ φύλλα, για το ψ έχουμε $52-4-4=44$ διαφορετικές επιλογές. Σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, τα δύο φύλλα χ, ψ μπορούν να συμπληρώσουν μια τριάδα όμοιων φύλλων με $48 \times 44 = 2.112$ διαφορετικούς τρόπους και άρα υπάρχουν

$$52 \times 2.112 = 109.824$$

ευνοϊκά για το Γ απλά ενδεχόμενα. Τέλος, επειδή όταν μοιράζονται 5 φύλλα σε κάθε παίκτη ο δειγματικός χώρος περιέχει 2.598.960 απλά ενδεχόμενα, η πιθανότητα ένας παίκτης να πετύχει τρία όμοια είναι ίση με

$$\frac{109.824}{2.598.960} \cong 0{,}04226.$$

Εξήγηση: Επειδή η πιθανότητα να πετύχει ένας παίκτης "ζεύγη" είναι περίπου ίση με 0,0475 (Βλέπε Άσκηση 60) και επειδή $0{,}0475 > 0{,}04226$, η πιθανότητα να πετύχει ένας παίκτης "ζεύγη" είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να πετύχει " τρία όμοια ". Έτσι, το ενδεχόμενο να πετύχει ένας παίκτης " τρία όμοια " είναι πιο σπάνιο από το ενδεχόμενο να πετύχει "ζεύγη" και επειδή στο Poker μεταξύ δύο ενδεχομένων κερδίζει το πιο σπάνιο, "τρία όμοια " φύλλα κερδίζουν τα "ζεύγη".

Άσκηση 77.

Εννέα (9) ζέυγη παπουτσιών είναι πεταγμένα, χωρίς καμία σειρά, σε αποθηκευτικό χώρο. Παίρνουμε τυχαία επτά (7) από αυτά. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων :

$$A = < \text{δεν πετυχαίνουμε κανένα σωστό ζευγάρι} >$$

$$B = < \text{πετυχαίνουμε ένα μόνο σωστό ζευγάρι} > .$$

(**Λύση.** Συμβολίζουμε με

$$\pi_\alpha^1, \pi_\alpha^2, \cdots, \pi_\alpha^8, \pi_\alpha^9 \qquad (1)$$

τα αριστερά παπούτσια και με

$$\pi_\delta^1, \pi_\delta^2, \cdots, \pi_\delta^8, \pi_\delta^9 \qquad (2)$$

τα δεξιά παπούτσια. Παρατηρούμε πρώτα ότι επειδή 7 αντικείμενα εκλέγονται από τα 18 με $\binom{18}{7}$ διαφορετικούς τρόπους, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από

$$\binom{18}{7} = \frac{(18)!}{(7!)\times[(11)!)]} = \frac{12\times13\times14\times15\times16\times17\times18}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7} = 13\times 2 \times 4 \times 17 \times 18 = 31.824$$

απλά ενδεχόμενα. Παρατηρούμε στη συνέχεια, ότι από τα 7 παπούτσια που θα επιλέξουμε ορισμένα θα ανήκουν στην ομάδα (1) και τα υπόλοιπα στην ομάδα (2).

Ας βρούμε τώρα τα ευνοϊκά για το Α απλά ενδεχόμενα. Ευνοϊκά για το Α απλά ενδεχόμενα παίρνουμε στις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) Επιλέγουμε όλα (και τα 7) παπούτσια από την ομάδα (1). Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{9}{7}$ διαφορετικούς τρόπους.

(2) Επιλέγουμε τα 6 από την ομάδα (1) και το 7^o από την ομάδα (2). Υποθέτουμε ότι η 6-άδα που επιλέξαμε είναι η $\pi_\alpha^1\,\pi_\alpha^2 \cdots \pi_\alpha^6$. Από την ομάδα (2) δεν επιτρέπεται να επιλέξουμε από τα $\pi_\delta^1 \pi_\delta^2 \cdots \pi_\delta^6$, αλλά μόνο από τα τρία $\pi_\delta^7, \pi_\delta^8, \pi_\delta^9$. Επειδή 6 αντικείμενα από τα 9 επιλέγονται με $\binom{9}{6}$ τρόπους και 1 από 3 αντικείμενα επιλέγεται με $\binom{3}{1}$ τρόπους, 6 αντικείμενα από 9 και 1 από τα 3 επιλέγονται με $\binom{9}{6} \cdot \binom{3}{1}$ διαφορετικούς τρόπους.

3)Ανάλογα, διαπιστώνουμε ότι επιλέγουμε 5 από την ομάδα (1) και 2 από την ομάδα (2) με

$\binom{9}{5} \cdot \binom{4}{2}$ διαφορετικούς τρόπους.

4) Με τον τρόπο αυτόν αποδεικνύουμε ότι τα ευνοϊκά για το Α απλά ενδεχόμενα είναι σε πλήθος

$$\kappa = \binom{9}{7} + \binom{9}{6} \cdot \binom{3}{1} + \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{2} + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} + \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{4} + \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{5} + \binom{9}{1} \cdot \binom{8}{6} + \binom{9}{0} \cdot \binom{9}{7}$$

Με την εκτέλεση των πράξεων βρίσκουμε $\kappa = 4.608$ και άρα

$$p(A) = \frac{\kappa}{31.824} = \frac{4.608}{31.824} \cong 0{,}145\,.$$

Για να βρούμε τα απλά για το Β ενδεχόμενα, υποθέτουμε ότι έχουμε πρώτα επιλέξει το ζεύγος $(\pi_\alpha^1\,, \pi_\delta^1)$. Τότε πρέπει να επιλέξουμε και άλλα $7-2 = 5$ παπούτσια από τα

$$\pi_\alpha^2, \pi_\alpha^3, \cdots, \pi_\alpha^9 \quad \text{και} \quad \pi_\delta^2, \pi_\delta^3, \cdots, \pi_\delta^9 \tag{3}$$

Οι δυνατότητες επιλογής που έχουμε είναι τότε σε πλήθος

$$\lambda = \binom{8}{5} + \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{1} + \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} + \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} + \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} + \binom{8}{0} \cdot \binom{8}{5} = 1.792\,.$$

Επειδή όμως ένα σωστό ζεύγος μπορεί να επιλεγεί από τα 18 παπούτσια με 9 διαφορετικούς τρόπους, τα ευνοϊκά για το Β απλά ενδεχόμενα είναι σε πλήθος 9λ. Επομένως η πιθανότητα του Β είναι η $p(B) = \frac{9\lambda}{31.824} = \frac{16.128}{31.824} \cong 0{,}506$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1.35. Θεώρημα. Ας είναι $\Gamma = (K, A)$ ένα γράφημα με πλήθος ακμών $\nu = |A|$. Το άθροισμα

$S = \sum_{\chi \in K} \deg(\chi)$, των βαθμών όλων των κορυφών του γραφήματος, είναι ίσο με 2ν, δηλ. είναι $S = 2\nu$. Με άλλα λόγια, έχουμε

$$\sum_{\chi \in K} \deg(\chi) = 2 \cdot |A|. \tag{5}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι επειδή κάθε ακμή $\{\chi, \psi\}$ του γραφήματος Γ προσπίπτει στα άκρα της χ και ψ, αυτή δίνει (“προσθέτει”) μια μονάδα στον αριθμό $\deg(\chi)$ και μια μονάδα στον αριθμό $\deg(\psi)$. Έτσι, “προσθέτει” συνολικά $1+1=2$ μονάδες στο άθροισμα $\deg(\chi)+\deg(\psi)$. Επειδή η ύπαρξη της ακμής $\{\chi, \psi\}$ δεν επηρεάζει τους βαθμούς των άλλων κορυφών του γραφήματος, η ακμή αυτή “προσθέτει” ακριβώς 2 μονάδες και στο άθροισμα S των βαθμών όλων των κορυφών του γραφήματος. Επομένως όλες οι ακμές του γραφήματος, οι οποίες είναι σε πλήθος ν “προσθέτουν”

$$\overbrace{2+2+\cdots+2}^{\nu-\pi\rho o\sigma\theta\varepsilon\tau\alpha\ \acute{\iota}o\iota} = 2\cdot\nu$$

μονάδες στον αριθμό S. Τέλος, επειδή όλες οι μονάδες του αριθμού S οφείλονται στις ακμές του γραφήματος, έχουμε

$$S = 2\cdot \nu = 2\cdot |A|.$$

4.1.36. Πόρισμα. Δεν υπάρχει μη κατευθυνόμενο γράφημα του οποίου το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών του να είναι περιττός ακέραιος.

4.1.37. Πόρισμα. Το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος $\Gamma=(K,A)$, είναι άρτιο.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα υποσύνολα

$$K_1 = \{\, \chi \in K \mid \deg(\chi) = \text{περιττός} \,\} \text{ και } K_2 = \{\, \chi \in K \mid \deg(\chi) = \text{άρτιος} \,\}$$

του K και παρατηρούμε ότι είναι $K=K_1\cup K_2$ και $K_1\cap K_2=\emptyset$. Ονομάζουμε S το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών του γραφήματος Γ, S_1 το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών που ανήκουν στο σύνολο K_1 και S_2 το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών που ανήκουν στο σύνολο K_2. Εξαιτίας των σχέσεων $K=K_1\cup K_2$ και $K_1\cap K_2=\emptyset$, έχουμε

$$\sum_{\chi\in K}\deg(\chi) = \sum_{\chi\in K_1}\deg(\chi) + \sum_{\chi\in K_2}\deg(\chi)$$

ή $S=S_1+S_2$ ή, εξαιτίας του (παραπάνω) Θεωρήματος 4.1.35,

$$S_1+S_2 = 2\cdot|A|. \qquad (6)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι επειδή το άθροισμα οποιουδήποτε πλήθους αρτίων αριθμών είναι άρτιος,

έχουμε $S_2=$ άρτιος $=2\cdot\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{N}$ και η ισότητα (6) δίνει

$$S_1 = 2\cdot|A| - S_2 = 2\cdot|A| - 2\cdot\lambda = 2\cdot(|A|-\lambda) = 2\cdot\mu, \text{ όπου } \mu=|A|-\lambda\in\mathbb{N}, \text{ δηλ.}$$

$$S_1 = 2\mu = \text{άρτιος}. \qquad (7)$$

Τέλος, αν το πλήθος των στοιχείων του συνόλου K_1 είναι περιττός αριθμός, τότε επειδή το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών είναι περιττός (Βλέπε § 2.8 Άσκηση 27), θα είναι

$S_1 =$ περιττός, αντίφαση, εξαιτίας της (7). Επομένως το πλήθος των στοιχείων του συνόλου K_1 δεν μπορεί να είναι περιττός και άρα είναι άρτιος (ακέραιος) αριθμός.

4.1.38. Πόρισμα. (Θεώρημα των χειραψιών)

Το πλήθος των ατόμων που ανταλλάσουν περιττού πλήθους χειραψίες σε οποιαδήποτε συνάντηση (συνέδριο) ν ατόμων, είναι άρτιο.

(**Απόδειξη.** Θεωρήστε τα άτομα που μετέχουν στη συνάντηση σαν κορυφές ενός απλού γραφήματος και τις χειραψίες που ανταλλάσσονται σαν ακμές του γραφήματος.)

4.3.8. Παρατήρηση. Θεωρούμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα Γ το οποίο περιέχει ένα μονοπάτι ***Euler*** $\mu(\chi,\psi)$ και παρατηρούμε ότι αν πατήσουμε (ακουμπήσουμε) τη μύτη ενός μολυβιού στην αρχική κορυφή χ και κατόπιν μετακινήσουμε το μολύβι κατά μήκος των ακμών του μονοπατιού χωρίς να χάσει το μολύβι ποτέ την επαφή του με το επίπεδο του γραφήματος (χωρίς δηλ.να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί), τότε μπορούμε να φτάσουμε στην τερματική κορυφή ψ του μονοπατιού, χωρίς να έχουμε σχεδιάσει (ζωγραφίσει) δυο φορές την ίδια ακμή του γραφήματος, αφού ένα μονοπάτι ***Euler*** είναι απλό και δεν περιέχει δυο φορές την ίδια ακμή. Ο τρόπος αυτός του σχεδιασμού λέγεται "**σχεδιασμός με μονοκοντυλιά**". Με άλλα λόγια, λέμε ότι

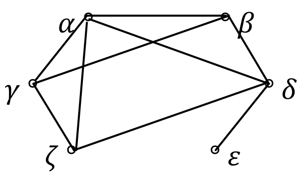
" ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα **σχεδιάζεται** (ζωγραφίζεται, γράφεται) **με μονοκοντυλιά** αν μπορεί να σχεδιαστεί με συνεχή επαφή του μολυβιού με το επίπεδο του γραφήματος και χωρίς να περάσει δυο φορές το μολύβι (πάνω) από την ίδια ακμή".

Ως τώρα έχουμε διαπιστώσει ότι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα το οποίο έχει μονοπάτι ***Euler*** σχεδιάζεται με μονοκοντυλιά. Επειδή και ένα κύκλωμα ***Euler*** είναι μονοπάτι ***Euler***, ένα κύκλωμα ***Euler*** σχεδιάζεται κι αυτό με μονοκοντυλιά. Παρατηρούμε τώρα ότι ισχύει και το αντίστροφο. Πράγματι, αν ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα σχεδιάζεται με μονοκοντυλιά, τότε πρέπει οι ακμές του να αποτελούν ακολουθία τέτοια ώστε η τερματική κορυφή της μιας να είναι η αρχική κορυφή της επόμενης και να μην περιέχεται η ίδια ακμή δυο φορές στο μονοπάτι, δηλ. τότε το γράφημα θα περιέχει απλό μονοπάτι στο οποίο θα ανήκουν όλες οι ακμές του. Με άλλα λόγια, το γράφημα θα περιέχει τότε ένα μονοπάτι (ή κύκλωμα) ***Euler***.

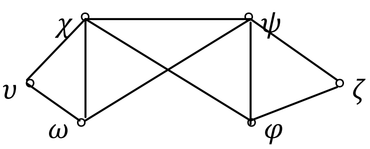
Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω στην:

4.3.9. Παρατήρηση." Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα σχεδιάζεται με μονοκοντυλιά αν, και μόνο αν, περιέχει ένα μονοπάτι (ή κύκλωμα) ***Euler***."

4.3.10. Παράδειγμα. Να εξεταστεί αν τα παρακάτω γραφήματα Γ_1 (Σχ. 22 (α)) και Γ_2 (Σχ. 22 (β)) σχεδιάζονται (γράφονται) με μονοκοντυλιά και σε καταφατική περίπτωση να βρεθεί μια τέτοια μονοκοντυλιά.



Σχ. 23 (α) Γράφημα Γ_1



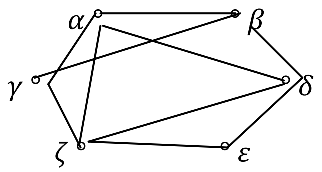
Σχ. 23 (β) Γράφημα Γ_2

Επειδή το γράφημα $Γ_1$ έχει δυο κορυφές περιττού βαθμού (τις $β$ και $γ$) και όλες οι άλλες κορυφές του είναι άρτιου βαθμού, αυτό περιέχει μονοπάτι (αλλά όχι κύκλωμα) ***Euler***. Επομένως σχεδιάζεται με μονοκοντυλιά, η οποία θα αρχίζει από την κορυφή $β$ και θα καταλήγει στη $γ$ ή αντίστροφα. Μια τέτοια μονοκοντυλιά είναι (Σχ. 24 (α)) το μονοπάτι

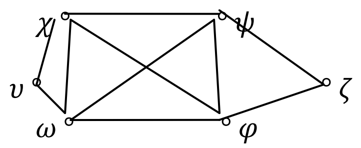
$$μ(γ, β) = (γ, β, α, γ, ζ, α, δ, ζ, ε, δ, β).$$

Επειδή όλες οι κορυφές του γραφήματος $Γ_2$ είναι άρτιου βαθμού, αυτό έχει κύκλωμα ***Euler*** και άρα σχεδιάζεται με μονοκοντυλιά. Μια τέτοια μονοκοντυλιά είναι (Σχ.24 (β)) το κύκλωμα ***Euler***

$$C(χ, χ) = (χ, ψ, ζ, φ, ω, ψ, φ, χ, ω, υ, χ).$$



Σχ. 24 (α) Γράφημα $Γ_1$



Σχ. 24 (β) Γράφημα $Γ_2$

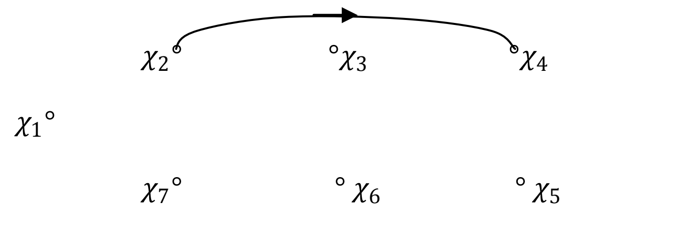
Σχετικά με τα κατευθυνόμενα γραφήματα υπάρχουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να περι-έχουν μονοπάτι ***Euler*** ή κύκλωμα ***Euler***, όπως βεβαιώνει το επόμενο Θεώρημα, το οποίο δεχόμα-στε χωρίς απόδειξη.

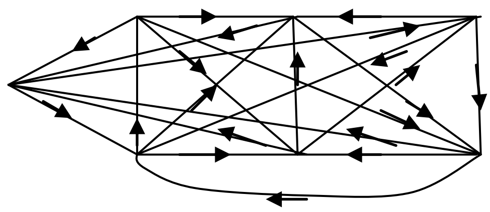
4.4.12. Παράδειγμα. Να βρεθεί ένα μονοπάτι ***Hamilton*** στο πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα $Γ$ (με 7 κορυφές) του παρακάτω Σχ. 32.

Λύση. <u>1</u> **1^oΒήμα.** Επιλέγουμε τυχαία μια ακμή του γρφήματος (ας είναι η $(χ_1, χ_7)$ και την θεωρούμε μονοπάτι μήκους 1.

2^oΒήμα. "Προσθέτουμε" την κορυφή $χ_2$ στο μονοπάτι $μ_1 = (χ_1, χ_7)$. Επειδή από τα ζεύγη $(χ_2, χ_1)$ και $(χ_1, χ_2)$ ακμή του γραφήματος $Γ$ είναι το πρώτο, η κορυφή $χ_2$ τοποθετείται πριν από την $χ_1$ στο μονοπάτι $μ_1$. Έτσι παίρνουμε το μονοπάτι μήκους 2, $μ_2 = (χ_2, χ_1, χ_7)$.

3^oΒήμα. "Προσθέτουμε" την κορυφή $χ_3$ στο μονοπάτι $μ_2 = (χ_2, χ_1, χ_7)$. Επειδή από τα ζεύγη $(χ_3, χ_2)$ και $(χ_2, χ_3)$ ακμή του γραφήματος $Γ$ είναι το δεύτερο, είμαστε υποχρεωμένοι να εξετά-σουμε ποιο από τα δυο ζεύγη $(χ_3, χ_1)$ και $(χ_1, χ_3)$ είναι ακμή του $Γ$. Επειδή ακμή είναι το πρώτο, η κορυφή $χ_3$ τοποθετείται μεταξύ των κορυφών $χ_2$ και $χ_1$. Έτσι παίρνουμε το μονοπάτι μήκους 3, $μ_3 = (χ_2, χ_3, χ_1, χ_7)$.





4^oΒήμα. “Προσθέτουμε” την κορυφή χ_4 στο μονοπάτι $\mu_3 = (\chi_2, \chi_3, \chi_1, \chi_7)$. Επειδή από τα ζεύγη (χ_4, χ_2) και (χ_2, χ_4) ακμή του γραφήματος Γ είναι το δεύτερο, είμαστε υποχρεωμένοι να εξετάσουμε ποιο από τα δυο ζεύγη (χ_4, χ_3) και (χ_3, χ_4) είναι ακμή του Γ. Επειδή ακμή είναι το πρώτο, η κορυφή χ_4 τοποθετείται μεταξύ των κορυφών χ_2 και χ_3. Έτσι παίρνουμε το μονοπάτι μήκους 4, $\mu_4 = (\chi_2, \chi_4, \chi_3, \chi_1, \chi_7)$.

5^oΒήμα. “Προσθέτουμε” την κορυφή χ_5 στο μονοπάτι $\mu_4 = (\chi_2, \chi_4, \chi_3, \chi_1, \chi_7)$. Επειδή από τα ζεύγη (χ_5, χ_2) και (χ_2, χ_5) ακμή του γραφήματος Γ είναι το δεύτερο, εξετάζουμε ποιο από τα δυο ζεύγη (χ_5, χ_4) και (χ_4, χ_5) είναι ακμή του Γ. Επειδή ακμή είναι το δεύτερο, εξετάζουμε ποιο από τα δύο ζεύγη (χ_5, χ_3) και (χ_3, χ_5) είναι ακμή του Γ. Επειδή ακμή είναι το δεύτερο είμαστε (και πάλι!) υποχρεωμένοι να εξετάσουμε τα ζεύγη (χ_5, χ_1) και (χ_1, χ_5) είναι ακμή του Γ. Επειδή ακμή είναι το πρώτο η κορυφή χ_5 τοποθετείται μεταξύ των κορυφών χ_3 και χ_1. Έτσι παίρνουμε το μονοπάτι μήκους 5, $\mu_5 = (\chi_2, \chi_4, \chi_3, \chi_5, \chi_1, \chi_7)$.

6^oΒήμα. “Προσθέτουμε” την κορυφή χ_6 στο μονοπάτι $\mu_5 = (\chi_2, \chi_4, \chi_3, \chi_5, \chi_1, \chi_7)$. Εργαζόμενοι όπως και παραπάνω, βρίσκουμε ότι η κορυφή χ_6 τοποθετείται μετά την κορυφή χ_7. Έτσι παίρνουμε το μονοπάτι μήκους 6, $\mu_6 = (\chi_2, \chi_4, \chi_3, \chi_5, \chi_1, \chi_7, \chi_6)$.

Τέλος, επειδή το μονοπάτι αυτό συναντά όλες τις κορυφές του Γ και είναι και στοιχειώδες, είναι μονοπάτι ***Hamilton*** του Γ, ότι θέλαμε να βρούμε.

Άσκηση 5.

Να εξεταστεί αν υπάρχει απλό γράφημα με βαθμούς κορυφών του τους:

(α) (4,4,4,2,1,1) **(β)** (4,4,3,2,1)

Λύση (α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα Γ και καταλήγουμε σε αντίφαση. Ονομάζουμε χ_1,χ_2,χ_3 τις κορυφές βαθμού 4 του Γ, X το σύνολό τους και Yτο σύνολο των 3 άλλων κορυφών του Γκαι παρατηρούμε ότι ενώνοντας τις κορυφές του X μετα-ξύ τους, με όλους τους δυνατούς τρόπους, παίρνουμε 3 το πολύ ακμές του Γ, τις $\{\chi_1, \chi_2\}$, $\{\chi_1, \chi_3\}$, $\{\chi_2, \chi_3\}$ και ότι εξαιτίας των ακμών αυτών στο βαθμό κάθε κορφής του X προστίθενται δύο μονάδες. Επομένως οι άλλες δύο μονάδες στους βαθμούς των κορυφών του X, δηλ. συνολικά 6 μονάδες, πρέπει να προέλθουν από ακμές που θα ενώνουν τις κορυφές του X με κορυφές του Y. Αυτό όμως είναι αδύνατο, γιατί τότε το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του Y θα ήταν τουλάχιστον 6 (> 4). Άρα δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα Γ.

(β) Υποθέτουμε κι εδώ ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα Γ και καταλήγουμε σε αντίφαση.

Πράγματι, τότε κάθε μία από τις δύο κορυφές του Γ βαθμού 4 θα έπρεπε να ενώνεται και με τις 3

υπόλοιπες κορυφές του και έτσι κάθε μία από τις 3 υπόλοιπες κορυφές θα είχε βαθμό ≥ 2, αντίφαση, αφού η μία από αυτές είναι βαθμού 1.

Άσκηση 18.

Τρία αντρόγυνα (A_1, Γ_1), (A_2, Γ_2), (A_3, Γ_3), κατά τη διάρκεια μιας εκδρομής, φτάνουν σε ένα ποτάμι και θέλουν να περάσουν απέναντι. Εκεί βρίσκουν μια βάρκα η οποία χωρά δυο το πολύ άτομα. Όλοι οι (ζηλιάρηδες;) άντρες συμφωνούν να μην επιτρέψουν στις συζύγους τους να συμμετέχουν χωρίς τη δική τους παρουσία σε παρέα (στις όχθες ή πάνω στη βάρκα) στην οποία υπάρχει άλλος άντρας. Να εξεταστεί αν το πέρασμα του ποταμού είναι δυνατό, υπό τη συνθήκη αυτή.

Λύση. Ονομάζουμε $O^{(1)}$την όχθη του ποταμού στην οποία φτάνουν και $O^{(2)}$ την απέναντι όχθη και συμβολίζουμε με

$$\chi = [\![O^{(1)} = \{A_1, A_2, A_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\} \vdots O^{(2)} = \emptyset\}]\!], \psi = [\![O^{(1)} = \emptyset \vdots O^{(2)} =\{A_1, A_2, A_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}]\!],$$

αντίστοιχα, την αρχική και τελική κατάσταση της όλης προσπάθειας και με

$$[\![O^{(1)} = \{X, Y, \cdots\} \vdots O^{(2)} = \{Z, \Omega, \cdots]\!]$$

την κατάσταση κατά την οποία στην όχθη $O^{(1)}$βρίσκονται τα άτομα $X, Y, \cdots$ και στην όχθη $O^{(2)}$ βρίσκονται τα άτομα $Z, \Omega, \cdots$. Συμβολίζουμε ακόμη με

"$B = \{X, Y) \Longmapsto$ ” (αντίστοιχα, με “$\Longleftarrow B = \{X, Y)$")

τη φορτωμένη με τα άτομα X, Y βάρκα η οποία κινείται από την όχθη $O^{(1)}$ προς την $O^{(2)}$ (αντίστοιχα, από την όχθη $O^{(2)}$ προς την $O^{(1)}$). Στη συνέχεια θεωρούμε το γράφημα Γ το οποίο έχει σαν κορυφές τις διάφορες επιτρεπτές καταστάσεις στις όχθες του ποταμού και ακμές τις επιτρεπτές μετακινήσεις της βάρκας από την όχθη $O^{(1)}$ στην $O^{(2)}$ και αντίστροφα. Η όλη προσπάθεια θα είναι δυνατή αν υπάρχει στο γράφημα Γ μονοπάτι το οποίο συνδέει την αρχική κατάσταση χ με την τελική κατάσταση ψ. Παρατηρούμε ότι

$$\chi \overset{B=\{\Gamma_1,\Gamma_2\}\Longmapsto}{\hookrightarrow} \chi_1 = [\![O^{(1)} = \{A_1, A_2, A_3, \Gamma_3\} \vdots O^{(2)} = \{\Gamma_1, \Gamma_2)]\!],$$

$$\chi_1 \overset{\Longleftarrow B=\{\Gamma_2\}}{\hookrightarrow} \chi_2 = [\![O^{(1)} = \{A_1, A_2, A_3, \Gamma_2, \Gamma_3\} \vdots O^{(2)} = \{\Gamma_1\}]\!],$$

$$\chi_2 \overset{B=\{\Gamma_2,\Gamma_3\}\Longmapsto}{\hookrightarrow} \chi_3 = [\![O^{(1)} = \{A_1, A_2, A_3\} \vdots O^{(2)} = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}]\!],$$

$$\chi_3 \overset{B=\{\Gamma_3\}\Longmapsto}{\hookrightarrow} \chi_4 = [\![O^{(1)} = \{A_1, A_2, A_3, \Gamma_3\} \vdots O^{(2)} = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}]\!],$$

$$\chi_4 \overset{B=\{A_1,A_2\}\Longmapsto}{\hookrightarrow} \chi_5 = [\![O^{(1)} = \{A_3, \Gamma_3\} \vdots O^{(2)} = \{A_1, A_2, \Gamma_1, \Gamma_2\}]\!],$$

$$\chi_5 \overset{B=\{A_2,\Gamma_2\}\Rightarrow}{\hookrightarrow} \chi_6 = [\![O^{(1)} = \{A_2, \Gamma_2, A_3, \Gamma_3\} \vdots O^{(2)} = \{A_1, \Gamma_1\}]\!],$$

$$\chi_6 \overset{B=\{A_2,A_3\}\Rightarrow}{\hookrightarrow} \chi_7 = [\![O^{(1)} = \{\Gamma_2, \Gamma_3\} \vdots O^{(2)} = \{A_1, A_2, A_3, \Gamma_1\}]\!],$$

$$\chi_7 \overset{B=\{\Gamma_1\}\Rightarrow}{\hookrightarrow} \chi_8 = [\![O^{(1)} = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\} \vdots O^{(2)} = \{A_1, A_2, A_3\}]\!],$$

$$\chi_8 \overset{B=\{\Gamma_1,\Gamma_2\}\Rightarrow}{\hookrightarrow} \chi_9 = [\![O^{(1)} = \{\Gamma_3\} \vdots O^{(2)} = \{A_1, A_2, A_3, \Gamma_1, \Gamma_2\}]\!],$$

$$\chi_9 \overset{B=\{A_3\}\Rightarrow}{\hookrightarrow} \chi_{10} = [\![O^{(1)} = \{A_3, \Gamma_3\} \vdots O^{(2)} = \{A_1, A_2, \Gamma_1, \Gamma_2\}]\!],$$

$$\chi_{10} \overset{B=\{A_3,\Gamma_3\}\Rightarrow}{\hookrightarrow} \chi_{10} = [\![O^{(1)} = \emptyset \vdots O^{(2)} = \{A_1, A_2, A_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}]\!] = \psi.$$

Άσκηση 38.

Να δειχτεί ότι ένα απλό γράφημα Γ με ν κορυφές και περισσότερες από $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$ ακμές είναι υποχρεωτικά συνεκτικό. Στη συνέχεια να βρεθεί παράδειγμα απλού γραφήματος το οποίο έχει ν κορυφές και ακριβώς $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$ ακμές και το οποίο δεν είναι συνεκτικό.

Λύση. Ονομάζουμε $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{\nu-1}, \chi_\nu$ τις κορυφές του Γ και παρατηρούμε ότι για να ενώσουμε τις $\nu-1$ κορυφές του $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{\nu-1}$ μεταξύ τους με όλους τους δυνατούς τρόπους χρειαζόμαστε $\binom{\nu-1}{2} = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$ ακμές. Επειδή το Γ έχει μια τουλάχιστον επιπλέον ακμή, αυτή αναγκαστικά θα ενώνει την κορυφή χ_ν με κάποια από τις κορυφές $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{\nu-1}$ και επομένως το γράφημα Γ είναι συνεκτικό.

<u>Παράδειγμα(γραφήματος το οποίο έχει ν κορυφές και ακριβώς</u> $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$ *<u>ακμές και το οποίο δεν είναι συνεκτικό.)</u>* Αν στο πλήρες γράφημα $K_{\nu-1}$ προσθέσουμε μια ακόμη απομονωμένη κορυφή χ_ν, τότε το γράφημα που προκύπτει θα έχει ακριβώς όσες και το $K_{\nu-1}$ ακμές, δηλ.

$$\binom{\nu-1}{2} = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$$

ακμές και ν κορυφές και δεν θα είναι συνεκτικό.

Άσκηση 61.

Για να μελετήσουμε τις κινήσεις του αλόγου σε μια σκακιέρα, παρατηρούμε πρώτα ότι οι κινήσεις του αλόγου είναι «αντιστρεπτές», δηλ. αν το άλογο με μια κίνηση μεταβαίνει από το τετράγωνο χ στο τετράγωνο ψ, τότε υπάρχει και κίνηση η οποία το φέρνει πίσω στο ψ.

Κατασκευάζουμε ένα γράφημα ως εξής:

(I) Παριστάνουμε τα τετράγωνα της σκακιέρας με σημεία του επιπέδου, δηλ. θεωρούμε τα τετράγωνα της σκακιέρας κορυφές του γραφήματος.

(II) Ενώνουμε δυο κορυφές του γραφήματος με ακμή αν υπάρχει κίνηση του αλόγου από τη μια κορυφή στην άλλη.

Έτσι στο γράφημα αυτό, ένα μονοπάτι $\mu(\chi,\psi)$ από την κορυφή χ στην κορυφή ψ (αντίστοιχα, ένα κύκλωμα $C(\chi,\chi)$) θα παριστάνει μια ακολουθία επιτρεπτών κινήσεων του αλόγου η οποία θα ξεκινά από την κορυφή χ και θα τελειώνει στην ψ(αντ. θα τελειώνει στη χ).

Το παραπάνω γράφημα θα ονομάζουμε "**γράφημα των κινήσεων του αλόγου**".

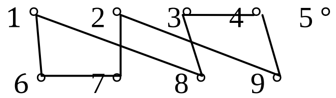
Να σχεδιαστεί το γράφημα Γ των κινήσεων του αλόγου σε μια 3×3 σκακιέρα. Τι το ιδιαίτερο έχει η κορυφή 5 του γραφήματος και γιατί; Είναι το γράφημα Γ συνεκτικό; Να βρεθεί ένα κύκλωμα του γραφήματος Γ με μέγιστο μήκος.

Λύση. Για οικονομία χώρου, αριθμούμε τα τετράγωνα της σκακιέρας από αριστερά προς τα δεξιά και από κάτω προς τα πάνω (Βλέπε Σχ. (α)) με τους αριθμούς 1, 2, ⋯, 9 και όχι με ζεύγη δεικτών (i,j), όπως γίνεται με τα στοιχεία ενός πίνακα.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Αρίθμηση των τετραγώνων της 3×3 σκακιέρας.

Σχ. (α)



Γράφημα Γ των κινήσεων του αλόγου σε 3×3 σκακιέρα.

Σχ. (β)

Η κορυφή 5 του γραφήματος είναι απομονωμένη, γιατί το άλογο από την κορυφή 5 δεν μπορεί λόγω έλλειψης χώρου να μεταβεί σε οποιαδήποτε άλλη κορυφή του γραφήματος. Επειδή κανένα κύκλωμα του Γ δεν περιέχει την κορυφή 5, κανένα κύκλωμα του Γ δεν μπορεί να έχει μήκος 9. Επομένως τα κυκλώματα του Γ θα έχουν μήκος το πολύ 8. Τέλος, το κύκλωμα $C = (1,8,3,4,9,2,7,6,1)$ έχει μήκος 8 και άρα έχει την απαιτούμενη ιδιότητα.

Άσκηση 73.

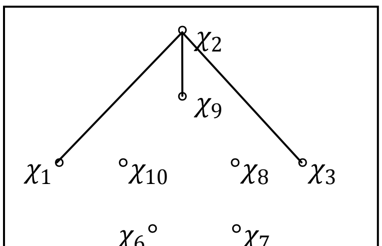
Να εξεταστεί αν το γράφημα ***Petersen*** (P_1) και το παρακάτω γράφημα P_2 είναι ισόμορφα.

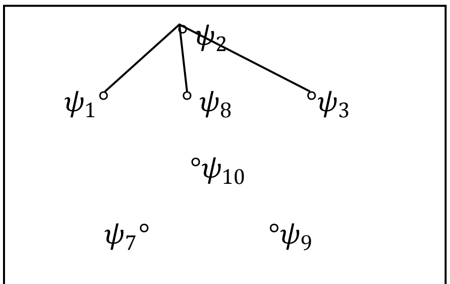
Λύση . Παρατηρούμε ότι το γράφημα P_1 έχει δυο κυκλώματα με 5 κορυφές το καθένα, τα

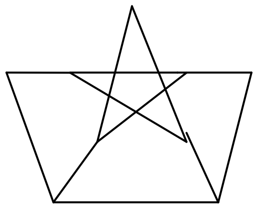
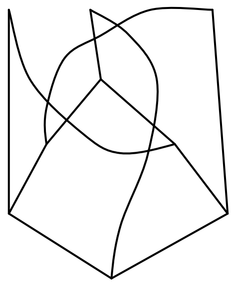
$$\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4\chi_5\chi_1 \text{ και } \chi_{10}\chi_8\chi_6\chi_9\chi_7\chi_{10}, \quad (1)$$

τα οποία δεν έχουν κοινή κορυφή. Αλλά και το P_2έχει δυο κυκλώματα με 5 κορυφές το καθένα, τα

$$\psi_1\psi_6\psi_5\psi_4\psi_9\psi_1 \text{ και } \psi_2\psi_8\psi_{10}\psi_7\psi_3\psi_2, \quad (2)$$





τα οποία δεν έχουν κοινή κορυφή. Παρατηρούμε ακόμη ότι οι κορυφές χ_1 και χ_{10} (των κυκλωμάτων (1)) στο γράφημα P_1είναι γειτονικές, όπως και οι κορυφές ψ_1και ψ_2 (των κυκλωμάτων (2)) στο γράφημα P_2. Μετά τις παρατηρήσεις μας αυτές βρίσκουμε τους πίνακες γειτνίασης των δύο γραφημάτων ως προς τις μεταθέσεις των κορυφών τους

$$\mu_1 \equiv \chi_1\chi_2\chi_3\chi_4\chi_5\,\chi_{10}\chi_8\chi_6\chi_9\chi_7 \quad \text{και} \quad \mu_2 \equiv \psi_1\psi_6\psi_5\psi_4\psi_9\,\psi_2\psi_8\psi_{10}\psi_7\psi_3\psi_2.$$

Οι πίνακες αυτοί $E_{\mu_1}(P_1)$ και $E_{\mu_2}(P_2)$ δίνονται στην επόμενη σελίδα. Επειδή οι δύο πίνακες είναι ίσοι, τα γραφήματα P_1 και P_2 είναι ισόμορφα και ο ισομορφισμός τους είναι η συνάρτηση $\varphi: \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_{10}, \chi_8, \chi_6, \chi_9, \chi_7\} \to \{\psi_1, \psi_6, \psi_5, \psi_4, \psi_9, \psi_2, \psi_8, \psi_{10}, \psi_7, \psi_3, \psi_2\}$,

$E_{\mu_1}(P_1) =$

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_{10}	χ_8	χ_6	χ_9	χ_7
χ_1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
χ_2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
χ_3	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
χ_4	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
χ_5	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
χ_{10}	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
χ_8	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
χ_6	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
χ_9	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
χ_7	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0

και $E_{\mu_2}(P_2) =$

	ψ_1	ψ_6	ψ_5	ψ_4	ψ_9	ψ_2	ψ_8	ψ_{10}	ψ_7	ψ_3
ψ_1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
ψ_6	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
ψ_5	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
ψ_4	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
ψ_9	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
ψ_2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
ψ_8	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
ψ_{10}	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
ψ_7	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
ψ_3	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0

η οποία ορίζεται από τις ισότητες

$$\varphi(\chi_1) = \psi_1,\ \varphi(\chi_2) = \psi_6,\ \varphi(\chi_3) = \psi_5,\ \varphi(\chi_4) = \psi_4,\ \varphi(\chi_5) = \psi_9,$$

$$\varphi(\chi_{10}) = \psi_2,\ \varphi(\chi_8) = \psi_8,\ \varphi(\chi_6) = \psi_{10},\ \varphi(\chi_9) = \psi_7,\ \varphi(\chi_7) = \psi_3.$$

Άσκηση 99.

(Εύρεση επικαλύπτοντος δέντρου ενός απλού γραφήματος Γ με τη μέθοδο της **αναζήτησης σε πλάτος**.)

1) Επιλέγουμε αυθαίρετα μια κορυφή του Γ, τη θεωρούμε ρίζα ενός υπό κατασκευήν δέντρου Δ και την τοποθετούμε στο επίπεδο 0 (Σχ. (α)).

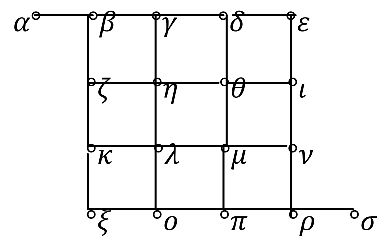
2) Τοποθετούμε (από αριστερά προς τα δεξιά) με αυθαίρετη σειρά στο επίπεδο 1 του Δ όλες τις κορυφές του Γ οι οποίες είναι γειτονικές με τη ρίζα και ενώνουμε με ακμές τη ρίζα με αυτές. (Σχ.(β)).

3) Επισκεπτόμαστε (από αριστερά προς τα δεξιά) τις κορυφές του επιπέδου 1 μία-μία, βρίσκουμε τις κορυφές με τις οποίες γειτνιάζει κάθε μία και τις καταγράφουμε κάτω ακριβώς από αυτήν (με αυθαίρετη σειρά) στο επίπεδο 2. Κατόπιν ενώνουμε την κορυφή αυτή με τις γειτονικές της κ.ο.κ.

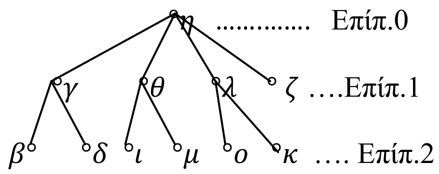
(**Προσοχή !!** Στο βήμα αυτό (και στα επόμενα) **δεν καταγράφουμε κορυφές** οι οποίες έχουν χρησιμοποιηθεί προηγουμένως.)

4) Προχωρούμε έως ότου χρησιμοποιηθούν όλες οι κορυφές του γραφήματος Γ. Το δέντρο Δ το οποίο κατασκευάσαμε είναι επικαλύπτον δέντρο του Γ.

Να βρεθεί, με τη μέθοδο της αναζήτησης σε πλάτος, ένα επικαλύπτον δέντρο του απλού γραφήματος Γ (Σχ.(α)).

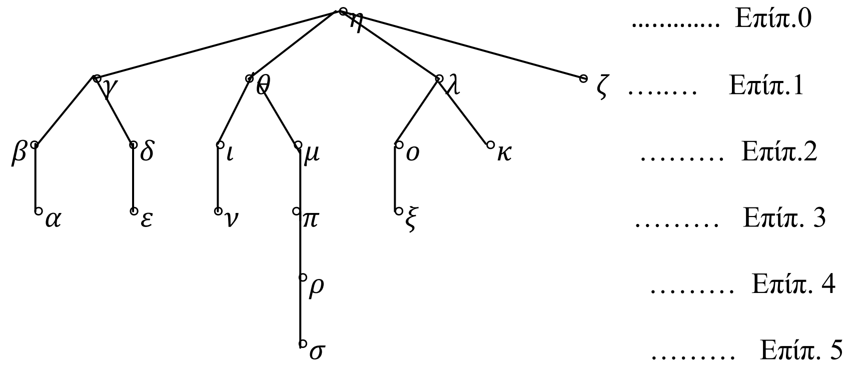


Σχ.(α) Γράφημα Γ.



Σχ.(β)

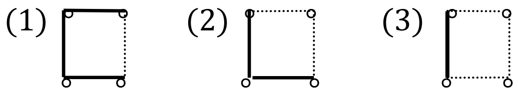
Λύση. Επιλέγουμε σαν ρίζα την κορυφή η. Τοποθετούμε (με αυθαίρετη σειρά) στο επίπεδο 1, τις γειτονικές με την η κορυφές, γ, θ, λ, ζ του Γ (Σχ.(β)) και τις ενώνουμε με την η. Κατόπιν βρίσκουμε τις γειτονικές με τη γ κορυφές του Γ. Αυτές είναι οι β, δ, η και επειδή η η έχει χρησιμοποιηθεί ξανά δεν την καραγάραφουμε στο επίπεδο 2. Καταγράφουμε μόνο τις β, δ και φέρνουμε τις ακμές (γ, β) και (γ, δ). Στη συνέχεια βρίσκουμε τις γειτονικές με τη θ κορυφές του Γ. Αυτές είναι οι δ, ι, μ, η και επειδή έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί οι δ και η, καταγράφουμε στο επίπεδο 2 μόνο τις ι και μ και φέρνουμε τις ακμές $(\theta, \iota), (\theta, \mu)$. Προχωρούμε στην κορυφή λ, την οποία ενώνουμε με τις κορυφές ο και μ, κατόπιν στη ζ, την οποία δεν ενώνουμε με καμιά νέα κορυφή. Κατόπιν προχωρούμε στις κορυφές επιπέδου 3. Από αυτές οι $\alpha,\ \varepsilon,\ \nu,\ \xi$ δεν γειτνιάζουν με κορυφή η οποία δεν έχει καταγραφεί έως τώρα. Μόνο η κορυφή π συνδέεται με κορυφή, η οποία δεν έχει χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα, την ρ. Φέρνουμε την ακμή (π, ρ) και συνεχίζουμε τη διαδικασία. Παρατηρούμε τώρα ότι η κορυφή ρ γειτνιάζει μόνο με μια ακόμη κορυφή, την σ. Φέρνουμε την ακμή (ρ,σ) και παρατηρούμε ότι στο δέντρο Δ (Σχ.(γ)), το οποίο κατασκευάσαμε περιλαμβάνονται τώρα όλες οι κορυφές του γραφήματος Γ . Επομένως αυτό είναι επικαλύπτον δέντρο του Γ.



Σχ. (γ) Επικαλύπτον δέντρο Δ του γραφήματος Γ.

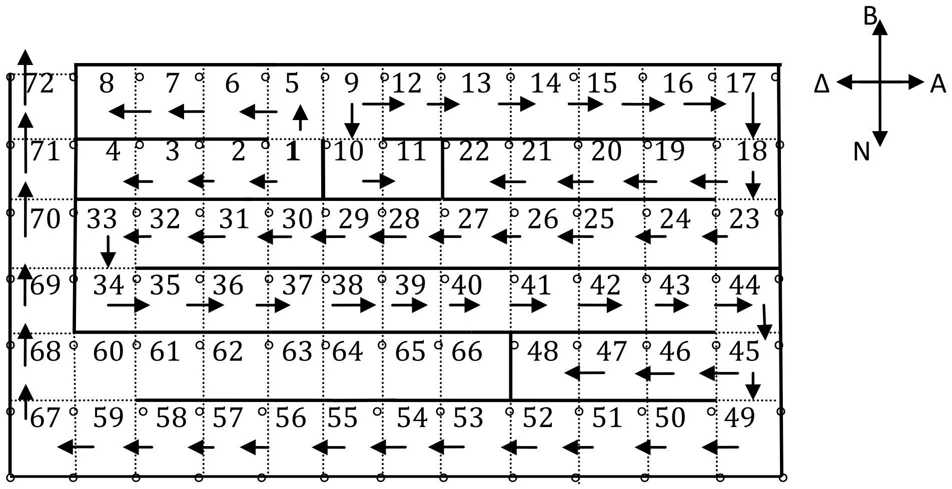
Άσκηση 106.

Ο λαβύρινθος είναι ένα ορθογώνιο μονοόροφο κτίριο διαστάσεων $\mu \times \nu$, όπου $\mu, \nu \geq 6$ (μον. μήκ.), το οποίο έχει υποδιαιρεθεί σε $\mu \cdot \nu$ το πλήθος τετράγωνα (δωμάτια) διαστάσεων 1×1, με τοίχους παράλληλους προς τα εξωτερικά τοιχώματα του κτιρίου. Τα δωμάτια είναι όλα φωτισμένα και έχουν (αδιαφανείς) πόρτες στους τοίχους τους. Άλλα δωμάτια έχουν μια μόνο πόρτα, όπως π.χ. το (1) του επομένου Σχήματος, (τα ονομάζουμε αδιέξοδα), άλλα έχουν δυο πόρτες, όπως π.χ. το (2)



και άλλα έχουν τρεις πόρτες, όπως π.χ. το (3). Ένα άτομο βρίσκεται στο δωμάτιο 1 του λαβύρινθου του παρακάτω Σχ. (α), ο οποίος έχει 72 δωμάτια διαστάσεων 1×1. Το άτομο δεν γνωρίζει πως βρέθηκε στο δωμάτιο αυτό, αλλά έχει μαζί του μολύβι και χαρτί. Μπορεί άραγε το άτομο αυτό να κατασκευάσει ένα μονοπάτι (κάποιου γραφήματος), το οποίο να τον οδηγήσει ασφαλώς στην έξοδο;

Λύση. Πρέπει πρώτα να ορίσει παράλληλα προς τις πλευρές του δωματίου του, αλλά κατά τα άλλα αυθαίρετα, τις κατευθύνσεις των 4 σημείων του ορίζοντα πάνω στο σχέδιό του και να αριθμήσει το δωμάτιο στο οποίο βρίσκεται με τον αύξοντα αριθμό 1 (Βλέπε στο παρακάτω Σχ.(α)). Ακόμη, πρέπει να σημειώνει κάθε φορά το βήμα και την κατεύθυνσή του β (από το δωμάτιο α στο δωμάτιο β, το οποίο κάνει) με ξεχωριστό σύμβολο, αν κινείται ανατολικά, δυτικά, βόρεια ή νότια. Εμείς τον συμβουλεύουμε να χρησιμοποιήσει αντίστοιχα τα σύμβολα



Σχ. (α) Λαβύρινθος 6×12

$$\alpha \overset{\alpha\nu\alpha\tau.}{\rightleftarrows} \beta,\ \alpha \overset{\delta\upsilon\tau.}{\rightleftarrows} \beta,\ \alpha \overset{\beta o\rho.}{\rightleftarrows} \beta,\ \alpha \overset{\nu o\tau.}{\rightleftarrows} \beta.$$

Αν το δωμάτιο β στο οποίο φτάνει έχει 1 ή 2 ή 3 πόρτες, τότε να το δηλώνει στο σημειωματάριό του γράφοντας $\beta(\pi_1)$ ή $\beta(\pi_2)$ ή $\beta(\pi_3)$, αντίστοιχα. Αντιλαμβάνεται κανείς ότι δεν πρέπει ποτέ να χάσει τον προσανατολισμό του. Με τα παραπάνω εφόδια, καταλαβαίνει ότι το δωμάτιο 1 στο οποίο βρίσκεται είναι κόμβος διακλάδωσης και ότι έχει τη δυνατότητα να κινηθεί δυτικά ή βόρεια. Αποφασίζει να κάνει την πρώτη του κίνηση προς τα δυτικά. Αριθμεί το δωμάτιο στο οποίο φτάνει με 2 και καταγράφει το 1^o του βήμα με το σύμβολο

$$1(\pi_2) \overset{\delta\upsilon\tau.}{\rightleftarrows} 2(\pi_2),$$

επειδή το δωμάτιο 2 έχει κι αυτό δυο πόρτες. Κάνει τη δεύτερή του κίνηση, η οποία είναι υποχρεωτική και στο σχέδιό του γράφει το σύμβολο

$$2(\pi_2) \overset{\delta\upsilon\tau.}{\rightleftarrows} 3(\pi_2)$$

κ.λπ…..