

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ MATLAB®

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ

[ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ ΚΑΙ ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΗ]

Συγγραφείς

ΝΤΑΟΥΤΙΔΗΣ ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ

Πανεπιστήμιο Minnesota, USA

ΜΑΣΤΡΟΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ ΣΠΥΡΟΣ

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

ΣΙΔΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΕΥΜΟΡΦΙΛΗ

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πίνακας Περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή	1
1.1 Πρόλογος	1
1.2 Προβλήματα που θα εξετασθούν	3
1.3 Παράσταση αριθμών στον υπολογιστή	4
Συστήματα αρίθμησης	5
Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης	5
Δυαδικό σύστημα αρίθμησης	6
Μετατροπές ανάμεσα σε διάφορα συστήματα αρίθμησης	6
Αναπαράσταση ενός αριθμού σε ηλεκτρονικό υπολογιστή ...	8
Αναπαράσταση σταθερού σημείου	9
Αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής	10
1.4 Είδη σφαλμάτων	12
Σφάλμα αποκοπής	12
Σφάλμα στρογγυλοποίησης	14
1.5 Κατάσταση προβλήματος και αριθμητική ευστάθεια	21
□ Υπολογιστικό Εργαστήριο 1 - Εισαγωγή στο MATLAB	29
Σκοποί	29
Προκαταρκτικά	29
Εφαρμογές	30
Βασικές αριθμητικές πράξεις	30
Χρήση μεταβλητών	32
Πίνακες και διανύσματα	34
Βασικές εντολές στο MATLAB για δημιουργία γραφικών παραστάσεων	38
m-Αρχεία	43
Λυμένες ασκήσεις	49
Ασκήσεις	51

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συστήματα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων	55
2.1 Εισαγωγή	55
2.2 Απαλοιφή Gauss	64
Κόστος απαλοιφής Gauss	70
2.3 Κάποια προβλήματα και κάποιες λύσεις	72
2.4 Πίνακες με ειδική δομή	78
2.5 Λύση εξισώσεων με πολλαπλά δεξιά σκέλη	80
2.6 Συστήματα κακής κατάστασης	90
Νόρμα διανύσματος και πίνακα	93
Νόρμα για διανύσματα	94
Νόρμα για πίνακες.....	94
2.7 Επαναληπτικές μέθοδοι	96
Μέθοδος Jacobi	97
Μέθοδος Gauss-Seidel	98
Γενίκευση της μελέτης σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων	105
□ Υπολογιστικό Εργαστήριο 2 – Γραμμικές αλγεβρικές	
εξισώσεις	109
Σκοποί	109
Προκαταρκτικά	109
Απαλοιφή Gauss	110
Εσωτερικές εντολές του MATLAB για επίλυση γραμμικών	
συστημάτων.....	111
Αντιστροφή πίνακα	112
Υπολογιστικό κόστος κατά την επίλυση συστήματος γραμμικών	
εξισώσεων με πλήρεις πίνακες και πίνακες με ζώνες	113
Προβλήματα κακής κατάστασης	114
Μέθοδοι επαναληπτικής επίλυσης γραμμικών αλγεβρικών	
εξισώσεων	117
Υπολογιστικό κόστος κατά την επίλυση συστήματος	
γραμμικών εξισώσεων	120
Λυμένες ασκήσεις	121
Ασκήσεις	134
Κώδικες MATLAB Κεφαλαίου 2	144

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις	153
3.1 Εισαγωγή	153
3.2 Μέθοδος Picard ή μέθοδος διαδοχικών αντικαταστάσεων	155
3.3 Μέθοδος Newton - Raphson	157
Γεωμετρική απεικόνιση της μεθόδου Newton - Raphson	160
3.4 Σύγκλιση μεθόδων Picard και Newton - Raphson	161
Αδυναμίες της μεθόδου Newton - Raphson	168
3.5 Μέθοδος Newton - Raphson πολλών μεταβλητών για συστήματα μη-γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων	169
Γενική διαδικασία επαναλήψεων	173
□ Υπολογιστικό Εργαστήριο 3 – Μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις	179
Σκοποί	179
Προκαταρκτικά	179
Επαναληπτικές τεχνικές επίλυσης μη γραμμικών αλγεβρι- κών εξισώσεων	179
Σύγκλιση επαναληπτικών τεχνικών επίλυσης μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων	182
Επαναληπτικές τεχνικές επίλυσης για συστήματα μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων	183
Λυμένες ασκήσεις	191
Ασκήσεις	199
Κώδικες MATLAB Κεφαλαίου 3	206

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παρεμβολή και προσέγγιση συναρτήσεων	213
4.1 Παρεμβολή και Προεκβολή	213
Είδη συναρτήσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για παρεμβολή ή προεκβολή.....	214
4.2 Υπολογισμός του πολυώνυμου παρεμβολής.....	214
Παρεμβολή Lagrange	217
Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου Lagrange ...	218
Παρεμβολή Neville και παρεμβολή Aitken	219
Παρεμβολή Newton με Διαιρεμένες Διαφορές	224

4.3	Σφάλμα και Σύγκλιση του Πολυωνόμου Παρεμβολής	229
	Σύγκλιση	230
	Προεκβολή	232
4.4	Βέλτιστη τοποθέτηση των σημείων δεδομένων	232
	Ορθογώνια πολυώνυμα	232
	Πολυώνυμα Legendre και Chebyshev	233
	Πολυώνυμα Legendre και οι ιδιότητές τους	233
	Πολυώνυμα Chebyshev και οι ιδιότητές τους	234
	Παρεμβολή Chebyshev	236
	Υπολογισμός του αναπτύγματος Chebyshev	237
4.5	Πολυωνυμική παρεμβολή κατά τμήματα και ελαστικές καμύλες Splines	239
	Τριγωνικές συναρτήσεις σχήματος τέντας	240
	Παρεμβολή με κυβική ελαστική καμπύλη (Spline)	241
4.6	Διατύπωση και σημασία του προβλήματος προσέγγισης συναρτήσεων	248
	Σχέση παρεμβολής και προσέγγισης	249
4.7	Προσέγγιση με πολυωνυμική συνάρτηση	250
4.8	Μη γραμμική παλινδρόμηση δεδομένων όταν δεν είναι δυνατή ή δεν απαιτείται η αναγωγή σε γραμμική παλινδρόμηση	256
4.9	Τριγωνομετρική προσέγγιση και παρεμβολή	259
□	Υπολογιστικό Εργαστήριο 4 – Παρεμβολή και προσέγγιση συναρτήσεων	261
	Σκοποί	261
	Προκαταρκτικά	261
	Πολυωνυμική παρεμβολή	262
	Προσέγγιση συναρτήσεων	265
	Χρήση του MATLAB για παρεμβολή και προσέγγιση	270
	Λυμένες ασκήσεις	276
	Ασκήσεις	280
	Κώδικες MATLAB Κεφαλαίου 4	284

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αριθμητική ολοκλήρωση και διαφορίση	301
5.1 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων σε μία διάσταση	301
Συνήθης μεθοδολογία της αριθμητικής ολοκλήρωσης	303
5.2 Ολοκλήρωση με πολυώνυμο τοπικής παρεμβολής: Κανόνες των Newton-Cotes.....	303
Κανόνας του τραπεζίου	304
Σύνθετος κανόνας του τραπεζίου	305
Σημεία που απέχουν ίσες αποστάσεις	306
Κανόνας του Simpson του 1/3	306
Σύνθετος κανόνας του Simpson του 1/3	307
Κανόνες του Simpson των 3/8, του Boole και ανώτερης τάξης	308
Κανόνας μεσαίου σημείου και ανοικτοί τύποι.....	311
5.3 Βέλτιστη κατανομή των σημείων βάσης και ο τετραγωνισμός Gauss-Legendre.....	313
Κανονική μορφή	314
Τετραγωνισμός Gauss-Legendre	315
Περισσότερα από δύο σημεία	316
Σφάλμα του τετραγωνισμού Gauss-Legendre	318
Τετραγωνισμοί Gauss-Radau και Gauss-Lobatto	318
5.4 Πρότυπα στοιχεία και αριθμητική ολοκλήρωση σε δύο διαστάσεις	324
Τριγωνικό στοιχείο.....	325
5.5 Αριθμητική παραγωγή συνάρτησης	329
Το πρόβλημα της αριθμητικής παραγωγής.....	330
Προς τα πίσω, κεντρικές και προς τα εμπρός διαφορές.....	330
Τύποι πεπερασμένων διαφορών από γραμμική παρεμβολή ..	331
Τύποι πεπερασμένων διαφορών από τετραγωνική παρεμβολή	332
Τύποι πεπερασμένων διαφορών από παρεμβολή υψηλότερης τάξης	334
□ Υπολογιστικό Εργαστήριο 5 – Αριθμητική ολοκλήρωση και παραγωγή συναρτήσεων	341
Σκοπός.....	341
Προκαταρκτικά	341

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με χρήση συναρτήσεων που υλοποιούν τη θεωρία, σε μία διάσταση	343
Κλειστοί και ανοικτοί τύποι Newton - Cotes	343
Υπολογισμός ολοκληρωμάτων όταν δεν είναι γνωστή η ολοκληρωτέα συνάρτηση, αλλά απλά ζεύγη τιμών (x_i, f_i) για $i = 1, 2, \dots, N, N + 1$	344
Τετραγωνισμός Gauss-Legendre	345
Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια εντολών του MATLAB	346
Υπολογισμός ολοκληρωμάτων σε δύο διαστάσεις με χρήση εντολών του MATLAB	347
Υπολογισμός ολοκληρωμάτων σε δύο διαστάσεις με χρήση συναρτήσεων που βασίζονται στον κανόνα του τραπεζίου όταν αυτός εφαρμόζεται και στις δύο διαστάσεις	347
Υπολογισμός ολοκληρωμάτων σε δύο διαστάσεις με χρήση συναρτήσεων που βασίζονται στον κανόνα του Simpson του 1/3 όταν αυτός εφαρμόζεται και στις δύο διαστάσεις	348
Υπολογισμός ολοκληρωμάτων σε δύο διαστάσεις με χρήση συναρτήσεων που βασίζονται στον τετραγωνισμό Gauss-Legendre πάνω σε τριγωνικά χωρία	349
Αριθμητική παραγωγή	349
Λυμένες ασκήσεις	351
Ασκήσεις	361
Κώδικες MATLAB Κεφαλαίου 5	363

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις – Προβλήματα Αρχικών Τιμών	409
6.1 Εισαγωγή	409
6.2 Επίλυσης μιας διαφορικής εξίσωσης (ΠΑΤ)	411
6.3 Σφάλματα, σύγκλιση και συνέπεια αριθμητικών μεθόδων	415
6.4 Συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης	418
6.5 Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλήματος αρχικών τιμών	420
Άμεση μέθοδος Euler	422

	Εξαγωγή του τύπου της μεθόδου Euler μέσω του αναπτύγματος σε σειρά Taylor και ανάλυση των ιδιοτήτων ακρίβειας ...	422
	Έμμεση μέθοδος Euler	424
	Μέθοδος Πρόβλεψης - Διόρθωσης Euler	428
	Μέθοδοι Runge - Kutta	430
6.6	Αριθμητική ευστάθεια μεθόδων επίλυσης προβλήματος διαφορικών εξισώσεων ΠΑΤ	433
	Άμεση Μέθοδος Euler	435
	Έμμεση Μέθοδος Euler	436
6.7	Επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων (ΠΑΤ)	439
6.8	Αριθμητική ευστάθεια αλγορίθμων επίλυσης συστημάτων διαφορικών εξισώσεων – ΠΑΤ	444
	Διαγωνιοποίηση πίνακα με μετασχηματισμούς ομοιότητας ..	445
6.9	Δυναμικά συστήματα	449
6.10	Ανάλυση δυναμικών συστημάτων σε διδιάστατα συστήματα	453
□	Υπολογιστικό Εργαστήριο 6 – Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις – Προβλήματα Αρχικών Τιμών	459
	Σκοποί	459
	Προκαταρκτικά	460
	Επίλυση μιας Συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης – Προβλήματος Αρχικών Τιμών με χρήση της μεθόδου Euler	460
	Κλιμάκωση του σφάλματος κατά την επίλυση των ΣΔΕ – ΠΑΤ με την μέθοδο Euler	462
	Επίλυση μιας Συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης - Προβλήματος Αρχικών Τιμών με χρήση της μεθόδου Runge – Kutta	463
	Κλιμάκωση του σφάλματος κατά την επίλυση των ΣΔΕ – ΠΑΤ με τη μέθοδο Runge – Kutta.....	467
	Επίλυση συστημάτων Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων με χρήση Άμεσης και Έμμεσης μεθόδου Euler, καθώς και με μέθοδο Runge – Kutta	468
	Αριθμητική αστάθεια κατά την επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων – Προβλημάτων Αρχικών Τιμών	470
	Επίλυση συστήματος Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων – Προβλημάτων Αρχικών Τιμών με διάφορες μεθόδους	471

Ακαμψία κατά την επίλυση συστήματος Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων	473
Γραμμική ευστάθεια και ιδιοτιμές	476
Χρονική συμπεριφορά των λύσεων των εξισώσεων ενός CSTR ..	480
Διάγραμμα επιπέδου φάσεων για τις εξισώσεις ενός CSTR ..	481
Συμπεριφορά στον χρόνο των εξισώσεων Lorenz	483
Λυμένες ασκήσεις	487
Ασκήσεις	500
Κώδικες MATLAB Κεφαλαίου 6	510

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις – Προβλήματα Οριακών Τιμών ...	531
7.1 Εισαγωγή	531
Διάχυση σε μία διάσταση	533
Αγωγή θερμότητας σε μία διάσταση	536
Γενικότερες εξισώσεις	537
7.2 Οριακές συνθήκες	539
Dirichlet	540
Neumann	540
Robin	540
7.3 Αριθμητική ολοκλήρωση μια Συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης- Προβλήματος Οριακών Τιμών	541
Οριακές συνθήκες πρώτου είδους (Dirichlet)	546
Οριακές συνθήκες δεύτερου είδους (Neumann)	549
Οριακές συνθήκες τρίτου είδους (Robin)	552
7.4 Συζευγμένες Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις – Προβλήματα Οριακών Τιμών	553
□ Υπολογιστικό Εργαστήριο 7 – Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις – Προβλήματα Οριακών Τιμών	559
Σκοποί	559
Προκαταρκτικά	559
Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων – Προβλημάτων Οριακών Τιμών με χρήση μεθόδου πεπερασμένων διαφορών ...	560
Κλιμάκωση του σφάλματος σε σχέση με την πυκνωση του πλέγματος	563

Πολλαπλές λύσεις μιας μη-γραμμικής Συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης Οριακών Τιμών	564
Επίλυση Συστήματος Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων – Προβλήματος Οριακών Τιμών	566
Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων – Προβλημάτων Οριακών Τιμών με χρήση συναρτήσεων του MATLAB	569
Λυμένες ασκήσεις	571
Ασκήσεις	577
Κώδικες MATLAB Κεφαλαίου 7	582

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις – Προβλήματα Αρχικών-Οριακών Τιμών	621
8.1 Εισαγωγή	621
8.2 Μέθοδος των γραμμών	625
Οριακή συνθήκη Neumann	627
8.3 Αριθμητική ευστάθεια	628
Άμεση Euler	632
Έμμεση Euler	632
□ Υπολογιστικό Εργαστήριο 8 – Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις – Προβλήματα Οριακών Τιμών και Προβλήματα Αρχικών Τιμών – Οριακών Τιμών	639
Σκοποί	639
Προκαταρκτικά	639
Επίλυση ελλειπτικής Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης – Προβλήματος Οριακών Τιμών χρησιμοποιώντας την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών	640
Κλιμάκωση του σφάλματος σε σχέση με την πύκνωση του πλέγματος σε μια ελλειπτική Μερική Διαφορική Εξίσωση ...	642
Πολλαπλές λύσεις μιας μη γραμμικής ελλειπτικής Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης Οριακών Τιμών	642
Επίλυση παραβολικής Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης ως προς τον χρόνο και μια χωρική διάσταση χρησιμοποιώντας την μέθοδο των Γραμμών	644
Αριθμητική ευστάθεια της μεθόδου των Γραμμών	646

Ασκήσεις	649
Κώδικες MATLAB Κεφαλαίου 8	653

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Εισαγωγή στο MATLAB	677
1. Εκχώρηση πραγματικών και μιγαδικών αριθμών σε μεταβλητές	679
2. Εισαγωγή διανυσμάτων και πινάκων	683
3. Μαθηματικές λειτουργίες και προτεραιότητες	687
4. Συναρτήσεις ενσωματωμένες στο MATLAB και αξιοποίηση της βοήθειας κατά την χρήση του MATLAB	690
5. Δημιουργία m-αρχείων και αρχείων συναρτήσεων στο MATLAB	697
6. Υποσυναρτήσεις, ιδιωτικές συναρτήσεις και φωλιασμένες συναρτήσεις	704
7. Δομημένος προγραμματισμός	708
8. Λογικοί πίνακες και η έννοια της διανυσματοποίησης (vectorization)	718
9. Γραφικές παραστάσεις στο MATLAB	720
BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	733
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΟΡΩΝ	739
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΑΓΓΛΙΚΩΝ ΟΡΩΝ.....	746
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΝΟΜΑΤΩΝ	748