ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

I

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1 Στοιχεία από τη Θεωρία των Συνόλων

Ορισμος Συγκέντρωση τελείως καθορισμένων αντικειμένων σε μία ολότητα ονομάζεται **σύνολο** και θα συμβολίζεται: $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ (πεπερασμένο), $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\ \alpha_\nu\dots\}$ (απειροσύνολο).

Με τα κεφαλαία γράμματα θα συμβολίζουμε τα σύνολα και με τα πεζά γράμματα τα στοιχεία τους.

Υπάρχει και ο τρόπος περιγραφής των στοιχείων ενός συνόλου που είναι ο εξής:

$$A=\{x\,/\,x\in\mathbb{R}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ |x|\le 1\}$$

διαβάζεται το σύνολο Α αποτελείται από τα στοιχεία x όπου x είναι πραγματικός αριθμός και επαληθεύει τη σχέση $|x|\le 1$.

Σημειωση 1) Τα στοιχεία ενός συνόλου είναι πάντα διαφορετικά μεταξύ τους. 2) Υπάρχει σύνολο το οποίο δεν έχει καθόλου στοιχεία. Το σύνολο αυτό λέγεται κενό και συμβολίζεται $|x|\in A$ ή $\varnothing$.

Συμβολισμοι

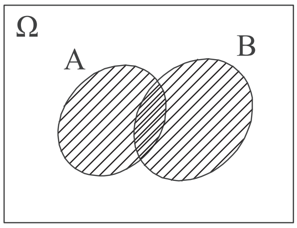
$\|x\|\in A$	το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο Α
$x\notin A$	το στοιχείο x δεν ανήκει στο σύνολο Α
$\exists x\in$	υπάρχει ένα τουλάχιστον x που ανήκει στο Α
$\forall x\in A$	για κάθε x που $\in A$.

- Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα όταν περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Θα γράφουμε $A\subseteq B$ και $B\subseteq A\Rightarrow A=B$.
- Το σύνολο Α θα λέγεται υποσύνολο του Β και θα συμβολίζουμε $A\subseteq B$ όταν δηλαδή όλα τα στοιχεία του συνόλου A βρίσκονται στο σύνολο B.

Πράξεις των συνόλων

1. **Ένωση δύο συνόλων *A* και *B***

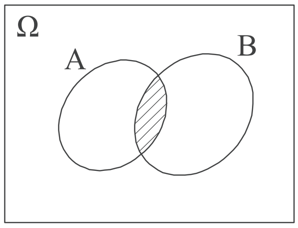
   $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ είτε } x \in B\}$.



2. **Τομή δύο συνόλων *A* και *B***

   $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ και } x \in B\}$

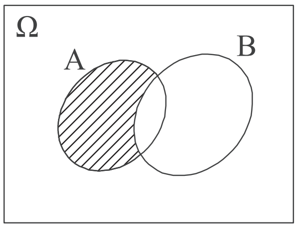
   δηλαδή τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων.



3. **Διαφορά δύο συνόλων *A* και *B***

   $A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ και } x \notin B\}$

   προφανώς ισχύει $A - B = A \cap B^c$



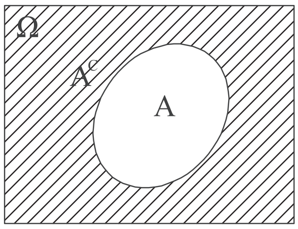
4. **Συμπλήρωμα ενός συνόλου**

   A ως προς τον χώρο αναφοράς *Ω* λέγεται το σύνολο των στοιχείων του χώρου Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται με A^c.

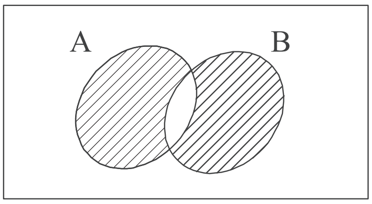
   $A^c = \{x \,/\, x \notin A \text{ και } x \in \Omega\}$.

   Επίσης, ισχύουν οι τύποι του Morgan:

   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



5. Ονομάζουμε **συμμετρική διαφορά** των συνόλων A και B και συμβολίζουμε $A \underset{\bullet}{+} B = (A - B) \cup (B - A)$.



6. Ονομάζουμε **καρτεσιανό γινόμενο** των συνόλων Α και Β το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x,y) όπου $x \in A$ και $y \in B$, δηλαδή

$$A \times B = \{(x,y) / x \in A \text{ και } y \in B\}$$

2 Ιδιότητες Διάταξης στο Σύνολο των Πραγματικών Αριθμών

1) $\alpha \le \beta$ και $\beta \le \gamma \Rightarrow \alpha \le \gamma$

2) $\alpha \le \beta \Rightarrow \alpha+\gamma \le \beta+\gamma$

3) $\alpha \le \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \le \beta \cdot \gamma$ όταν $\gamma > 0$

4) $\alpha \le \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \ge \beta \cdot \gamma$ όταν $\gamma < 0$

5) $\alpha \le \beta$ και $\gamma \le \delta$ τότε $\alpha + \gamma \le \beta + \delta$

6) $0 < \alpha \le \beta$ και $0 < \gamma \le \delta$ τότε $\alpha\gamma \le \beta\delta$

7) $\alpha \le \beta < 0$ και $\gamma \le \delta < 0$ τότε $\alpha\gamma \ge \beta\delta$

8) $0 < \alpha \le \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} \ge \frac{1}{\beta}$

9) $\alpha \le \beta < 0$ τότε $\frac{1}{\alpha} \ge \frac{1}{\beta}$

10) $1 < \alpha \le \beta \Rightarrow \alpha^{\nu} \le \beta^{\nu}$

11) $0 < \alpha \le \beta \le 1 \Rightarrow \alpha^{\nu} \le \beta^{\nu}$

3 Απόλυτες Τιμές

Ονομάζω απόλυτη τιμή αριθμού α και συμβολίζω $|\alpha|$ τον αριθμό χωρίς το πρόσημο δηλαδή $|\alpha| \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ π.χ. $|-5| = 5, |5| = 5$, δηλαδή ο αριθμός α μπορεί να είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν, ενώ η ποσότης $|\alpha|$ είναι πάντα **μη αρνητικός αριθμός.**

Οπότε έχω $|\alpha| = \alpha$ όταν $\alpha \geq 0$

$|\alpha| = -\alpha$ όταν $\alpha < 0$

Ιδιοτητες

1) $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

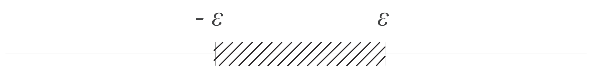
2) $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

3) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

4) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ όταν $\beta \neq 0$

5) $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

6) $|\alpha| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \alpha < \varepsilon$

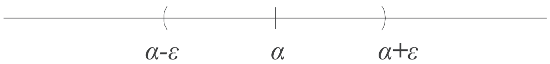


7) $|\alpha| > \varepsilon \Rightarrow$ ή $\alpha > \varepsilon$ ή $\alpha < -\varepsilon$

$\Rightarrow \alpha \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$.

4 Περιοχή Σημείου

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ σημείου α, με ακτίνα ε



ονομάζουμε το ανοικτό διάστημα όταν ένας αριθμός $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, δηλαδή στην περιοχή του α θα ισχύει $\alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon$ οπότε θα έχω $-\varepsilon < x - \alpha < \varepsilon \Rightarrow |x - \alpha| < \varepsilon$, όπου $\varepsilon > 0$.

5 Μαθηματική Επαγωγή

Αξίωμα της επαγωγής (Peano, Dedekind)

Εάν μια πρόταση ισχύει για $\nu = 1$ υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = \kappa \in N^*$ και αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = \kappa + 1$ τότε η πρόταση θα ισχύει $\forall \nu \in N^*$.

Γενίκευση του αξιώματος της επαγωγής κατά Cauchy.

Εάν μια πρόταση ισχύει για $\nu = 1$ υποθέσουμε ότι ισχύει $\forall \kappa \in N^*\ \kappa \le \nu$ και αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu + 1$ τότε η πρόταση θα ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Εφαρμογές του αξιώματος της επαγωγής

1. Ανίσωση του Bernoulli

Για κάθε $\alpha > -1$ και $\nu \in N^*$ θα ισχύει η ανίσωση $(1+\alpha)^\nu \ge 1 + \nu\alpha$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Προφανώς η ισότητα ισχύει για $\nu = 1$ οπότε θα έχω $1+\alpha = 1+\alpha$, για $\nu = 2$ θα έχω $(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2 > 1+2\alpha$ δηλαδή για $\nu = 2$ η πρόταση ισχύει. Υποθέτουμε ότι η πρόταση θα ισχύει για $\nu = \kappa \in N^*$, δηλαδή ότι Θα αποδείξουμε την πρόταση για $\nu = \kappa+1$ δηλαδή θα αποδείξουμε ότι $(1+\alpha)^{\kappa+1} > 1+(\kappa+1)\alpha$. Πράγματι,

$$(1+\alpha)^{\kappa+1} = (1+\alpha)^{\kappa}\cdot(1+\alpha) > (1+\kappa\alpha)\cdot(1+\alpha) =$$

$$= 1+\alpha+\kappa\alpha+\kappa\alpha^2 = 1+(\kappa+1)\alpha+\kappa\alpha^2 > 1+(\kappa+1)\alpha$$

αφού $\kappa\alpha^2 \geq 0$, άρα η πρόταση ισχύει $\forall \nu \in N^*$.

Είναι προφανές ότι η ισότης στην πρόταση ισχύει και για $\nu = 0$, αφού προκύπτει $1 = 1$.

2. Πρόταση του Cauchy

Εάν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ θετικοί πραγματικοί $\nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 2$

και $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 ... \cdot x_\nu = 1$ τότε $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_\nu \geq \nu$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για $\nu = 2,\ x_1 \cdot x_2 = 1,\ x_1, x_2 > 0$,

$$x_1 + x_2 = \sqrt{x_1}^2 + \sqrt{x_2}^2 > 2\sqrt{x_1 x_2} = 2$$

επομένως, η πρόταση για $\nu = 2$ ισχύει υποθέτω ότι η πρόταση ισχύει για κ όρους, δηλαδή αν $x_1 \cdot x_2 ... x_\kappa = 1$, τότε $x_1 + x_2 + ... + x_\kappa \geq \kappa$ θα αποδείξω την πρόταση για $\nu = \kappa+1$ δηλαδή ότι

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 ... + x_\kappa \cdot x_{\kappa+1} = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_\kappa + x_{k+1} \geq \kappa+1$$

για να είναι ένα γινόμενο θετικών αριθμών $= 1$ πρέπει κάποιοι από αυτούς να είναι μεγαλύτεροι του 1 και κάποιοι μικρότεροι του 1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε έστω όχι $x_1 - 1 > 0$ και $x_2 - 1 < 0$ οπότε το γινόμενο δύο ετεροσήμων θα είναι αρνητικός αριθμός, δηλαδή $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Rightarrow x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 < 0$, οπότε

$$x_1 x_2 + 1 < x_1 + x_2 \qquad (1)$$

από την υπόθεση των $\kappa+1$ όρων

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_\kappa \cdot x_{\kappa+1} = 1 \Rightarrow (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 \ldots x_\kappa \cdot x_{k+1} = 1$$

με θεώρηση του αποτελέσματος της παρένθεσης σαν ένα όρο ισχύει η υπόθεση της πρότασης για κ όρους, δηλαδή

$$x_1 \cdot x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_\kappa \cdot x_{\kappa+1} \geq \kappa$$

προσθέτω και στα δύο μέλη την μονάδα οπότε θα έχω

$$x_1 x_2 + 1 + x_3 + x_4 + \ldots + x_\kappa + x_{\kappa+1} \geq \kappa + 1 \qquad (2)$$

Με αντικατάσταση της (1) στην (2) ενισχύω το πρώτο μέλος, οπότε θα έχω

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_\kappa + x_{\kappa+1} \geq \kappa + 1$$

άρα, για θετικούς όρους και για κάθε $\nu \in N^*$ $\nu \geq 2$, αν $x_1 x_2 \ldots x_\nu = 1$ θα ισχύει $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu \geq \nu$.

Με τη βοήθεια της προηγούμενης προτάσεως αποδεικνύεται η ανίσωση του Cauchy, αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\nu$ θετικοί όροι ισχύει

$$\underbrace{\frac{\alpha_1, \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu}{\nu}}_{\text{μέσος αριθμητικός}} \geq \underbrace{\sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_\nu}}_{\text{μέσος γεωμετρικός}} \geq \underbrace{\frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_\nu}}}_{\text{μέσος αρμονικός}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ονομάζω $\sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_\nu} = M$ και υψώνω εις την ν-οστή δύναμη και τα δύο μέλη θα έχω

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \alpha_\nu = M^\nu \Rightarrow \frac{\alpha_1}{M} \cdot \frac{\alpha_2}{M} \cdot \frac{\alpha_3}{M} \cdots \frac{\alpha_\nu}{M} = 1$$

οπότε, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση θα ισχύει

$$\frac{\alpha_1}{M}+\frac{\alpha_2}{M}+\frac{\alpha_3}{M}+....+\frac{\alpha_\nu}{M}\geq \nu \Rightarrow \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{M}\geq \nu$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}\geq M$$

οπότε

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}\geq \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu} \qquad (3)$$

εφαρμόζω την πρόταση **(3)** για τους αριθμούς $\frac{1}{\alpha_1},...,\frac{1}{\alpha_\nu}$

$$\frac{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+...+\frac{1}{\alpha_\nu}}{\nu}\geq \sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{1}{\alpha_2}\cdot\frac{1}{\alpha_3}...\frac{1}{\alpha_\nu}}=\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_\nu}} \qquad (4)$$

αντιστρέφω τους όρους της σχέσης **(4)** οπότε θα έχω

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_\nu}\geq \frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\nu}}$$

άρα ισχύει η ανίσωση Cauchy.

Εάν $\nu \geq 5$ $\nu \in N$ τότε θα ισχύει $2^\nu \geq \nu^2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για $\nu = 5$ $2^5>5^2 \Rightarrow 32>25$ ισχύει. Υποθέτω ότι η πρόταση ισχύει για $\nu=\kappa$, δηλαδή $2^\kappa>\kappa^2$ (5), θα αποδείξω ότι $2^{\kappa+1}>(\kappa+1)^2$. Από την (5) με πολλαπλασιασμό των δύο μελών επί 2 θα έχω $2\cdot 2^\kappa>2\kappa^2$, δηλαδή $2^{\kappa+1}>2\kappa^2$. Οπότε, αρκεί να αποδείξω ότι

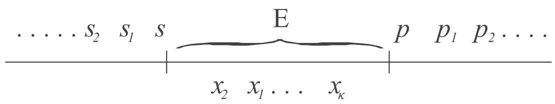
$$2\kappa^2>(\kappa+1)^2 \Leftrightarrow 2\kappa^2>\kappa^2+2\kappa+1 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa>1 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa>1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa+1>2 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2>2$, το οποίο ισχύει για $\kappa \geq 5$.

Άρα, $2^{\kappa+1}>(\kappa+1)^2 \Rightarrow$ η πρόταση ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 5$.

6 Έννοια Αξιώματος

Αξίωμα του ελαχίστου άνω φράγματος ενός συνόλου και του μεγίστου κάτω φράγματος του συνόλου. Έστω Ε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών εάν $\forall x \in E \Rightarrow s < x < p$ όπου s, p πραγματικοί αριθμοί το σύνολο Ε λέγεται φραγμένο.



ο μικρότερος από τα ανώτερα φράγματα δηλαδή ο p λέγεται ελάχιστο άνω φράγμα ή ανώτερο πέρας ή supremum του E και συμβολίζεται $supE$. Αντίστοιχα το μέγιστο κάτω φράγμα λέγεται κατώτερο πέρας ή infimum του E και συμβολίζεται $inf\,E$.

7 Εκθετική Συνάρτηση

$$y = \alpha^x \quad \text{όπου } a > 0 \text{ και } a \neq 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

(στην περίπτωση $a = 0$ ή $a = 1$ έχω σταθερή συνάρτηση την $y = 0$ ή $y = 1$) η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη επομένως είναι $"1-1"$ άρα $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Επίσης όταν $a > 1$ η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$. Όταν $0 < a < 1$ η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$

1) $f(x_1) \cdot f(x_2) = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} = f(x_1 + x_2)$

2) $f(x_1) : f(x_2) = a^{x_1} : a^{x_2} = f(x_1 - x_2)$

3) $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$

4) $\alpha^x \cdot \beta^x = (a\beta)^x$

5) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x = \dfrac{\alpha^x}{\beta^x}$

6) $\alpha^{-x} = \dfrac{1}{\alpha^x}$

7) $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$

8 Λογαριθμική Συνάρτηση $f(x) = log_a x$

Είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης

$$x > 0 \qquad a > 0 \qquad a \neq 1$$

η λογαριθμική συνάρτηση είναι επίσης γνησίως μονότονη, οπότε είναι $"1-1"$, άρα

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow log_a x_1 = log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

επίσης, όταν $\alpha > 1$ η $f(x) = log_\alpha x$ είναι ↗ δηλαδή

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow log_\alpha x_1 > log_\alpha x_2$$

όταν $0 < a < 1$ η $f(x) = log_a x$ είναι ↘ οπότε

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow log_\alpha x_1 < log_\alpha x_2$$

Ιδιότητες λογαρίθμων

1) $log_a(x_1 \cdot x_2) = log_a x_1 + log_a x_2$

2) $log\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=log_a x_1 - log_a x_2$

3) $log_\alpha x^\nu = \nu\, log_a x$

4) $log_\alpha \sqrt[\nu]{x} = \dfrac{1}{\nu} log_a x$ 5) $log_a a = 1$

6) $log_a 1 = 0$ 7) $log_\alpha N = \dfrac{log_\beta N}{log_\beta \alpha}$

8) $\alpha^\beta = e^{\beta \ln a}$ 9) $x^{log\, y} = y^{log\, x}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αφού με $\alpha > 1$ η λογαριθμική συνάρτηση είναι $\nearrow$.

Αν $x > 1 \Rightarrow log_a x > log_a 1 \Rightarrow log_a x > 0$

Αν $0 < x < 1 \Rightarrow log_a x < log_a 1 \Rightarrow log_a x < 0$

9 Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

$$\eta\mu x = \eta\mu\alpha \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \alpha \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \alpha \end{array}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\alpha \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \alpha$$

$$\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi a \Rightarrow x = \kappa\pi + \alpha$$

$$\sigma\phi x = \sigma\phi\alpha \Rightarrow x = \kappa\pi + \alpha$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί στοιχειωδών τόξων

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu\, x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\sigma\upsilon\nu\, x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\varepsilon\varphi\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορ. $\pm\infty$	0	δεν ορ. $\pm\infty$	0
$\sigma\varphi\, x$	δεν ορ. $\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	δεν ορ. $\pm\infty$	0	δεν ορ. $\pm\infty$

Αναγωγή τριγωνομετρικών αιρθμών στο πρώτο τεταρτημόριο

$\kappa \in \mathbb{Z}$

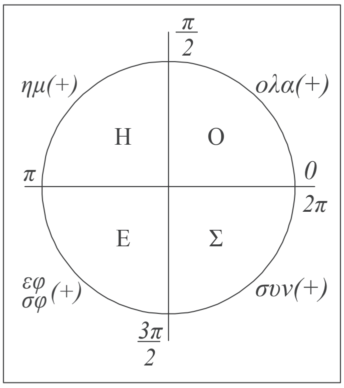
$\eta\mu(2\kappa\pi+\phi)=\eta\mu\phi$, $\quad$ $\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi+\phi)=\sigma\upsilon\nu\phi$

$\varepsilon\phi(2\kappa\pi+\phi)=\varepsilon\phi\phi$, $\quad$ $\sigma\phi(2\kappa\pi+\phi)=\sigma\phi\phi$

$\eta\mu(-\phi)=-\eta\mu\phi$, $\quad$ $\sigma\upsilon\nu(-\phi)=\sigma\upsilon\nu\phi$

$\varepsilon\phi(-\phi)=-\varepsilon\phi\phi$, $\quad$ $\sigma\phi(-\phi)=-\sigma\phi\phi$

Πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών στα 4 τεταρτημόρια



Μνημονικός κανόνας

Όταν τα τόξα διαφέρουν κατά 90° ή 270° έχουμε αλλαγή, δηλαδή

$$\eta\mu x \leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x$$

$$\varepsilon\phi x \leftrightarrow \sigma\phi x$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

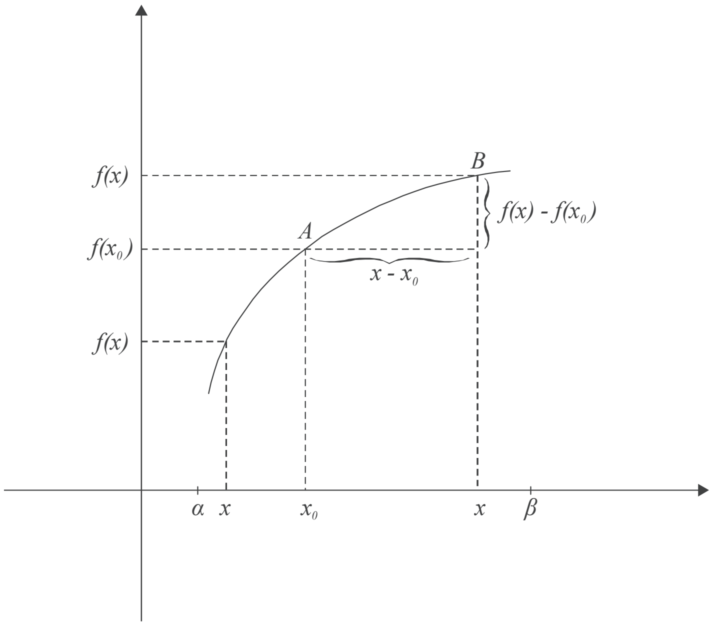
ΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1 Παράγωγοι Συναρτήσεων

Παράγωγος Συνάρτησης



Έστω $f(x)$ συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ και x_o σημείο του (α,β) σχηματίζω τον λόγο μεταβολής $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$.

Ονομάζω παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $x_o \in (\alpha,\beta)$ το όριο

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

εάν υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

Όπως έχουμε δει στα όρια για να υπάρχει το ανωτέρω όριο πρέπει

$$\underbrace{\lim_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}_{\substack{\text{εκ δεξιών παράγωγος}\\ \text{στο } x_o \text{ συμβολισμός}\\ f'_+(x_o)}}=\underbrace{\lim_{x\to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}_{\substack{\text{εξ αριστερών παράγωγος}\\ \text{στο } x_o \text{ συμβολισμός}\\ f'_-(x_o)}}$$

Συμβολισμοί παραγώγου στο x_o $f'(x_o)$

1) $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o)$.

Ονομάζω Δx τη μεταβολή $\Delta x=x-x_o$ οπότε $x=x_o+\Delta x$, ο προηγούμενος λόγος γίνεται

2) $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}=f'(x_o)$

Ονομάζω το $\Delta x=h$ οπότε θα έχω

3) $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=f'(x_o)$

Στον 1ο συμβολισμό θέτω $\Delta y=f(x)-f(x_o)$ και $\Delta x=x-x_o$ οπότε θα έχω

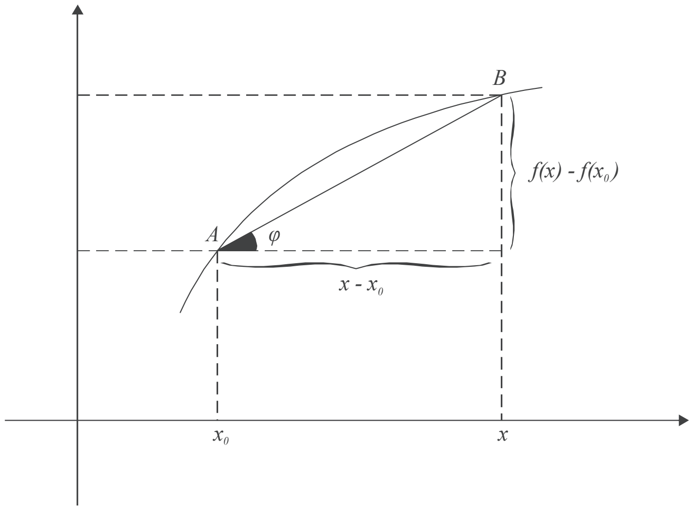
$$\lim_{x\to x_o}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_o)$$

4) Όταν το $x\to x_o$ αφού η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση και το $f(x)\to f(x_o)$, οπότε όταν $\Delta x\to 0\Rightarrow$ και $\Delta y\to 0$ τις απειροελάχιστες αυτές ποσότητες των Δx και Δy τις ονομάζω **διαφορικά** και τις συμβολίζω dx και dy αντίστοιχα, οπότε η παράγωγος μπορεί να συμβολισθεί

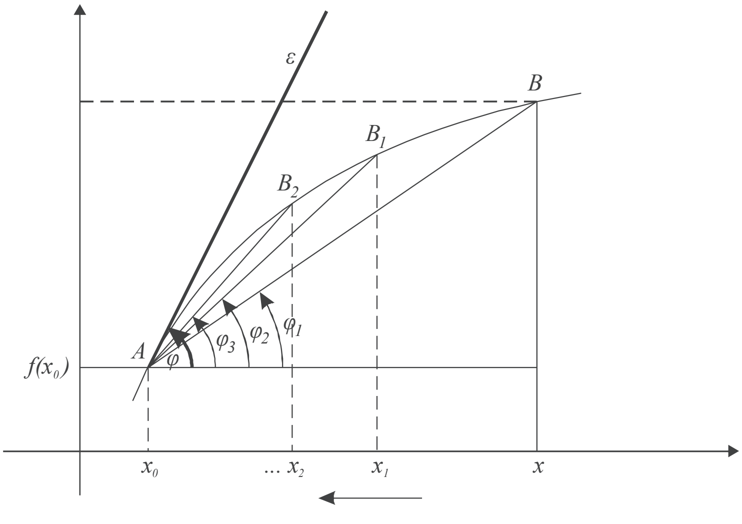
$$\frac{dy}{dx}=f'(x_o).$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Μία συνάρτηση θα λέγεται παραγωγίσιμη στο διάστημα D όταν είναι παραγωγίσιμη $\forall x_o\in D$.

Γεωμετρική σημασία της παραγώγου



Ο λόγος μεταβολής $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\varepsilon\varphi\phi=\lambda$ παριστάνει την εφαπτομένη της γωνίας φ που σχηματίζει χορδή AB με την παράλληλη προς τον άξονα xx', δηλαδή την κλίση της AB (με τον άξονα xx').



Όταν $x \to x_o$ το $B \to$ στο A οπότε τελικά το B ταυτίζεται με το A και η χορδή $AB \to$ να γίνει εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $\left(x_o, f\left(x_o\right)\right)$ αυτής.

Επομένως η παράγωγος παριστάνει την κλίση της ευθείας ε που εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο $\left(x_o, f\left(x_o\right)\right)$ αυτής.

$$\boxed{f'\left(x_o\right) = \varepsilon\varphi\phi = \lambda}.$$

Επομένως, η εφαπτομένη της καμπύλης $y = f\left(x\right)$ στο σημείο $\left(x_o, f\left(x_o\right)\right)$ αυτής θα δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{y - f\left(x_o\right) = f'\left(x_o\right) \quad \left(x - x_o\right)}$$

αφού το $\lambda = f'\left(x_o\right)$ επίσης με τον όρο **κάθετη** στην καμπύλη εννοούμε την ευθεία την κάθετη στην εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $\left(x_o, f\left(x_o\right)\right)$ και σύμφωνα με τον τύπο για τους συντελεστές διευθύνσεως δύο καθέτων ευθειών $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1.$ Οπότε, η κάθετη στην καμπύλη ευθεία στο σημείο $\left(x_o, f\left(x_o\right)\right)$ δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{y - f\left(x_o\right) = -\frac{1}{f'\left(x_o\right)}\left(x - x_o\right)}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Για να είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη πρέπει να είναι συνεχής αυτό, όμως δεν εξασφαλίζει το ότι είναι παραγωγίσιμη κάθε συνεχής συνάρτηση ενώ το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι συνεχής.

ΘΕΩΡΗΜΑ Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα D ορισμού της είναι και συνεχής στο D.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $f(x)$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο D, επομένως $\forall x_o \in D$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o) \Leftrightarrow \frac{\lim\limits_{x \to x_o}\left(f(x) - f(x_o)\right)}{\lim\limits_{x \to x_o}(x - x_o)} = f'(x_o) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_o}\left(f(x) - f(x_o)\right) = \lim_{x \to x_o}(x - x_o) \cdot f'(x_o) = 0$$

οπότε $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ άρα συνεχής.

2 Παράγωγοι των Πράξεων

Έστω $f(x), g(x)$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\forall x_o \in D$ κοινό πεδίο ορισμού τους.

1. Θεωρώ $\Phi(x) = f(x) + g(x)$. Σχηματίζω

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) + g(x) - \left(f(x_o) + g(x_o)\right)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o) + g(x) - g(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} + \lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= f'(x_o) + g'(x_o).$$

Επομένως

$$\boxed{(f \pm g)' = f' \pm g'}$$

η πρόταση γενικεύεται για ν όρους.

2. Θεωρώ $\Phi(x)=f(x)\cdot g(x)$ σχηματίζω

$$\lim_{x\to x_o}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_o)\cdot g(x_o)}{x-x_o}=$$

προσθέτω και αφαιρώ τον παράγοντα $f(x)\cdot g(x_o)$ στον αριθμητή

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x_o)+f(x)\cdot g(x_o)-f(x_o)\cdot g(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}f(x)\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}+g(x_o)\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=$$

$$=f(x_o)\cdot g'(x_o)+g(x_o)\cdot f'(x_o)$$

Επομένως

$$\boxed{(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'}$$

για τρεις όρους θα έχουμε

$$(f\cdot g\cdot\phi)'=(f\cdot g)'\cdot\phi+(f\cdot g)\phi'=$$

$$=(f'\cdot g+f\cdot g')\phi+f\cdot g\cdot\phi'=$$

$$=f'\cdot g\cdot\phi+f\cdot g'\cdot\phi+f\cdot g\cdot\phi'$$

επαγωγικά γενικεύεται για ν-όρους.

3. Έστω $f(x)\neq 0$ και $f(x_o)\neq 0$ $\forall x\in D$

Θεωρώ $\Phi(x)=\dfrac{1}{f(x)}$. Θα έχω

$$\lim_{x\to x_o}\frac{\phi(x)-\phi(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{f(x_o)}}{x-x_o}=$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{1}{f(x) f(x_o)} \cdot \frac{f(x_o) - f(x)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} - \frac{1}{f(x) \cdot f(x_o)} \cdot \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{-1}{f^2(x_o)} \cdot f'(x_o).$$

Επομένως

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}}.$$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' =$

$$= \frac{f'}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \qquad g \neq 0, \forall x \in D$$

Επομένως, θα έχουμε τον τύπο του πηλίκου.

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}.$$

Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

1. $f(x) = x$ (ταυτοτική συνάρτηση)

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x - x_o}{x - x_o} = 1.$$

Επομένως

$$\boxed{x' = 1}.$$

2. $f(x)=c$ (σταθερή συνάρτηση)

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{c-c}{x-x_o}=0.$$

Επομένως

$$\boxed{c'=1}.$$

3. $f(x)=x^{\nu}$ $\nu\in N$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{x^{\nu}-x_o^{\nu}}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{\cancel{(x-x_o)}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_o+...+x_o^{\nu-1}\right)}{\cancel{(x-x_o)}}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_o+...+x_o^{\nu-1}\right)=x_o^{\ \nu-1}+x^{\nu-1}+...+x_o^{\nu-1}=\nu x_o^{\nu-1}$$

$$\boxed{\left(x^{\nu}\right)'=\nu\cdot x^{\nu-1}}.$$

4. $f(x)=e^{x}$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{e^{x}-e^{x_o}}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{e^{x_o}\left(e^{x-x_o}-1\right)}{x-x_o}=e^{x_o}\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{e^{x-x_o}-1}{x-x_o}=$$

$$=e^{x_o}\cdot 1=e^{x_o}$$

5. $f(x)=\ln x$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{\ln x-\ln x_o}{x-x_o}=$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{ln\frac{x}{x_o}}{x_o\left(\frac{x}{x_o}-1\right)} = \frac{1}{x_o}\lim_{x\to x_o}\frac{ln\frac{x}{x_o}}{\frac{x}{x_o}-1} = \frac{1}{x_o}\lim_{\frac{x}{x_o}\to 1_o}\frac{ln\frac{x}{x_o}}{\frac{x}{x_o}-1} =$$

$$= \frac{1}{x_o}\cdot 1 = \frac{1}{x_o}.$$

$$\boxed{(ln\,x)' = \frac{1}{x}}.$$

6. $f(x) = log_\alpha x = \dfrac{ln\,x}{ln\,\alpha}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{ln\,\alpha}\cdot ln\,x\right)' = \left(\frac{1}{ln\,\alpha}\right)'\cdot ln\,x + \frac{1}{ln\,\alpha}(ln\,x)' =$$

$$= 0 + \frac{1}{ln\,\alpha}\cdot\frac{1}{x}.$$

Οπότε

$$\boxed{(log_\alpha x)' = \frac{1}{ln\,\alpha}\cdot\frac{1}{x}}.$$

7. $f(x) = \eta\mu x$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{\eta\mu x - \eta\mu x_o}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o}\frac{2\eta\mu\frac{x-x_o}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x+x_o}{2}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{\eta\mu\frac{x-x_o}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x+x_o}{2}}{\frac{x-x_o}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{\eta\mu \frac{x-x_o}{2}}{\frac{x-x_o}{2}} \cdot \lim_{x\to x_o} \sigma\upsilon\nu \frac{x+x_o}{2} = 1\cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x_o+x_o}{2} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu \frac{2x_o}{2} = \sigma\upsilon\nu x_o.$$

$$\boxed{(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x}.$$

8. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x_o}{x-x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{-2\eta\mu \frac{x-x_o}{2} \cdot \eta\mu \frac{x+x_o}{2}}{x-x_o} = -\lim_{x\to x_o} \frac{\eta\mu \frac{x-x_o}{2}}{\frac{x-x_o}{2}} \cdot \lim_{x\to x_o} \eta\mu \frac{x+x_o}{2} =$$

$$= -1\cdot \eta\mu \frac{x_o+x_o}{2} = -1\cdot \eta\mu \frac{2x_o}{2} = -\eta\mu x_o.$$

$$\boxed{(\sigma\upsilon\nu x') = -\eta\mu x}.$$

9. $f(x) = \varepsilon\phi(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad \text{ή} \quad (\varepsilon\phi^2 x + 1)$$

$$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = (1 + \varepsilon\phi^2 x).$$

10. $f(x)=\sigma\phi(x)$

$$f'(x)=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)'=\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'\cdot\eta\mu x-(\sigma\upsilon\nu x)\cdot(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x}=$$

$$=\frac{-\eta\mu x\cdot\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}=\frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}=$$

$$=\frac{-1}{\eta\mu^2 x} \quad \text{ή} \quad =-\left(1+\sigma\phi^2 x\right)$$

$$(\sigma\phi x)'=\frac{-1}{\eta\mu^2 x}=-\left(1+\sigma\phi^2 x\right).$$

11. Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης.

Ισχύει η προφανής σχέση

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot\lim_{x\to x_o}\frac{x-x_o}{f(x)-f(x_o)}=1.$$

Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής και με την προϋπόθεση ότι η αντίστροφη της f , η f^{-1} υπάρχει, ισχύουν τα εξής:

$$y=f(x) \qquad y_o=f(x_o)$$

η αντίστροφη είναι η $x=f^{-1}(y)$ και $x_o=f^{-1}(y_o)$.

Επίσης, όταν $x\to x_o \Leftrightarrow y\to y_o$, οπότε η προφανής σχέση γίνεται:

$$\underbrace{\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}_{\substack{\text{συμβολίζω}\\ y'_x}}\cdot\underbrace{\lim_{y\to y_o}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)}{y-y_o}}_{\substack{\text{συμβολίζω}\\ x'_y}}=1\,.$$

Επομένως, προκύπτει ο τύπος

$$\boxed{y'_x\cdot x'_y=1}.$$

Τη σχέση αυτή συμβολικά με διαφορικά μπορούμε να τη γράψουμε

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1.$$

12. $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{\nu}} \qquad x\geq 0$

Αν $y=x^{\frac{1}{\nu}}\Rightarrow x=y^{\nu} \quad y=0$, οπότε $\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)_x^{1}\cdot\left(y^{\nu}\right)_y^{1}=1$.

Επομένως, θα έχω

$$\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)_x^{1}\cdot\nu y^{\nu-1}=1\Rightarrow\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)'=\frac{1}{\nu y^{\nu-1}} \quad \text{αλλά} \quad y=\sqrt[\nu]{x}$$

οπότε

$$\boxed{\left(\sqrt[\nu]{x}\right)'=\frac{1}{\nu\sqrt[\nu]{x^{\nu-1}}}}.$$

13. $y=\alpha^{x}\Leftrightarrow x=log_{\alpha}y\,,\alpha>0,\ y>0,\ x\in R,\ \alpha\neq 1$

Επομένως,

$$\left(\alpha^{x}\right)'_x\cdot\left(log_{\alpha}y\right)'_y=1\Rightarrow\left(\alpha^{x}\right)'_x\cdot\frac{1}{ln\alpha}\cdot\frac{1}{y}=1\Rightarrow$$

$$\left(\alpha^{x}\right)'=y\cdot ln\alpha \quad \text{αλλά} \quad y=\alpha^{x}.$$

Επομένως, θα έχω

$$\boxed{\left(\alpha^{x}\right)'=\alpha^{x}\cdot ln\alpha}.$$

14. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Έστω $f\left(x\right),g\left(x\right)$ δύο συνεχείς συναρτήσεις και έστω ότι υπάρχει η $fog\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)$, με πεδίο ορισμού το D ονομάζω $\Phi\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)$, ορισμένη στο D και $x_o\in D$ σχηματίζω