ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

5.4. Ο αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα

5.4.1. Ορισμός. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in F_{\nu\times\nu}$ λέγεται ***αντιστρέψιμος*** ή ***ομαλός***, αν υπάρχει πίνακας $B \in F_{\nu\times\nu}$ τέτοιος ώστε να είναι

$$AB = BA = I_\nu. \tag{1}$$

5.4.2. Πρόταση. Αν ο $\nu\times\nu$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας B που επαληθεύει τις ισότητες (1) ορίζεται μονότιμα από τον A.

5.4.3. Ορισμός. Αν ο $\nu\times\nu$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, ο μονότιμα ορισμένος πίνακας B που επαληθεύει τις (1) λέγεται ***αντίστροφος του*** A και συμβολίζεται με $\boldsymbol{A^{-1}}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα A έχουμε

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_\nu\ . \tag{2}$$

5.4.4. Θεώρημα.

(α) Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in F_{\nu\times\nu}$ είναι αντιστρέψιμος αν, και μόνο αν, είναι

$$\|A\| \neq 0\ .$$

(β) Ο αντίστροφός του πίνακας δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{\|A\|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\nu} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{\nu1} & A_{\nu2} & \cdots & A_{\nu\nu}\end{bmatrix}^t = \frac{1}{\|A\|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{\nu1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{\nu2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & \dots & A_{\nu\nu}\end{bmatrix}, \tag{3}$$

όπου $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$ και $M_{ij}(A)$ είναι οι ελάσσονες ορίζουσες του πίνακα A .

5.4.5. Παράδειγμα. Να δειχτεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{3\times3}\,,$$

όπου $\alpha\varepsilon \neq 0$, είναι αντιστρέψιμος και στη συνέχεια να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Λύση. Έχουμε

$$\|A\| \overset{(\Sigma_1)}{\cong} (-1)^{1+1}\alpha\cdot\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \varepsilon \end{Vmatrix} + 0 + 0 = \alpha(\alpha\cdot\varepsilon - \gamma\cdot 0) = \alpha^2\varepsilon \neq 0\,,$$

αφού $\alpha\varepsilon \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$ και $\varepsilon \neq 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4.4, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Βρίσκουμε τώρα τις ελάσσονες ορίζουσες του πίνακα A . Έχουμε

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{Vmatrix}\alpha & 0\\ \gamma & \varepsilon\end{Vmatrix} = \alpha\varepsilon\,,\ \ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{Vmatrix} = 0\,,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{Vmatrix}0 & \alpha\\ 0 & \gamma\end{Vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{Vmatrix}\beta & \delta\\ \gamma & \varepsilon\end{Vmatrix} = \delta\gamma - \beta\varepsilon,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{Vmatrix}\alpha & \delta\\ 0 & \varepsilon\end{Vmatrix} = \alpha\varepsilon,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{Vmatrix} = -\,\alpha\gamma,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{Vmatrix}\beta & \delta\\ \alpha & 0\end{Vmatrix} = -\alpha\delta,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{Vmatrix}\alpha & \delta\\ 0 & 0\end{Vmatrix} = 0\,,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{Vmatrix} = \alpha^2$$

και ο τύπος (3) δίνει

$$A^{-1} = \frac{1}{\|A\|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{3\nu}\end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha^2\varepsilon}\begin{bmatrix}\alpha\varepsilon & \gamma\delta - \beta\varepsilon & -\,\alpha\delta\\ 0 & \alpha\varepsilon & 0\\ 0 & -\,\alpha\gamma & \alpha^2\end{bmatrix}.$$

5.4.6. Παρατήρηση. Ας είναι $A, B \in F_{\nu\times\nu}$. Από την ισότητα $A \cdot B = I_\nu$ (ή την $BA = I_\nu$) προκύπτει ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ότι $B = A^{-1}$.

5.4.7. Πρόταση. Ας είναι $A \in F_{\nu\times\nu}$. Αν με στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του ν × (2ν) ***"διαμερισμένου πίνακα"*** $[I_\nu \vdots A]$ τον μετατρέψουμε στον πίνακα $[B \vdots I_\nu]$ (αυτό είναι δυνατό μόνο όταν ο A είναι αντιστρέψιμος), τότε είναι $B = A^{-1}$.

5.4.8. Παράδειγμα. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Λύση.

$$[I_4 \vdots A] = \left[\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right] \underset{\Gamma_4-\Gamma_1}{\overset{\Gamma_2-\Gamma_1}{\overset{\Gamma_3-\Gamma_1}{=}}} \left[\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right] \to$$

$$\overset{\Gamma_1+\left(\frac{1}{2}\Gamma_2+\frac{1}{2}\Gamma_3+\frac{1}{2}\Gamma_4\right)}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc:cccc}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right] \underset{-\frac{1}{2}\Gamma_4}{\overset{-\frac{1}{2}\Gamma_2,\ -\frac{1}{2}\Gamma_3}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc:c}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & I_4\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \end{array}\right].$$

Επομένως

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5.4.9. Πρόταση. Αν ο πίνακας $A \in F_{\nu\times\nu}$ επαληθεύει το πολυώνυμο

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k, \text{ όπου } a_0 \neq 0,$$

δηλ. αν είναι

$$a_0 I_\nu + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k = 0,$$

τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1 I_\nu + a_2 A + a_3 A^2 \cdots + a_k A^{k-1}).$$

5.4.10. Παρατήρηση. Η Πρόταση 5.4.9 μας δίνει ***νέα μέθοδο εύρεσης του αντίστροφου ενός πίνακα***, αφού κάθε τετραγωνικός πίνακας $A \in F_{\nu\times\nu}$ επαληθεύει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $X_A = \|A - \lambda I_\nu\|$ (Βλέπε § 5.6.2).

5.4.11. Παράδειγμα. Να δειχτεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

επαληθεύει το πολυώνυμο

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

και στη συνέχεια να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Λύση. Έχουμε

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & -14 \\ -7 & 7 & -15 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$p(A) = A^3 + 2A^2 - A - 2I_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & -14 \\ -7 & 7 & -15 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2-1-2 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ -5+6-1+0 & 6-4+0-2 & -14+12+2+0 \\ -7+6+1+0 & 7-6-1+0 & -15+14+3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Τέλος,

$$p(A) = 0 \;\Rightarrow\; A^3 + 2A^2 - A - 2I_3 = 0 \;\Rightarrow 2I_3 = A^3 + 2A^2 - A \;\Rightarrow\; I_3 = \frac{1}{2}A(A^2 + 2A - I_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \tfrac{1}{2}(A^2 + 2A - I_3) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+2-1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 3+2+0 & -2+0-1 & 6-4+0 \\ 3-2+0 & -3+2+0 & 7-6-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

5.4.12. Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

(**<u>Απάντηση</u> :** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.)

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(**<u>Απάντηση</u> :** $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(**<u>Απάντηση</u> :** $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.)

Άσκηση 4

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(**<u>Απάντηση</u>** :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} A \,.)$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\nu \times \nu,\ \nu \geq 2,$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_2 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \alpha_{\nu-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_\nu & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

όπου $\alpha_i \in \mathbb{R},\ \ \alpha_i \neq 0, \forall\, i = 1, 2, \cdots, \nu.$

(**<u>Απάντηση</u>** : $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\alpha_\nu} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\alpha_{\nu-1}} & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.)

Άσκηση 6

Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\nu \times \nu,\ \nu \geq 2,$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \cdots & \alpha^{\nu-1} \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{\nu-2} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{\nu-3} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

(**<u>Απάντηση</u>** : $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

5.5. Γραμμικά συστήματα

5.5.1. Ορισμός. Οι μ σε πλήθος συνθήκες (εξισώσεις πρώτου βαθμού)

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \ \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = \beta_\mu \end{cases}, \tag{1}$$

όπου α_{ij}, $\beta_i \in F$, για όλα τα $i = 1, 2, \cdots, \mu,\ j = 1, 2, \cdots, \nu$ και μ,ν$\in \mathbb{N}$, λέμε ότι αποτελούν ένα ***σύστημα μ πρωτοβάθμιων εξισώσεων με ν άγνωστους*** (τους $x_1,\ x_2, \cdots x_\nu$) ή ένα ***γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν άγνωστους.***

5.5.2. Ορισμός. Μια διατεταγμένη $\nu - \acute{\alpha}\delta\alpha$ $(x_1,\ x_2, \cdots x_\nu)$ στοιχείων του F λέγεται ***λύση του συστήματος*** (1), αν επαληθεύει όλες τις εξισώσεις του.

Ένα γραμμικό σύστημα λέγεται ***συμβιβαστό*** αν έχει μια τουλάχιστον λύση. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλ. αν δεν έχει καμιά λύση, λέγεται ***ασυμβίβαστο*** ή ***αδύνατο***.

Δυο γραμμικά συστήματα, τα οποία έχουν το ίδιο πλήθος αγνώστων, λέγονται ***ισοδύναμα***, αν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις, δηλ. αν κάθε λύση του ενός είναι και λύση του άλλου.

5.5.3. Ορισμός. Οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix},\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} \quad \text{και}\ \ \Sigma = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

λέγονται, αντίστοιχα, ***πίνακας, στήλη των αγνώστων*** και ***στήλη των σταθερών του συστήματος*** (1).

5.5.4. Παρατήρηση. Με χρήση των παραπάνω πινάκων A, X και Σ οι εξισώσεις του συστήματος (1) γράφονται

$$AX = \Sigma, \tag{2}$$

γράφονται δηλ. σαν μια μόνο εξίσωση πινάκων.

5.5.5. Ορισμός. Ένα γραμμικό σύστημα $AX = \Sigma$ λέγεται ***σύστημα Cramer***, αν ο πίνακάς του είναι τύπου $\nu \times \nu$ και έχει ορίζουσα μη μηδενική, δηλ. αν είναι σύστημα ν εξισώσεων με ν άγνωστους και αν $\|A\| \neq 0$.

5.5.6. Θεώρημα. Το γραμμικό σύστημα ***Cramer*** $AX = \Sigma$ έχει μια μόνο λύση, την

$$X = A^{-1}\Sigma\,,$$

η οποία, πιο αναλυτικά, γράφεται

$$x_1 = \frac{\|\Sigma\ \Sigma_2\Sigma_3 \cdots \Sigma_\nu\|}{\|A\|}, \qquad x_2 = \frac{\|\Sigma_1\Sigma\ \Sigma_3 \cdots \Sigma_\nu\|}{\|A\|}, \qquad x_\nu = \frac{\|\Sigma_1\Sigma_2\ \cdots \Sigma_{\nu-1}\Sigma\|}{\|A\|}, \tag{3}$$

όπου $\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3\ ,\ \cdots\ ,\ \Sigma_\nu$ είναι οι στήλες του πίνακα A και Σ είναι η στήλη των σταθερών. Η έκφραση της λύσης του συστήματος στη μορφή (3), δηλ. η έκφραση των $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ σαν πηλίκα οριζουσών, λέγεται

“***κανόνας του Cramer***.”

5.5.7. Παράδειγμα. Να βρεθεί ο αντίστροφος A^{-1}του πίνακα A του συστήματος

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\ \ x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

και στη συνέχεια να λυθεί το σύστημα.

Λύση. Βρίσκουμε τον αντίστροφο του πίνακα A, μετατρέποντας τον πίνακα $[I_3 \vdots A]$ σε πίνακα της μορφής $[B \vdots I_3]$.

$$[I_3 \vdots A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \overset{\Gamma_3-\Gamma_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{\Gamma_3-\Gamma_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{\substack{\Gamma_1+\Gamma_3 \\ \Gamma_2+3\Gamma_3}}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{\substack{\Gamma_1-\Gamma_2 \\ (-1)\Gamma_3}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & \\ -3 & -2 & 3 & I_3 \\ 1 & 1 & -1 & \end{array}\right]$$

και άρα

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο τύπος $X = A^{-1}\Sigma$ δίνει τώρα τη λύση

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-2)\cdot 2 \\ (-3)\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 3\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

δηλ. την $x_1 = 1\ ,\ \ x_2 = -1\ ,\ x_3 = 1.$

5.5.8. Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}.$$

Λύση. Πρόκειται για σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις άγνωστους. Η ορίζουσα του πίνακα του συστήματος είναι η

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{Vmatrix} \overset{(\Gamma_1)}{\cong} 2 \cdot \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix} - (-1) \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} + (-1) \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix} =$$

$$= 2(16-4) - (-1)(12+6) - (-6-12) = 24 + 18 + 18 = 60 \neq 0$$

και άρα πρόκειται για ένα σύστημα ***Cramer.*** Επειδή

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \Sigma_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \Sigma_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \ \text{ και } \ \Sigma = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix},$$

Έχουμε

$$\|\Sigma\ \Sigma_2\ \Sigma_3\| = \begin{Vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{Vmatrix} = 180, \quad \|\Sigma_1 \Sigma\ \Sigma_3\| = 60, \quad \|\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma\| = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{Vmatrix} = 60$$

και επομένως η λύση του συστήματός μας είναι η

$$x_1 = \frac{\|\Sigma\ \Sigma_2\ \Sigma_3\|}{\|A\|} = \frac{180}{60} = 3, \quad x_2 = \frac{\|\Sigma_1 \Sigma\ \Sigma_3\|}{\|A\|} = \frac{60}{60} = 1, \quad x_3 = \frac{\|\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma\|}{\|A\|} = \frac{60}{60} = 1.$$

5.5.9. Παρατήρηση. Η μέθοδος επίλυσης ενός συστήματος μ εξισώσεων με ν άγνωστους την οποία ακολουθούμε στα επόμενα είναι μια συστηματικοποίηση ***της μεθόδου των διαδοχικών απαλοιφών των αγνώστων***, της γνωστής δηλ. ***μεθόδου του Gauss***. Με τη μέθοδο αυτή η επίλυση ενός συστήματος μ εξισώσεων με ν άγνωστους ανάγεται τελικά στην επίλυση μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης με έναν ή περισσότερους άγνωστους.

5.5.10. Παρατήρηση. Η εξίσωση πρώτου βαθμού με περισσότερους από έναν άγνωστους

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_\nu x_\nu = \beta, \text{ όπου } \nu > 1$$

- **(1)** ***όταν κάποιο $\boldsymbol{\alpha_i}$ δεν είναι μηδέν***, δέχεται ένα $(\nu - 1) -$ παραμετρικό σύνολο λύσεων, δηλ. τότε $\nu - 1$ άγνωστοι παίρνουν αυθαίρετες τιμές και ένας καθορίζεται μονότιμα από αυτούς
- **(2)** ***όταν $\boldsymbol{\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu = \beta = 0}$***, είναι ταυτότητα, δηλ τότε επαληθεύονται από όλα τα $x_1, x_2, \cdots, x_\nu \in F$
- **(3)** ***όταν $\boldsymbol{\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu = 0}$*** και $\boldsymbol{\beta \neq 0}$**,** είναι αδύνατη.

5.5.11. Ορισμός. ***Στοιχειώδεις πράξεις στις εξισώσεις ενός συστήματος*** λέγονται :

(I) η αμοιβαία εναλλαγή των θέσεων δυο εξισώσεων του συστήματος

(II) ο πολλαπλασιασμός των μελών μιας εξίσωσης του συστήματος επί $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$

(III) η πρόσθεση σε μια εξίσωση του συστήματος ενός πολλαπλασίου μιας άλλης εξίσωσης του συστήματος.

5.5.12. Παρατήρηση. Μια στοιχειώδης πράξη (άρα και στοιχ. πρ. πεπερασμένου πλήθους) στις εξισώσεις ενός συστήματος το μετατρέπει (το μετατρέπουν) σε άλλο ισοδύναμο με το αρχικό.

5.5.13. Παρατήρηση. Η απαλοιφή ενός άγνωστου από τις εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος γίνεται με στοιχ. πρ. στις εξισώσεις του. Για να συντομεύσουμε τη διαδικασία εκτέλεσης των στοιχ. πρ. στις εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος, ***δεν αναγράφουμε τους άγνωστους*** (αφού άλλωστε δεν είχει σημασία η ιδιαίτερη ονομασία τους) ***αλλά μόνο τους συντελεστές,*** τους οποίους διατηρούμε αυστηρά στη γραμμή και στη στήλη στην οποία ανήκουν. Με τον τρόπο αυτόν μεταβαίνουμε από την έννοια του "γραμμικού συστήματος" στην έννοια του " ***πίνακα***."

5.5.14. Ορισμός. Ο τύπου $\mu \times (\nu + 1)$ πίνακας

$$[A \vdots \Sigma] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} & \vdots & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} & \vdots & \beta_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} & \vdots & \beta_\mu \end{bmatrix}$$

λέγεται ***επαυξημένος πίνακας του συστήματος*** (1).

5.5.15. Παρατήρηση. Το γραμμικό σύστημα (1) περιγράφεται με ακρίβεια από τον επαυξημένο του πίνακα $[A \vdots \Sigma]$ και ***οι στοιχ. πράξεις στις εξισώσεις του συστήματος ισοδυναμούν με τις αντίστοιχες στοιχ. πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου του πίνακα***.

5.5.16. Πρόταση. Το γραμμικό σύστημα $AX = \Sigma$ είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$A^{(\kappa)}X = \Sigma^{(\kappa)},$$

όπου $\left[A^{(\kappa)} \ \vdots \Sigma^{(\kappa)}\right]$ είναι μια γ −κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα $[A \vdots \Sigma]$.

5.5.17. Θεώρημα. (*Βασικό Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας*).

Το γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν άγνωστους $AX = \Sigma$ είναι συμβιβαστό αν , και μόνο αν, είναι

$$\textbf{\textit{rank}}(A) = \textbf{\textit{rank}}\ [A \vdots \Sigma] \ ,$$

δηλ. αν , και μόνο αν, ο πίνακας A του συστήματος και ο επαυξημένος του πίνακας $[A \vdots \Sigma]$ έχουν την ίδια βαθμίδα.

5.5.18. Παράδειγμα. Να βρεθεί **:**

(α) μια γ −κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα $[A \vdots \Sigma]$ του συστήματος

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$$

(β) το ισοδύναμο με το παραπάνω σύστημα.

Λύση. (α)

$$[A \vdots \Sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & \vdots & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 - 3\Gamma_1 \\ \Gamma_4 - 5\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & \vdots & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & \vdots & -23 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_3 + \Gamma_2 \\ \Gamma_4 - \Gamma_2}}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & \vdots & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = \left[A^{(\kappa)} \vdots \Sigma^{(\kappa)}\right].$$

(β) Το σύστημα $A^{(\kappa)}X = \Sigma^{(\kappa)}$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό το

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ \quad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \end{cases}.$$

(Σε μηδενική γραμμή του πίνακα $\left[A^{(\kappa)} \vdots \Sigma^{(\kappa)}\right]$ αντιστοιχεί η εξίσωση

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 0 ,$$

η οποία είναι ταυτότητα και παραλείπεται.)

5.5.19. Παράδειγμα. Να εξεταστεί αν είναι συμβιβαστό το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}.$$

Λύση. Βρίσκουμε τις βαθμίδες των πινάκων A και $[A \vdots \Sigma]$, μετατρέποντας με στοιχ. πρ. στις γραμμές του τον πίνακα $[A \vdots \Sigma]$ σε γ −κλιμακωτό. (Ταυτόχρονα και ο πίνακας A μετατρέπεται σε γ −κλιμακωτό).

$$[A \vdots \Sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 2 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 2 & -3 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 - \Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 + \Gamma_1}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)\Gamma_2 \\ \Gamma_4 - \Gamma_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} = \left[A^{(\kappa)} \vdots \Sigma^{(\kappa)}\right].$$

Άρα έχουμε $rank(A) = 3$ και $rank[A \vdots \Sigma] = 4$. Επειδή είναι $rank(A) \neq rank[A \vdots \Sigma]$, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5.17**,** το σύστημα είναι ασυμβίβαστο (αδύνατο).

4.5.20. Παρατήρηση. Αν τα πρώτα μη μηδενικά στοιχεία των μη μηδενικών γραμμών μιας γ −κλιμακωτής μορφής $\left[A^{(\kappa)} \vdots \Sigma^{(\kappa)}\right]$ του επαυξημένου πίνακα του συστήματος $AX = \Sigma$ βρίσκονται στις στήλες $j_1,\ j_2,\ \cdots, j_r$, τότε οι άγνωστοι $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ ορίζονται μονότιμα σαν συναρτήσεις των υπολοίπων, οι οποίοι (υπόλοιποι άγνωστοι) παίρνουν αυθαίρετες τιμές.

4.5.21. Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα του Παραδείγματος 5.5.18.

Λύση. Μια $\gamma -$ κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα του συστήματος είναι (όπως βρήκαμε) η

$$\left[A^{(\kappa)} \ \vdots\ \Sigma^{(\kappa)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

και το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι οι μη μηδενικές γραμμές του συστήματος είναι η πρώτη και δεύτερη και τα πρώτα μη μηδενικά στοιχεία τους ανήκουν στην πρώτη και δεύτερη στήλη. Επομένως οι άγνωστοι x_3 , x_4 και x_5 παίρνουν αυθαίρετες τιμές και οι x_1, x_2 εκφράζονται μονότιμα σαν συναρτήσεις αυτών. Το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 - x_3 - x_4 - x_5 \\ \qquad x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$$

και οι λύσεις του είναι

$$x_3 = \alpha\ ,\ x_4 = \beta,\ x_5 = \gamma, \qquad x_2 = 23 - 2\alpha - 2\beta - 6\gamma\ ,\ x_1 = -16 + \alpha + \beta + 5\gamma\ ,$$

όπου α, β, γ είναι αυθαίρετα στοιχεία του F.

5.5.22. Ορισμός. Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu = 0 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

του οποίου η στήλη των σταθερών είναι μηδενική, λέγεται ***ομογενές γραμμικό σύστημα.***

5.5.23. Παρατήρηση. Το ομογενές γραμμικό σύστημα (4) είναι πάντοτε συμβιβαστό, γιατί είναι

$$rank[A \vdots \Sigma] = rank[A \vdots 0] = rank(A).$$

Μια λύση του είναι η μηδενική, δηλ. η $x_1 = x_2 = \cdots = x_\nu = 0$. Το ομογενές γραμμικό σύστημα (4) λύνεται όπως και το συμβιβαστό σύστημα (1). Το σύνολο των λύσεών του είναι $(\nu - r) -$ παπαμετρικό, όπου ν = πλήθος αγνώστων και $r = rank(A)$.

5.5.24. Παρατήρηση. Αν είναι $r = \nu$, τότε το ομογενές σύστημα (4) έχει λύση μόνο τη μηδενική, ενώ αν είναι $r < \nu$, τότε έχει και μη μηδενικές λύσεις.

5.5.25. Παρατήρηση. Ένα ομογενές σύστημα ν εξισώσεων με ν άγνωστους $AX = 0$:

(α) έχει λύση μόνο τη μηδενική, αν και μόνο αν, είναι $\|A\| \neq 0$

(β) έχει και μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν, είναι $\|A\| = 0$.

5.5.26. Παρατήρηση. Αν είναι $\mu < \nu$, τότε το ομογενές σύστημα (4) έχει και μη μηδενικές λύσεις, αφού από τις $r \leq \mu$ και $\mu < \nu$ προκύπτει ότι είναι $r < \nu$.

5.5.27. Παράδειγμα. Να λυθεί το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Λύση.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 - 3\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_3 - 2\Gamma_2 \\ \Gamma_4 - \Gamma_2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 + 5\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-\frac{1}{3}\Gamma_2) \\ (-1)\,\Gamma_3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 + 2\Gamma_2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 \leftrightarrows \Gamma_3 \\ \frac{1}{3}\Gamma_4}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A^{(\kappa)}.$$

Άρα *rank*(A) = 4. Επειδή $\nu = 5$, έχουμε $\nu - r = 5 - 4 = 1$ και επομένως ένας άγνωστος παίρνει αυθαίρετες τιμές. Τα πρώτα μη μηδενικά στοιχεία των μη μηδενικών γραμμών του πίνακα $A^{(\kappa)}$ βρίσκονται στην 1^{η}, 2^{η}, 3^{η} και 4^{η} στήλη και γι αυτό οι άγνωστοι x_1, x_2, x_3, x_4 εκφράζονται μονότιμα σαν συναρτήσεις του x_5, ο οποίος παίρνει αυθαίρετες τιμές. Το αρχικό μας σύστημα είναι ισοδύναμο με το $A^{(\kappa)}X = 0$, δηλ. το

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ \quad x_2 = 0 \\ \quad\quad x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ \quad\quad\quad x_4 - x_5 = 0 \end{cases},$$

το οποίο γράφεται

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = x_5 \\ \quad x_2 = 0 \\ \quad\quad x_3 + x_4 = x_5 \\ \quad\quad\quad x_4 = x_5 \end{cases}$$

και οι λύσεις του (άρα και του αρχικού) είναι οι :

$$x_5 = \alpha\ , x_4 = \alpha,\ x_3 = 0, x_2 = 0 \ \text{ και } \ x_1 = 0,$$

όπου α είναι αυθαίρετο στοιχείο του F.

5.5.28. Παράδειγμα. Να λυθεί το ομογενές σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + \ x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ \qquad 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Λύση.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\rightrightarrows} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_4 + \frac{3}{2}\Gamma_2}{\rightrightarrows} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{(-\frac{1}{2}\Gamma_2) \\ (\ \Gamma_4 - 3\,\Gamma_3)}}{\rightrightarrows} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{(\kappa)}$$

Άρα $rank(A) = 4$. Επειδή είναι και $\nu = 4$, έχουμε $rank(A) = \nu$ και άρα το ομογενές σύστημά μας έχει λύση μόνο τη μηδενική,

$$x_1 = 0\ ,\ x_2 = 0\ , x_3 = 0,\ x_4 = 0\ .$$

5.5.29. Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

Λύση. Παρατηρούμε πρώτα ότι αυτό είναι σύστημα ***Cramer***. Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα A του συστήματος , επειδή σε όλες τις στήλες

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \ \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \ \Sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

του A εμφανίζεται μια φορά το 2 και τρεις φορές το 1, προσθέτουμε στην πρώτη γραμμή του A όλες τις άλλες γραμμές του, για να εμφανιστεί στην πρώτη γραμμή του νέου πίνακα παντού το ίδιο άθροισμα $2 + 1 + 1 + 1 = 5$. Έσι, έχουμε

$$\|A\| \overset{\Gamma_1+(\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4)}{\cong} \begin{Vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \overset{\frac{1}{5}\Gamma_1}{\cong} 5 \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2-\Gamma_1 \\ \Gamma_3-\Gamma_1 \\ \Gamma_4-\Gamma_1}}{\cong}$$

$$= 5 \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \overset{(\,\acute{\alpha}\nu\omega\ \tau\rho\iota\gamma\,.)}{\cong} 5(1\cdot 1\cdot 1\cdot 1) = 5 \neq 0$$

και άρα (Θεώρημα 5.5.6) το σύστημα έχει μια μόνο λύση. Παρατηρούμε τώρα ότι η στήλη των σταθερών ταυτίζεται με τη δεύτερη στήλη του συστήματος, ότι δηλ. είναι $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma_2}$ και άρα ο ***κανόνας του Cramer*** δίνει

$$x_1 = \frac{\|\Sigma\ \Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4\|}{\|A\|} = \frac{\|\Sigma_2\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4\|}{5}.$$

Επειδή η ορίζουσα στον αριθμητή του παραπάνω κλάσματος έχει δυο στήλες ίσες, αυτή (Βλέπε Πρόταση 5.3.10) ισούται με μηδέν και άρα είναι $x_1 = \frac{0}{5} = 0$. Με τον ίδιο κανόνα, έχουμε

$$x_2 = \frac{\|\Sigma_1\Sigma\ \Sigma_3\Sigma_4\|}{\|A\|} = \frac{\|\Sigma_1\Sigma_2\ \Sigma_3\Sigma_4\|}{\|A\|} = \frac{\|A\|}{\|A\|} = 1$$

και τέλος, $x_3 = \frac{\|\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_2\ \Sigma_4\|}{\|A\|} = \frac{0}{5} = 0$ και $x_4 = \frac{\|\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\ \Sigma_2\|}{\|A\|} = \frac{0}{5} = 0$. (Οι ορίζουσες $\|\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_2\ \Sigma_4\|$ και $\|\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\ \Sigma_2\|$ είναι ίσες με μηδέν, γιατί κι αυτές έχουν δυο στήλες ίσες) . Συνοψίζοντας, το σύστημα έχει μια μόνο λύση την $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Άσκηση 2

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}.$$

(**<u>Βοήθεια</u> :** Δείξτε ότι είναι σύστημα ***Cramer*** και για την εύρεση της λύσης με τον κανόνα του *Cramer* παρατηρήστε ότι είναι $\Sigma = 2\Sigma_1$.

<u>Απάντηση</u> : Έχει μια μόνο λύση την $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.)

Άσκηση 3

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2\chi - \psi + 3\zeta = 9 \\ 3\chi - 5\psi + \zeta = -4 \\ 4\chi - 7\omega + \zeta = 5 \end{cases}.$$

Λύση. Βρίσκουμε τις βαθμίδες των πινάκων $[A]$ και $[A \vdots \Sigma]$. Έχουμε

$$[A \vdots \Sigma] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 9 \\ 3 & -5 & 1 & \vdots & -4 \\ 4 & -7 & 1 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 - 2\Gamma_1}}{\cong} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 9 \\ 1 & -4 & -2 & \vdots & -13 \\ 0 & -5 & -5 & \vdots & -13 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_1 - 2\Gamma_2 \\ (-1)\Gamma_3}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & \vdots & 35 \\ 1 & -4 & -2 & \vdots & -13 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -\frac{13}{5} \end{bmatrix} \overset{\Gamma_1 - 7\Gamma_3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{266}{5} \\ 1 & -4 & -2 & \vdots & -13 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -\frac{13}{5} \end{bmatrix} \overset{\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & \vdots & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{266}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -\frac{13}{5} \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2 \leftrightarrows \Gamma_3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & \vdots & -13 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -\frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{266}{5} \end{bmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας, με τη στοιχ. πρ. $\frac{5}{266}\,\Gamma_3$, γίνεται γ−κλιμακωτός. Άρα είναι ***rank***(A) = 2, ***rank***$[A \vdots \Sigma] = 3$, δηλ. είναι ***rank***(A) ≠ ***rank***$[A \vdots \Sigma]$ και το σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

Άσκηση 4

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}.$$

(**<u>Απάντηση</u> :** Είναι συμβιβαστό και έχει λύσεις

$$x_1 = 2\alpha - \beta,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = \beta,\ x_4 = 1\ ,$$

όπου α, β είναι αυθαίρετα στοιχεία F.)

Άσκηση 5

Να λυθεί το ομογενές σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}.$$

(**<u>Απάντηση</u> :** Οι λύσεις του είναι

$x_1 = -\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{10}\beta\ ,\ x_2 = \alpha\ , x_3 = \frac{4}{5}\beta\ , x_4 = \beta$, όπου α, β είναι αυθαίρετα στοιχεία του F.)

Άσκηση 6

Να λυθεί και διερευνηθεί για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}.$$

Λύση. Ας προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε τον επαυξημένο του πίνακα σε γ −κλιμακωτό. Έχουμε

$$[A\ \vdots\ \Sigma]=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 2 & 3 & \lambda & \vdots & 3\\ 1 & \lambda & 3 & \vdots & 2\end{bmatrix}\overset{\substack{\Gamma_2-2\Gamma_1\\ \Gamma_3-\Gamma_1}}{\leftrightarrows}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & \lambda+2 & \vdots & 1\\ 0 & \lambda-1 & 4 & \vdots & 1\end{bmatrix}\overset{\Gamma_3-(\lambda-1)\Gamma_2}{\leftrightarrows}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & \lambda+2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & \varphi(\lambda) & \vdots & -\lambda+2\end{bmatrix}=B$$

όπου $\varphi(\lambda)=4-(\lambda-1)(\lambda+2)=4-(\lambda^2+\lambda-2)=-(\lambda^2+\lambda-6)=-(\lambda+3)(\lambda-2)$. Στο σημείο αυτό είμαστε υποχρεωμένοι να διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\varphi(\lambda)=0$ (δηλ. $\lambda=2$ ή $\lambda=-3$) και $\varphi(\lambda)\neq 0$.

I) Αν είναι $\lambda=2$, τότε είναι $\varphi(\lambda)=0$ και ο πίνακας B γίνεται

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}=\left[A^{(\kappa)}\ \vdots\ \Sigma^{(\kappa)}\right],$$

γίνεται δηλ. μια γ −κλιμακωτή μορφή του $[A\ \vdots\ \Sigma]$. Επειδή τότε είναι $r=rank(A)=2$ αλλά και $rank[A\ \vdots\ \Sigma]=2$, το σύστημα είναι συμβιβαστό και επειδή είναι $\nu-r=3-2=1$, ένας μόνο άγνωστος παίρνει αυθαίρετες τιμές (ο x_3) και οι άγνωστοι x_1 και x_2 (οι οποίοι βρίσκονται στις στήλες των πρώτων μη μηδενικών στοιχείων των μη μηδενικών γραμμών του πίνακα $\left[A^{(\kappa)}\ \vdots\ \Sigma^{(\kappa)}\right]$) εκφράζονται μονότιμα σαν συναρτήσεις του x_3. Οι λύσεις του συστήματος είναι

$$x_3=\alpha,\ x_2=1-4\alpha\ ,\ x_1=5\alpha\ ,$$

όπου α είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\mathbb{R}$.

II) Αν είναι $\lambda=-3$, τότε είναι $\varphi(\lambda)=0$ και ο πίνακας B γίνεται

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 5\end{bmatrix}\overset{\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma_3}{\leftrightarrows}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1\end{bmatrix}=\left[A^{(\kappa)}\ \vdots\ \Sigma^{(\kappa)}\right].$$

Επειδή στην περίπτωση αυτή είναι $r=rank(A)=2\neq 3=rank[A\ \vdots\ \Sigma]$, το σύστημα είναι ασυμβίβαστο (αδύνατο), δηλ. δεν έχει λύσεις.

III) Αν είναι $\lambda\neq 2$ και $\lambda\neq -3$, τότε είναι $\varphi(\lambda)\neq 0$ και $rank(A)=\ rank[A\ \vdots\ \Sigma]=3$. Το σύστημα έχει τότε μια μόνο λύση, την οποία βρίσκουμε (εύκολα) ότι είναι η

$$x_1=1\ ,x_2=x_3=\frac{1}{\lambda+3}\ .$$

Άσκηση 7

Να λυθεί και διερευνηθεί για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ το σύστημα

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}.$$

(**<u>Βοήθεια</u>** **:** Παρατηρήστε ότι πρόκειται για ένα σύστημα $Cramer$ και δείξτε ότι είναι

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{Vmatrix} \overset{(\Gamma_1)}{\cong} \lambda \cdot \begin{Vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{Vmatrix} - 1 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{Vmatrix} + 1 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) + (1 - \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

<u>Απάντηση</u> : (I) Για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2$, το σύστημα έχει μια μόνο λύση

$$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \quad x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, \quad x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

(II) Αν $\lambda = 1$, τότε το σύστημα έχει λύσεις

$$x_1 = 1 - \alpha - \beta, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = \beta,$$

όπου α, β είναι αυθαίρετα στοιχεία του $\mathbb{R}$.

(III) Αν $\lambda = -2$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.)

5.6. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Διαγωνιοποίηση τετραγωνικού πίνακα

5.6.1. Ορισμός. Το $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ λέγεται ***ιδιοτιμή*** ή ***χαρακτηριστική τιμή*** του πίνακα $A = [\alpha_{ij}]_{\nu\times\nu} \in$ $\in \mathbb{R}_{\nu\times\nu}$ αν και μόνο αν, υπάρχει μη μηδενικός πίνακας−γραμμή (διάνυσμα) $X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_\nu] \in \mathbb{R}_{1\times\nu}$, τέτοιος ώστε να είναι

$$XA = \lambda_1 X . \tag{1}$$

Ο πίνακας−γραμμή X λέγεται τότε ***ιδιοδιάνυσμα*** ή ***χαρακτηριστικό διάνυσμα*** του πίνακα A που ανήκει στην ιδιοτιμή λ_1.

5.6.2. Ορισμός. Το ως προς λ πολυώνυμο

$$X_A(\lambda) = \|A - \lambda I_\nu\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} - \lambda \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

όπου I_ν είναι ο μοναδιαίος $\nu \times \nu$ πίνακας, λέγεται ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** και η εξίσωση $X_A(\lambda) = 0$ λέγεται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** του πίνακα A.

5.6.3. Παράδειγμα. Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι, αντίστοιχα, τα

$$X_A(\lambda) = \|A - \lambda I_2\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 0-\lambda & 2-0 \\ -1+0 & 0-\lambda \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{matrix} \right\| = (-\lambda)(-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 2$$

και

$$X_B(\lambda) = \|\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_3\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{matrix} \right\| \overset{\Gamma_1 + (\Gamma_2 + \Gamma_3)}{\cong} \left\| \begin{matrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{matrix} \right\| \overset{\frac{1}{2-\lambda}\Gamma_1}{\cong} (2-\lambda) \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{matrix} \right\| \overset{\substack{\Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\cong}$$

$$= -(\lambda - 2) \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda - 1 \end{matrix} \right\| = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$$

5.6.4. Πρόταση. Το $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A = [\alpha_{ij}]_{\nu\times\nu} \in \mathbb{R}_{\nu\times\nu}$ αν, και μόνο αν, είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$X_A(\lambda) = \|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_\nu\|\,,$$

του πίνακα A. Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που ανήκουν στην ιδιοτιμή λ_1 είναι οι μη μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(A^t - \lambda_1 I_\nu)X^t = 0\,. \qquad (3)$$

5.6.5. Παρατήρηση. Μια ρίζα λ_1 του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα $A = [\alpha_{ij}]_{\nu\times\nu} \in \mathbb{R}_{\nu\times\nu}$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A αν, και μόνο αν, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

5.6.6. Παράδειγμα. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}.$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$X_A(\lambda) = \|A - \lambda I_2\| = \left\| \begin{matrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{matrix} \right\| = \lambda^2 + 1$$

του πίνακα A δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα ο πίνακας A δεν έχει ιδιοτιμές και σαν συνέπεια δεν έχει και ιδιοδιανύσματα.

5.6.7. Παράδειγμα. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{3\times 3}\,.$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι το

$$X_B(\lambda) = \|B - \lambda I_3\| = \left\|\begin{matrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{matrix}\right\| \overset{(\Gamma_1)}{\equiv} (1-\lambda)\left\|\begin{matrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & 1-\lambda \end{matrix}\right\| =$$

$$= (1-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)+3] = -(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+5)\,.$$

Αυτό έχει μια μόνο πραγματική ρίζα $\lambda_1 = 1$, αφού το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda + 5$ έχει μιγαδικές ρίζες. Επομένως ο πίνακας B έχει μια μόνο ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1.$ Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα του B που ανήκουν στην ιδιοτιμή λ_1 λύνουμε το ομογενές σύστημα

$$(B^t - \lambda_1 I_3)X^t = 0 \Leftrightarrow (B^t - I_3)X^t = 0\,. \tag{4}$$

Για να λύσουμε το σύστημα (4) βρίσκουμε μια γ −κλιμακωτή μορφή του πίνακά του $B^t - I_3$. Έχουμε

$$B^t - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$B^t - I_3 \overset{\Gamma_3 - 3\Gamma_2}{\leftrightarrows} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2 \\ \frac{1}{3}\Gamma_3}}{\leftrightarrows} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2 \leftrightarrows \Gamma_3}{\leftrightarrows} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (B^t - I_3)^{(\kappa)}.$$

Επομένως το σύστημα (4) είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} 0x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}, \quad \text{δηλ. το} \quad \begin{cases} x_2 - x_3 = -0 \cdot x_1 \\ \phantom{x_2 -{}} x_3 = -0 \cdot x_1 \end{cases}$$

και οι λύσεις του είναι $x_1 = a,\ x_2 = x_3 = 0$, όπου α είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\mathbb{R}$. Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B, που ανήκουν στην ιδιοτιμή του $\lambda_1 = 1$, είναι τα στοιχεία του συνόλου

$$\{[\alpha \ \ 0 \ \ 0] : \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0\}\,.$$

5.6.8. Παρατήρηση. Οι ιδιοτιμές ενός άνω (ή κάτω) τριγωνικού πίνακα (άρα και ενός διαγωνίου πίνακα) είναι τα στοιχεία της πρωτεύουσας διαγωνίου του.

5.6.9. Πρόταση. Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{R}_{\nu\times\nu}$ οι πίνακες A και PAP^{-1} έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλ. είναι

$$\|A - \lambda\, I_\nu\| \equiv \|PAP^{-1} - \lambda\, I_\nu\|.$$

5.6.10. Ορισμός. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}]_{\nu\times\nu} \in \mathbb{R}_{\nu\times\nu}$ λέγεται ***διαγωνιοποιήσιμος πίνακας*** ή ***πίνακας που διαγωνιοπιοείται*** , αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}_{\nu\times\nu}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας PAP^{-1} να είναι διαγώνιος, δηλ. να είναι

$$PAP^{-1} = Diag\{a_1, a_2, \cdots, a_\nu\}. \tag{5}$$

5.6.11. Παρατήρηση. Επειδή οι πίνακες A και PAP^{-1} έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, αυτοί έχουν και τις ίδιες ιδιοτιμές. Ακόμη, επειδή οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου πίνακα είναι τα στοιχεία της πρωτεύουσς διαγωνίου του, από την ισότητα (5) προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι :

$$a_1, a_2, \cdots, a_\nu.$$

5.6.12. Πρόταση. Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}_{\nu\times\nu}$ έχει ν διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu \in \mathbb{R}$, τότε διγωνιοποιείται. Κάθε πίνακας P της μορφής

$$P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1\nu} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_{\nu 1} & x_{\nu 2} & \cdots & x_{\nu\nu} \end{bmatrix},$$

όπου $X_1 = [x_{11} \;\; x_{12} \;\; \cdots \;\; x_{1\nu}]$, $X_2 = [x_{21} \;\; x_{22} \;\; \cdots \;\; x_{2\nu}]$, $X_\nu = [x_{\nu 1} \;\; x_{\nu 2} \;\; \cdots \;\; x_{\nu\nu}]$, είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που ανήκουν στις ιδιοτιμές του $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$, διαγωνιοποιεί τον A, δηλ. επαληθεύει την ισότητα

$$PAP^{-1} = Diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu\} .$$

5.6.13. Παράδειγμα. Να δειχτεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}$$

διαγωνιοποιείται και στη συνέχεια να βρεθεί ένας 2×2 πίνακας P ο οποίος να τον διαγωνιοποιεί.

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το

$$X_A(\lambda) = \|A - \lambda\, I_2\| = \begin{Vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{Vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 =$$

$$= \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2^2 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

και έχει δυο διάφορες μεταξύ τους πραγματικές ρίζες $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -2$. Επομένως ο 2×2 πίνακας A έχει δυο διακεκριμένες ιδιοτιμές και σαν συνέπεια διαγωνιοποιείται.

Βρίσκουμε τώρα ένα ιδιοδιάνυσμα X_1 του πίνακα A που ανήκει στην ιδιοτιμή λ_1 και ένα ιδιοδιάνυσμά του X_2 που ανήκει στην ιδοτιμή λ_2.

<u>**Ιδιοτιμή**</u> $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$.

$$A^t - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2+\Gamma_1}{\rightleftarrows}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-1)\Gamma_1}{\rightleftarrows} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (A^t - \lambda_1 I_2)^{(\kappa)}.$$

Επομένως το σύστημα $(A^t - \lambda_1 I_2)X^t = 0$ είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$x_1 - 3x_2 = 0$$

και οι λύσεις του είναι $x_2 = \alpha$, $x_1 = 3\alpha$, όπου α είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\mathbb{R}$. Ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που ανήκει στην ιδιοτιμή του $\lambda_1 = 2$ είναι το

$$X_1 = [3 \quad 1] .$$

<u>Ιδιοτιμή</u> $\boldsymbol{\lambda_2 = -2}$. $\qquad A^t - \lambda_2 I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}\Gamma_1}{\rightarrow}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (A^t - \lambda_2 I_2)^{(\kappa)}.$$

Επομένως το σύστημα $(A^t - \lambda_2 I_2)X^t = 0$ είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$x_1 + x_2 = 0$$

και οι λύσεις του είναι $x_2 = -\alpha$, $x_1 = \alpha$, όπου α είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\mathbb{R}$. Ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που ανήκει στην ιδιοτιμή του $\lambda_2 = -2$ είναι το

$$X_2 = [1 \quad -1] .$$

Άρα ένας πίνακας P, ο οποίος διαγωνιοποιεί τον A είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Πράγματι, είναι $\qquad P^{-1} = \frac{1}{(-4)}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

και $\qquad PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = diag\{2 \quad -2\} = giag\{\lambda_1 \ \lambda_2\} .$$

5.6.14. Παράδειγμα. Να δειχτεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{3\times 3}$$

διαγωνιοποιείται και στη συνέχεια να βρεθεί ένας πίνακας P που να τον διαγωνιοποιεί.

Λύση. Βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο

$$X_A(\lambda) = \|A - \lambda I_3\| = \begin{Vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ -1 & 1 & -3-\lambda \end{Vmatrix} \overset{(\Gamma_1)}{=} (1-\lambda)\begin{Vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & -3-\lambda \end{Vmatrix} =$$

$$= -(\lambda - 1)[\lambda(\lambda + 3) + 2] = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

έχει τρεις διακεκριμένες ρίζες $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$. Επομένως ο πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές και άρα διαγωνιοποιείται. Βρίσκουμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα (ένα για κάθε ιδιοτιμή) του A που ανήκουν στις ιδιοτιμές του $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$.

<u>Ιδιοτιμή</u> $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$ **:** Έχουμε

$$A^t - \lambda_1 I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2+\Gamma_1 \\ \Gamma_3+2\Gamma_1}}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \overset{(-6)\Gamma_3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2 \leftrightarrows \Gamma_3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (A^t - \lambda_1 I_3)^{(\kappa)}$$

και άρα το σύστημα $(A^t - \lambda_1 I_2)X^t = 0$ είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = -\,0 \cdot x_1 \\ \qquad x_3 = -0 \cdot x_1 \end{cases}$$

και οι λύσεις του είναι $x_1 = \alpha$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, όπου α είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\mathbb{R}$. Ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που ανήκει στην ιδιοτιμή του $\lambda_1 = 1$ είναι το

$$X_1 = [1 \;\; 0 \;\; 0] .$$

<u>Ιδιοτιμή</u> $\boldsymbol{\lambda_2 = -1}$ **:** Έχουμε

$$A^t - \lambda_2 I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} + I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_3+2\Gamma_2}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}\Gamma_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (A^t - \lambda_2 I_3)^{(\kappa)}$$

και άρα το σύστημα $(A^t - \lambda_2 I_3)X^t = 0$ είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ \qquad\quad x_2 = -x_3 \end{cases}$$

και οι λύσεις του είναι $x_3 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_1 = \alpha$, όπου α είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\mathbb{R}$. Ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που ανήκει στην ιδιοτιμή του $\lambda_1 = -1$ είναι το

$$X_2 = [1 \; -1 \;\; 1] .$$

<u>Ιδιοτιμή</u> $\boldsymbol{\lambda_3 = -2}$ **:** Έχουμε

$$A^t - \lambda_3 I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_3+\Gamma_2}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{3}\Gamma_1 \\ \frac{1}{2}\Gamma_2}}{\rightleftarrows} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (A^t - \lambda_3 I_3)^{(\kappa)}$$

και άρα το σύστημα $(A^t - \lambda_3 I_3)X^t = 0$ είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{3}x_3 \\ \qquad x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

και οι λύσεις του είναι $x_3 = \alpha$, $x_2 = -\frac{1}{2}\alpha$, $x_1 = \frac{1}{2}\alpha$, όπου α είναι αυθαίρετο στοιχείο του $\mathbb{R}$.
Ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που ανήκει στην ιδιοτιμή του $\lambda_3 = -2$ είναι το

$$X_3 = [1 - 1 \quad 2] .$$

Επομένως ένας πίνακας που διαγωνιοποιεί τον A είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Πράγματι, $$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

και $$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = diag\{1 \ -1 \ -2\} = diag\{\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3\} .$$

5.6.14. Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2} .$$

(**<u>Απάντηση</u> :** Ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, ιδιοδιανύσματα $\{(-\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0\}$.

Ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$, ιδιοδιανύσματα $\left\{\left(-\frac{6}{5}\alpha, \alpha\right) : \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0\right\}$.)

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{3\times 3} .$$

(**<u>Απάντηση</u> :** Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_B(\lambda) = -(\lambda+1)^3$, μια μόνο ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, ιδιοδιανύσματα $\{(2\alpha, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0\}$.)

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{3\times 3} .$$

(**<u>Απάντηση</u> :** Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$. Δυο ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, ιδιοδιανύσματα $\left\{\left(-\frac{1}{2}\alpha,\ \alpha,\ \alpha\right) : \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0\right\}$.

Ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$, ιδιοδιανύσματα $\left\{\left(\frac{1}{3}\alpha - \beta,\ \alpha,\ \beta\right) : \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0\right\}$.

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{3\times 3} .$$

(**<u>Απάντηση</u> :** Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda+8)$.

Μια ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$, ιδιοδιανύσματα $\{(0, -\alpha,\ \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0\}$.)

Άσκηση 5

Να δειχτεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}$$

διαγωνιοποιείται και στη συνέχεια να βρεθεί πίνακας ο οποίος να τον διαγωνιοποιεί.

(**<u>Απάντηση</u> :** Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-4)$.

Δυο ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Ένας πίνακας ο οποίος τον διαγωγνιοποιεί είναι ο $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.)

Άσκηση 6

Ας είναι A, P δυο πίνακες του $\mathbb{R}_{\nu\times\nu}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$PAP^{-1} = diag\{a_1\ a_2\ \cdots\ a_\nu\}\ .$$

Να δειχτεί ότι :

(α) $$PA^\kappa P^{-1} = diag\{\alpha_1^\kappa\ \ \alpha_2^\kappa\ \cdots\ \alpha_\nu^\kappa\}$$

(β) $$A^\kappa = P^{-1}[diag\{\alpha_1^\kappa\ \ \alpha_2^\kappa\ \cdots\ \alpha_\nu^\kappa\}]P,$$

για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 7

Στηριζόμενοι στις Ασκήσεις 5 και 6 να βρείτε την εκατοστή δύναμη A^{100} του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(**<u>Απάντηση</u>** :

$$A^{100} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2+4^{100}) & \frac{1}{3}(-1+4^{100}) \\ \frac{1}{3}(-2+2\cdot 4^{100}) & \frac{1}{3}(1+2\cdot 4^{100}) \end{bmatrix}.\ )$$