3. Ολοκλήρωση

3.1. Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι η δύναμη που ασκείται σε ένα ελατήριο και ονομάζεται δύναμη επαναφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$F = -kx \tag{3.1}$$

Αν θελήσουμε να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης αυτής μεταξύ δύο παραμορφώσεων στις θέσεις $x = x_a$ και $x = x_b$, τότε αυτό δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$W = -\int_{x_a}^{x_b} F dx = k \int_{x_a}^{x_b} x dx \tag{3.2}$$

το οποίο οδηγεί στο γνωστό μας αποτέλεσμα:

$$W = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_a}^{x_b} = \frac{1}{2} k \left(x_b^2 - x_a^2 \right) \tag{3.3}$$

Στην πραγματικότητα δεν κάναμε τίποτα παραπάνω από το να χρησιμοποιήσουμε την πολύ γνωστή ιδιότητα:

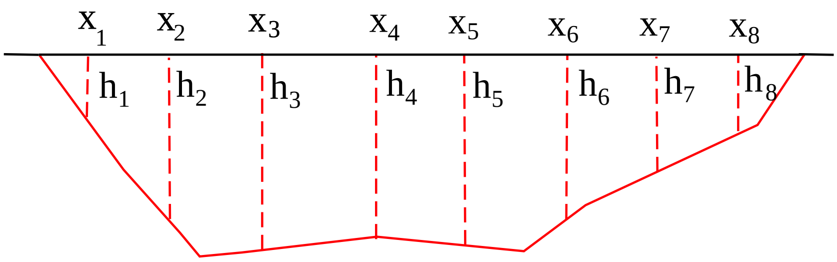
$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \tag{3.4}$$

όπου η συνάρτηση F ονομάζεται παράγουσα.

Όμως τι θα κάνατε αν είχατε να υπολογίσετε κάποιο ορισμένο ολοκλήρωμα με παράγουσα που είναι δύσκολο να προσδιοριστεί αναλυτικά όπως στα παρακάτω;

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \qquad\qquad \int_0^1 \frac{cosx}{x} dx$$

Επίσης τι θα κάνατε αν είχατε να υπολογίσετε την διατομή του νερού ενός ποταμού όπου έχουμε μετρήσει το βάθος σε διάφορα σημεία; (βλέπε Σχήμα 3.1)



Σχήμα 3.1.: Μέτρηση βάθους σε διατομή ποταμού.

Σε περιπτώσεις σαν τις παραπάνω καταφεύγουμε στην αριθμητική ολοκλήρωση. Γενικά μιλώντας, η ολοκλήρωση είναι μια διαδικασία που έχει πολλές εφαρμογές σε διάφορους κλάδους της επιστήμης του μηχανικού και των θετικών επιστημών, όπως θα διαπιστώσουμε στην πορεία μέσω των παραδειγμάτων που θα παρουσιαστούν.

3.2. Η βασική αρχή της αριθμητικής ολοκλήρωσης

Θα μπορούσε κανείς να θυμηθεί τη γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος:

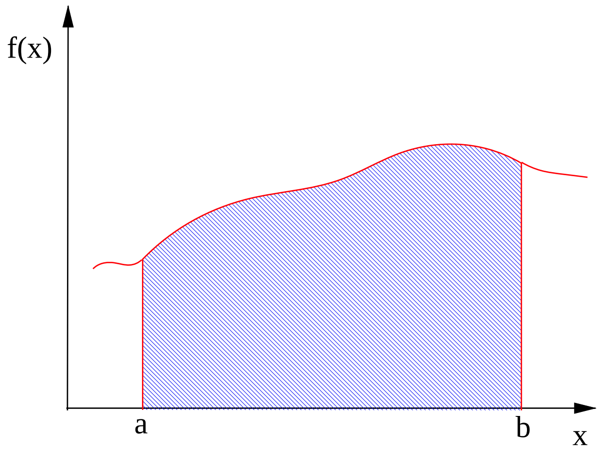
$$\int_a^b f(x)dx \tag{3.5}$$

ότι είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $f(x)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Συνεπώς το θέμα είναι πώς μπορούμε να υπολογίσουμε αυτό το εμβαδόν όταν έχουμε μια πολύπλοκη συνάρτηση για την οποία μπορούμε να έχουμε τιμές της σε ορισμένα σημεία x_i ή στην περίπτωση που έχουμε παρατηρήσεις ενός μεγέθους (π.χ. από ένα πείραμα) (βλέπε Σχήμα 3.3) όπου στην περίπτωση αυτή δεν γνωρίζουμε τη μορφή της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης.

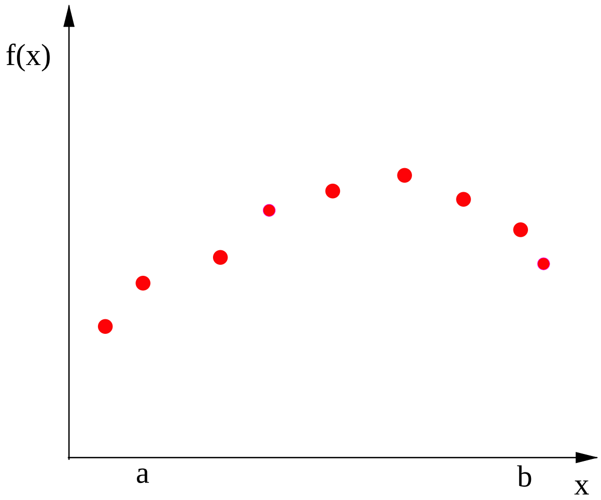
Η μεθοδολογία που συνήθως ακολουθούμε είναι να προσεγγίσουμε την συνάρτηση f με ένα πολυώνυμο βαθμού n, f_n. Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b f_n(x)dx \tag{3.6}$$

Η επιλογή της προσέγγισης με πολυώνυμο βασίζεται στο γεγονός ότι τα πολυώνυμα είναι παραγωγίσιμα και ολοκληρώσιμα και έχουν τη γενική μορφή:



Σχήμα 3.2.: Υπολογισμός ολοκληρώματος συνάρτησης.



Σχήμα 3.3.: Υπολογισμός ολοκληρώματος από παρατηρήσεις.

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{3.7}$$

Στα επόμενα θα παρουσιάσουμε τις πιο συνήθεις στρατηγικές που μπορεί να ακολουθήσει κανείς ξεκινώντας από τις πιο απλές και προχωρώντας σε πιο σύνθετες.

3.3. Κανόνας του τραπεζίου

Μια πολύ απλή προσέγγιση που μπορούμε να κάνουμε για την συνάρτηση f είναι η γραμμική προσέγγιση. Έτσι στην περίπτωση του Σχήματος 3.4 όπου έχουμε να ολοκληρώσουμε μεταξύ των σημείων a και b μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε γραμμική συμπεριφορά δηλ. πολυώνυμο $1^{\text{ου}}$ βαθμού. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι:

$$f(x) = f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{3.8}$$

το οποίο όταν εισαχθεί στο ολοκλήρωμα θα μας δώσει:

$$I = \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx \tag{3.9}$$

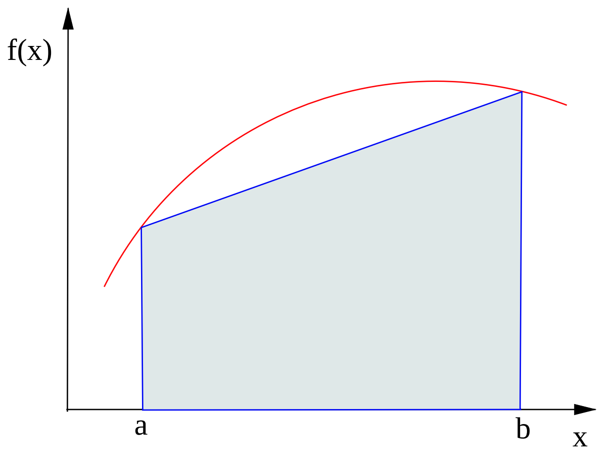
που καταλήγει πολύ εύκολα στο ακόλουθο:

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{3.10}$$

Το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως κανόνας του τραπεζίου. Η χρήση του όρου είναι προφανής καθώς κανείς μπορεί να διαπιστώσει εύκολα ότι η παραπάνω σχέση δίνει το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζεται εάν πάρουμε ως βάσεις τις τιμές της συνάρτησης $f(a), f(b)$ και ως ύψος την απόσταση μεταξύ των σημείων b και a οπότε έχουμε τη σχέση:

$$\text{εμβαδόν} = \text{ύψος}\frac{\text{βάση}_1 + \text{βάση}_2}{2} \tag{3.11}$$

Εδώ το ρόλο των βάσεων παίζουν οι τιμές της συνάρτησης στα σημεία a και b, $f(a)$ και $f(b)$ αντίστοιχα και το ρόλο του ύψους παίζει η διαφορά μεταξύ των άκρων του διαστήματος ολοκλήρωσης, $(b - a)$.



Σχήμα 3.4.: Κανόνας του τραπεζίου

3.3.1. Σφάλμα της μεθόδου του τραπεζίου

Είναι προφανές, και από τη γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος, ότι προσεγγίζοντας τη συνάρτηση με τον παραπάνω τρόπο έχουμε ένα σφάλμα καθώς η περιοχή κάτω από την πραγματική καμπύλη, την οποία αγνοούμε, μπορεί να είναι σημαντική. Το σφάλμα στην περίπτωση αυτή είναι:

$$E_t = -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi) = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi) \tag{3.12}$$

όπου, το ξ βρίσκεται στο διάστημα (a, b). Αυτό σημαίνει ότι έχουμε ακρίβεια δεύτερης τάξης. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητό με μερικά παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1: Να υπολογίσετε το σφάλμα ολοκλήρωσης που έχουμε όταν ολοκληρώσουμε με τη μέθοδο του τραπεζίου στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = x^2$ για το διάστημα ολοκλήρωσης $[0, 2]$.

Λύση

Είναι γνωστό σε όλους ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε εύκολα αναλυτική ολοκλήρωση και ότι ισχύει:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \tag{3.13}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του τραπεζίου έχουμε:

$$I = \int_0^2 x^2 dx = (2-0)\frac{f(2)+f(0)}{2} = 2\frac{2^2+0^2}{2} = \frac{8}{2} \tag{3.14}$$

Έτσι, το σφάλμα στον υπολογισμό του ολοκληρώματος είναι:

$$8/3 - 8/2 = -1.33 \tag{3.15}$$

Επίσης μπορούμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα από τη σχέση 3.12. Όπως κανείς μπορεί εύκολα να υπολογίσει στην περίπτωση που $f''(\xi) = 2$.

$$E_t = -\frac{(2-0)^3}{12}2 = -\frac{4}{3} = -1.33 \tag{3.16}$$

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι το ίδιο με το προβλεπόμενο. Αυτό όπως θα δούμε δεν ισχύει πάντα. Μήπως μπορείτε να φανταστείτε για ποιο λόγο;

Παράδειγμα 3.2: Να υπολογίσετε το σφάλμα ολοκλήρωσης που έχουμε όταν ολοκληρώσουμε με τη μέθοδο του τραπεζίου τη συνάρτηση $f(x) = 3x^2+16x^3-40x^4+12x^5$ στο διάστημα ολοκλήρωσης $[0, 1]$.

Λύση

Δεδομένου ότι έχουμε αναλυτική μορφή για τη συνάρτηση μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αναλυτικά.

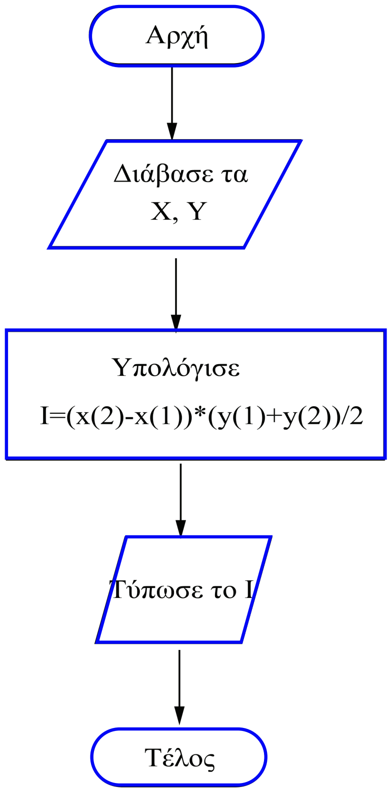
$$\begin{aligned} I = \int_0^1 (3x^2+16x^3-40x^4+12x^5)dx &= \left[\frac{3x^3}{3}+\frac{16x^4}{4}-\frac{40x^5}{5}+\frac{12x^6}{6}\right]_0^1 = \\ &= [x^3+4x^4-8x^5+2x^6]_0^1 = 1+4-8+2 = -1 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του τραπεζίου έχουμε

$$I = (1-0)\cdot\ \frac{f(1)+f(0)}{2} = 1\cdot\frac{-9+0}{2} = -4.5 \tag{3.18}$$

Έτσι, το σφάλμα στον υπολογισμό θα ήταν

$$-1 - (-4.5) = 3.5 \tag{3.19}$$



Σχήμα 3.5.: Διάγραμμα ροής κανόνα του τραπεζίου

Για την εκτίμηση του σφάλματος μπορούμε να εκτιμήσουμε ένα άνω φράγμα παίρνοντας την απόλυτη τιμή της σχέσης 3.12. Εκεί, αρκεί να εκτιμήσουμε την μέγιστη τιμή (κατ' απόλυτη τιμή) της δεύτερης παραγώγου. Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$f''(\xi) = 6 + 96\xi - 480\xi^2 + 240\xi^3$$

Μπορεί κανείς να βρει εύκολα ότι η μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή είναι 155.5164. οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση 3.12 έχουμε

$$E_t = -\frac{(1-0)^3}{12}155.5164 = -12.9597 \tag{3.20}$$

Αυτό είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό, αλλά μην ξεχνάμε ότι έχουμε προβλέψει το ¨χειρότερο¨ σενάριο. Αν συγκρίνουμε με το προηγούμενο παράδειγμα, μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση για τη διαφορετική συμπεριφορά ανάμεσα στο πραγματικό και το προβλεπόμενο σφάλμα·

3.3.2. Αλγόριθμος και κώδικας του κανόνα του τραπεζίου

Σχηματικά το διάγραμμα ροής για την υλοποίηση του κανόνα του τραπεζίου παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.5. Για να δείξουμε σχηματικά τον τρόπο λειτουργίας μιας ρουτίνας που μπορούμε να κατασκευάσουμε θα πρέπει να δώσουμε τις τιμές των ορίων a και b και τις αντίστοιχες τιμές $f(a)$ και $f(b)$, είτε αυτές είναι τιμές της συνάρτησης που υπολογίζονται βάση μιας αναλυτικής μορφής, είτε μέσω παρατηρήσεων. Έτσι, αρκεί να διαβάσουμε τον πίνακα X με τις τιμές του X και τις τιμές ενός πίνακα Y (δύο θέσεων) και χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.10 να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα. Μπορούμε να το εφαρμόσουμε στις περιπτώσεις των παραπάνω παραδειγμάτων. Στον κώδικα 3.1 παρουσιάζεται η υλοποίηση του διαγράμματος ροής σε ρουτίνα Matlab.

Κώδικας 3.1: Υπολογισμός ολοκληρώματος με τον κανόνα του τραπεζίου.

```
function I=trapezs(x,y)
% function to apply the simple trapezoid rule
% CALL: I=trapezs(x,y)
% x=[a, b] and y=[f(a),f(b)]
I=(x(2)-x(1))*(y(1)+y(2))/2
end
```

<u>Σημείωση</u>. Κανονικά θα πρέπει να γίνεται έλεγχος εάν οι πίνακες X και Y έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων και στην προκειμένη περίπτωση 2. Όμως εδώ σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε την πιο απλή υλοποίηση έχοντας φροντίσει να πληρούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής της αντίστοιχης μεθόδου.

Οι τιμές x, y μπορεί να προέρχονται από παρατηρήσεις ή να είναι τιμές μιας συνάρτησης της οποίας γνωρίζουμε την αναλυτική μορφή. Για παράδειγμα φανταστείτε την περίπτωση που έχουμε ως παρατηρήσεις τις ταχύτητες ενός αυτοκινήτου σε δύο χρονικές στιγμές $t_1 = 0\,s, v_1 = 5m/s$ και $t_2 = 1s, v_2 = 10m/s$ και θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση που έχει διανύσει. Γνωρίζουμε ότι $x = \int_{t_1}^{t_2} v dt$. Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του τραπεζίου. Η εφαρμογή στο περιβάλλον Matlab.

```
>> t=[0,1]
>> v=[5,10]
>> trapezs(t,v)
```

Μπορεί βέβαια να είναι όπως αναφέραμε οι τιμές μια συνάρτησης όπως στο παράδειγμα. Εκεί μπορούμε να υπολογίσουμε με διάφορους τρόπους. Ο ένας είναι

```
>> x=[0,1]
x =
     0     1
>> f=3*x.^2+16*x.^3-40*x.^4+12*x.^5
f =
     0    -9
>> trapezs(x,f)
ans =
   -4.5000
```

Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε πάρει στο x μόνο τις ακραίες τιμές και τις τιμές της συνάρτησης.
(Σημείωση: Υπενθυμίζουμε τη χρήση της τελείας μετά από το στοιχείο πίνακα. Διαφορετικά είναι λάθος στο Matlab).

Μπορεί κανείς να κάνει και μια μικρή προσαρμογή της ρουτίνας στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα για συνάρτηση με γνωστή αναλυτική μορφή όπως φαίνεται στον κώδικα 3.2.

Κώδικας 3.2: Ρουτίνα Matlab για τον απλό κανόνα τραπεζίου στην περίπτωση συνάρτησης γνωστής μορφής:

```
function I=trapezsf(f,a,b)
% function to apply siple trapezoid rule for a known function f
% a and b: the inetgration limits
I=(b-a)*(f(a)+f(b))/2;
end
```

Οπότε για την συνάρτηση $y = x^2$ η εφαρμογή της παραπάνω συνάρτησης έχουμε.

```
>> yy=@(x)x.^2
yy =
   @(x)x.^2
>> trapezsf(f,0,2)
ans =
     4
```

Στην παραπάνω περίπτωση κάνουμε χρήση του διαχειριστή (Handler) συναρτήσεων.
Ενώ για την συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 16x^3 - 40x^4 + 12x^5$ η εφαρμογή της συνάρτησης $trapezsf$ μας δίνει:

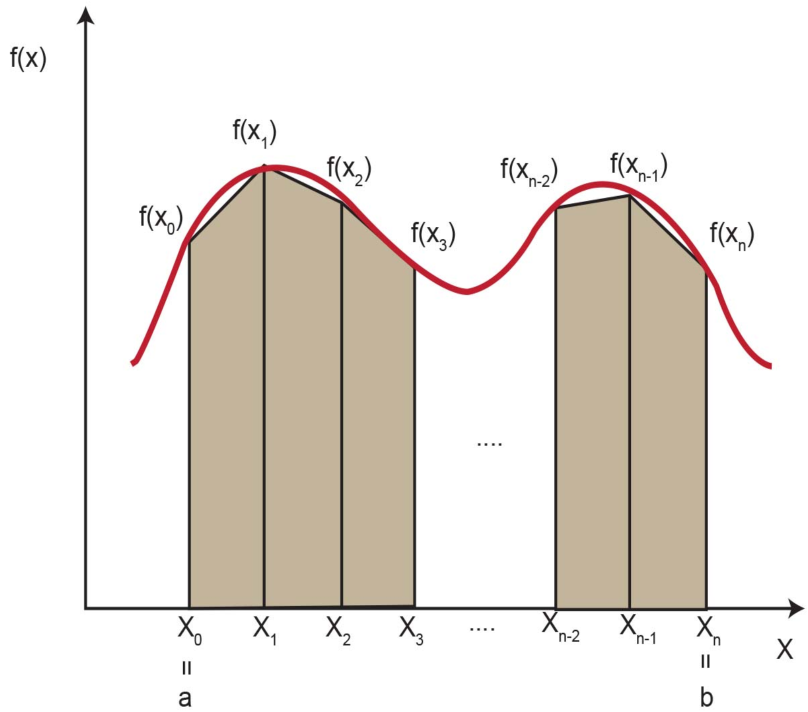
```
>> f=@(x)3*x.^2+16*x.^3-40*x.^4+12*x.^5
f =
   @(x)3*x.^2+16*x.^3-40*x.^4+12*x.^5
>> trapezsf(f,0,1)
ans =
  -4.5000
```

3.4. Σύνθετος κανόνας τραπεζίου

Η ερώτηση που προκύπτει εύλογα είναι αν μπορούμε να επιτύχουμε καλύτερη ακρίβεια διατηρώντας την ευκολία της μεθόδου. Κάποιος μπορεί να σκεφτεί ότι θα ήταν καλύτερα να προσεγγίσει την συνάρτηση όχι απευθείας σε όλο το διάστημα (a, b) αλλά να ¨σπάσει¨ τη διαδικασία σε μικρότερα διαστήματα του ιδίου πλάτους h και έτσι να υπολογίσει το εμβαδόν πολλών μικρότερων τραπεζίων όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.6, οπότε το σφάλμα της γραμμικής προσέγγισης της συνάρτησης να είναι γενικά μικρότερο.

Αυτό σημαίνει στην πράξη ότι προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα πλέον ως άθροισμα ολοκληρωμάτων:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \tag{3.21}$$



Σχήμα 3.6.: Σύνθετος Κανόνας του τραπεζίου.

οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα του τραπεζίου της προηγούμενης παραγράφου έχουμε:

$$I = h\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \ldots + h\frac{f(x_{n-1} + f(x_n)}{2} \tag{3.22}$$

Ομαδοποιώντας τους όρους στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι:

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \tag{3.23}$$

3.4.1. Σφάλμα της μεθόδου του σύνθετου κανόνα του τραπεζίου

Στην περίπτωση του σύνθετου κανόνα του τραπεζίου το σφάλμα προκύπτει ως το άθροισμα των επιμέρους σφαλμάτων οπότε:

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \tag{3.24}$$

όπου $f''(\xi_i)$ είναι η δεύτερη παράγωγος στο σημείο ξ_i που βρίσκεται στο διάστημα i. Το αποτέλεσμα μπορεί να απλοποιηθεί εκτιμώντας τη μέση τιμή της δευτέρας παραγώγου για όλο το διάστημα (a,b):

$$\overline{f''} \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \cong n\overline{f''} \tag{3.25}$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\overline{f''} \tag{3.26}$$

από όπου διαπιστώνουμε ότι εάν αυξηθεί ο αριθμός των διαστημάτων το σφάλμα μειώνεται. Χαρακτηριστικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι εάν διπλασιάσουμε τον αριθμό των διαστημάτων n στον οποίον γίνεται ο υπολογισμός, το σφάλμα υποτετραπλασιάζεται.

Η παραπάνω προσέγγιση απαιτεί τον υπολογισμό της μέσης δεύτερης παραγώγου, η οποία μπορεί να γίνει και αυτή αριθμητικά. Όμως μπορούμε να εκτιμήσουμε ένα άνω φράγμα για το σφάλμα αυτό υπολογίζοντας ένα ανώτατο όριο για την απόλυτη τιμή του σφάλματος.

Δεδομένου ότι:

$$E_t = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \tag{3.27}$$

με $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$.

Αφού η $f \in c^2[a,b]$ συνεπάγεται ότι η f'' έχει το μέγιστο και το ελάχιστο στο διάστημα $[a,b]$. Συνεπώς ισχύει:

$$min(f''(x)) \leqslant \ f''(\xi_i) \leqslant max(f''(x)) \tag{3.28}$$

για $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$n \cdot min(f''(x)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \leqslant n \cdot max(f''(x)) \tag{3.29}$$

Οπότε ισχύει:

$$|E_t| = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} M \tag{3.30}$$

όπου M είναι άνω φράγμα της $|f''(\xi)|$ στο διάστημα $[a, b]$.

Παράδειγμα 3.3: Να υπολογίσετε το σφάλμα ολοκλήρωσης που έχουμε όταν ολοκληρώσουμε με τη μέθοδο του τραπεζίου τη συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 16x^3 - 40x^4 + 12x^5$ στο διάστημα ολοκλήρωσης 0 έως 1 για $n = 2$.

Λύση

Δεδομένου ότι έχουμε αναλυτική μορφή μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αναλυτικά:

$$I = \int_0^1 (3x^2 + 16x^3 - 40x^4 + 12x^5)dx =$$

$$\left[\frac{3x^3}{3} + \frac{16x^4}{4} - \frac{40x^5}{5} + \frac{12x^6}{6}\right]_0^1 =$$

$$[x^3 + 4x^4 - 8x^5 + 2x^6]_0^1 = 1 + 4 - 8 + 2 = -1 \tag{3.31}$$

Χρησιμοποιώντας το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου έχουμε: $h = 1/2 = 0.5$ για

$n = 2$. Αφού το $h = 0.5$ τα σημεία ολοκλήρωσης είναι:

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = 0 + 0.5 = 0.5$$
$$x_2 = 0.5 + 0.5 = 1$$

και αντίστοιχα θα έχουμε για τις τιμές της συνάρτησης:

$$f(x_0) = f(0) = 0$$
$$f(x_1) = f(0.5) = 0.625$$
$$f(x_2) = f(1) = -9$$

οπότε

$$I = 0.5\frac{f(0) + 2f(0.5) + f(1)}{2} = 0.5\frac{0 + 2 \cdot 0.625 - 9}{2} = -1.935 \tag{3.32}$$

Αυτό μπορούμε να το υλοποιήσουμε χρησιμοποιώντας το περιβάλλον του Matlab όπου κατασκευάζουμε τρία ισαπέχοντα σημεία κατά $h = 0.5$ και τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης.

```
>> x=0:0.5:1
x =
          0     0.5000     1.0000
>> f=3*x.^2+16*x.^3-40*x.^4+12*x.^5
f =
          0     0.6250    -9.0000
>> I=0.5*(f(1)+2*f(2)+f(3))/2
I =
   -1.9375
```

Οπότε το σφάλμα είναι:

$$E_t = -1 - (-1.935) = 0.935 \tag{3.33}$$

Για την εκτίμηση του σφάλματος μπορούμε να εκτιμήσουμε ένα άνω φράγμα παίρνοντας την απόλυτη τιμή της σχέσης 3.27. Εκεί αρκεί να εκτιμήσουμε την μέγιστη τιμή (κατ' απόλυτη τιμή) της δεύτερης παραγώγου. Η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$f''(\xi) = 6 + 96\xi - 480\xi^2 + 240\xi^3.$$

Μπορεί κανείς να βρει εύκολα ότι η μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή είναι 155.5164 οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση 3.27 βρίσκει:

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\overline{f''} = -\frac{1^3}{12 \cdot 2^2}155.5164 = 3.2399 \tag{3.34}$$

Αυτό είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό αλλά μην ξεχνάμε ότι έχουμε προβλέψει το χειρότερο σενάριο.

Παράδειγμα 3.4: Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 cos\frac{\pi x}{2}dx$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε αριθμητικά το παραπάνω ολοκλήρωμα με τη χρήση της σύνθετης μεθόδου του τραπεζίου με σφάλμα μικρότερο από 10^{-6}. Πόσα διαστήματα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

Λύση

Ξέρουμε ότι

$$|E_t| = |-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)| = |\frac{(1-0)^3}{12n^2}f''(\xi)| = \frac{1}{12n^2}|f''(\xi)|$$

έχουμε

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2} sin \frac{\pi x}{2}$$

και

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} cos \frac{\pi x}{2}$$

οπότε μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι

$$M = \frac{\pi^2}{4}$$

Αντικαθιστώντας παραπάνω προκύπτει:

$$|E_t| = \frac{1}{12n^2}\frac{\pi^2}{4} \leqslant 10^{-6} \Rightarrow \frac{1}{10^{-6}12}\frac{\pi^2}{4} \leqslant n^2$$

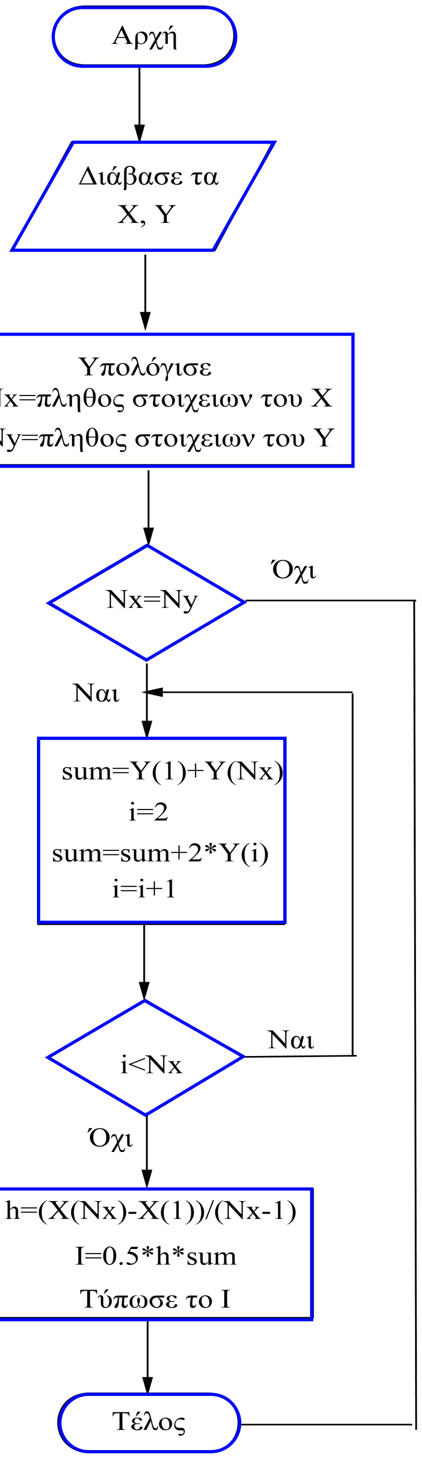
$$\Rightarrow \frac{10^6\pi^2}{48} \leqslant n^2 \Rightarrow n \geqslant \frac{10^3\pi}{\sqrt{48}}$$

οπότε $n \geqslant 453.22$.

Σημείωση: Μπορείτε να το επαληθεύσετε;

3.4.2. Αλγόριθμος και κώδικας Matlab σύνθετου κανόνα του τραπεζίου

Το διάγραμμα ροής για τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου φαίνεται στο Σχήμα 3.7. Ανάλογα με την περίπτωση που έχουμε δεδομένα ή συνάρτηση μπορούμε να έχουμε δύο υλοποιήσεις. Στην μία περίπτωση είναι γνωστό το πλήθος των σημείων είτε λόγω



Σχήμα 3.7.: Διάγραμμα ροής σύνθετου κανόνα του τραπεζίου

του ότι έχουμε ένα συγκεκριμένο πλήθος παρατηρήσεων είτε γιατί έχουμε συγκεκριμένο αριθμό σημείων της συνάρτησης. Μην ξεχνάμε ότι ο αριθμός των σημείων είναι ο αριθμός των διαστημάτων αυξημένος κατά ένα.

Στην περίπτωση αυτή αρκεί να δώσουμε στη ρουτίνα τους πίνακες των σημείων x και y. Κρίνετε σκόπιμο να ελέγξουμε το πλήθος των σημείων των πινάκων που θα πρέπει να είναι το ίδιο. Ο υλοποίηση σε Matlab φαίνεται στον Κώδικα 3.3.

Κώδικας 3.3: Ρουτίνα σύνθετου κανόνα τραπεζίου για δεδομένα από παρατηρήσεις ή συνάρτηση με δεδομένα σημεία

```
function I=trapezc(x,y)
%
% function to apply the composite trapezoid rule
% x and y: matrices containing x=[a, b] and y=[f(a),f(b)]
%

Nx=length(x);
Ny=length(y);

if Nx~=Ny, error ('length'), end

if Nx<3, error('length <2'), end

sum=y(1)+y(Nx)

for i=2:n1-1
    sum=sum+2*y(i);
end

h=(x(Nx)-x(1))/(n1-1);
I=0.5*h*sum;
end
```

Για την περίπτωση που έχουμε δεδομένα τα οποία έχουν π.χ. μετρηθεί σε ορισμένες θέσεις ή ορισμένες στιγμές.

```
>> n=2
n =
     2
>> x=0:2/n:2
x =
     0     1     2
>> y=x.^2
y =
     0     1     4
>> trapezc(x,y)
ans =
     3
>> n=4
n =
     4
>> x=0:2/n:2
x =
         0    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000
>> y=x.^2
y =
         0    0.2500    1.0000    2.2500    4.0000
>> trapezc(x,y)
ans =
>> n=8;
n =
     8
>> x=0:2/n:2;
>> y=x.^2;
>> trapezc(x,y)
ans =
    2.6875
>> n=16;
>> x=0:2/n:2;
>> y=x.^2;
>> trapezc(x,y)
ans =
    2.6719
```

Η ρουτίνα για την περίπτωση γνωστής μορφής συνάρτησης με καθορισμό αριθμού διαστημάτων φαίνεται στον Κώδικα 3.4

Κώδικας 3.4: Ρουτίνα σύνθετου κανόνα τραπεζίου για δεδομένα από παρατηρήσεις ή συνάρτηση με δεδομένα σημεία.

```
function I=trapezcf(f,a,b,n)
%
% function to apply the composite trapezoid rule
% for a function f using n divisions of the interval [a, b]


if n<2, error('length <2'), end

h=(b-a)/n;
y(1)=f(a);
y(n)=f(b);
sum=y(1)+y(n);

for i=1:n-1
    x=a+i*h;
    sum=sum+2*f(x);
end

I=0.5*h*sum;

end
```

Παράδειγμα 3.5: Για την περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = 3x^2+16x^3-40x^4+12x^5$ για το διάστημα [0,1]. Να εκτιμήσετε το σφάλμα και να υπολογίσετε το πραγματικό σφάλμα για αριθμό διαστημάτων $n = 4, 8, 16, 32$.

Λύση

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $a = 0$ και $b = 1$. Δεδομένου ότι έχουμε αναλυτική μορφή μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αναλυτικά:

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^1 (3x^2 + 16x^3 - 40x^4 + 12x^5)dx = \\
= \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{16x^4}{4} - \frac{40x^5}{5} + \frac{12x^6}{6}\right]_0^1 = \\
= [x^3 + 4x^4 - 8x^5 + 2x^6]_0^1 = 1 + 4 - 8 + 2 = -1 \quad (3.35)
\end{aligned}
$$

Αν θέσουμε $n = 2$ τότε έχουμε 3 σημεία που χρειάζεται να υπολογίσουμε με:

$$h = 1/2 = 0.5 \quad x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1$$

οπότε και οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης είναι:

$$f(x_0) = 0.0000,\ f(x_1) = 0.6250,\ f(x_3) = -9.0000$$

Οπότε το ολοκλήρωμα είναι:

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{1} f(x_i) + f(x_2)\right] = \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2[f(x_1)] + f(x_2)\}$$

$$= \frac{0.5}{2}\{0.0000 + 2\cdot[0.6250] + (-9.000)\} = -1.9375$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το απόλυτο σφάλμα δεδομένου ότι η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος όπως είδαμε είναι -1:

$$|E_t(n=2)| = |-1.9375 - (-1)| = |0.9375|.$$

Το απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι:

$$|\epsilon_t(n=2)| = |E_t(n=2)/1| = |0.9375/1| = 0.9375 \Rightarrow 93,75\%$$

Αν θέσουμε $n = 4$ τότε έχουμε 5 σημεία που χρειάζεται να υπολογίσουμε με:

$$h = 1/4 = 0.25 \quad x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1$$

οπότε και οι αντίστοιχες τιμές των συναρτήσεων ως:

$$f(x_0) = 0.0000, f(x_1) = 0.2930, f(x_2) = 0.6250, f(x_3) = -1.3711, f(x_4) = -9.0000$$

Οπότε το ολοκλήρωμα είναι:

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_i) + f(x_4)\right] = \frac{h}{2}\{f(x_0) + f(x_4) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]\}$$

$$= \frac{0.25}{2}\{0.0000 + (-9.000) + 2 \cdot [0.2930 + 0.6250 + (-1.3711)]\} = -1.2383$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί μπορούν να γίνουν και σε περιβάλλον Matlab.

```
>> x=linspace(0,1,5)
x =
         0    0.2500    0.5000    0.7500    1.0000
>> y=3*x.^2+16*x.^3-40*x.^4+12*x.^5
y =
         0    0.2930    0.6250   -1.3711   -9.0000
>> h=x(2)-x(1)
h =
    0.2500
>> I=(h/2)*(y(1)+y(5)+2*(y(2)+y(3)+y(4)))
I =
   -1.2383
```

Φυσικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έτοιμη ρουτίνα *trapezc* που έχουμε ήδη αναπτύξει στα προηγούμενα.

```
>> x=linspace(0,1,5)
x =
         0    0.2500    0.5000    0.7500    1.0000
>> y=3*x.^2+16*x.^3-40*x.^4+12*x.^5
y =
         0    0.2930    0.6250   -1.3711   -9.0000
>> trapezc(x,y)
   -1.2383
```

Μπορούμε να υπολογίσουμε το σφάλμα δεδομένου ότι η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος όπως είδαμε είναι -1:

$$|E_t(n = 4)| = | - 1.2383 - (-1)| = 0.2383.$$

και το απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι:

$$|\epsilon_t(n=4)| = |E_t(n=4)/1| = |0.2383/1| = 0.2383 \;\Rightarrow 23.83\%$$

Παρατηρούμε ότι με την μείωση του βήματος το σφάλμα μειώθηκε, όπως ήταν αναμενόμενο.

Για τα υπόλοιπα n μπορούμε να κάνουμε τους υπολογισμούς στο Matlab.

Για $n = 8$ χρειαζόμαστε 9 σημεία οπότε:

```
>>>> x=linspace(0,1,9)

x =
     0     0.1250     0.2500     0.3750     0.5000     0.6250     0.7500
0.8750     1.0000

>> y=3*x.^2+16*x.^3-40*x.^4+12*x.^5

y =
     0     0.0687     0.2930     0.5636     0.6250     0.1190    -1.3711
-4.2767    -9.0000

>> trapezc(x,y)
ans =
    -1.0598
```

Μπορούμε να υπολογίσουμε το σφάλμα δεδομένου ότι η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος όπως είδαμε είναι -1:

$$|E_t(n=8)| = |-1.0598 - (-1)| = 0.0598$$

και το απόλυτο σχετικό σφάλμα:

$$|\epsilon_t(n=8)| = |E_t(n=8)/1| = |0.0598/1| = 0.0598 \;\Rightarrow 5.98\%$$

Στην περίπτωση $n = 16$ χρειαζόμαστε 17 σημεία οπότε έχουμε:

```
>> x=linspace(0,1,17)

x =
  Columns 1 through 11
    0     0.0625     0.1250     0.1875     0.2500     0.3125     0.3750
0.4375     0.5000     0.5625     0.6250
  Columns 12 through 17
    0.6875     0.7500     0.8125     0.8750     0.9375     1.0000

>> y=3*x.^2+16*x.^3-40*x.^4+12*x.^5

y =
  Columns 1 through 11
    0     0.0150     0.0687     0.1643     0.2930     0.4355     0.5636
0.6409     0.6250     0.4681     0.1190
  Columns 12 through 17
   -0.4759    -1.3711    -2.6206    -4.2767    -6.3884    -9.0000

>> trapezc(x,y)
ans =
    -1.0150
```

Μπορούμε να υπολογίσουμε το σφάλμα δεδομένου ότι η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος όπως είδαμε είναι -1:

$$|E_t(n = 16)| = | - 1.0150 - (-1)| = 0.0150.$$

ενώ το απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι:

$$|\epsilon(n = 16)| = |E_t(n = 16)/1| = |0.0150/1| = 0.0150 \Rightarrow 1.5\%.$$

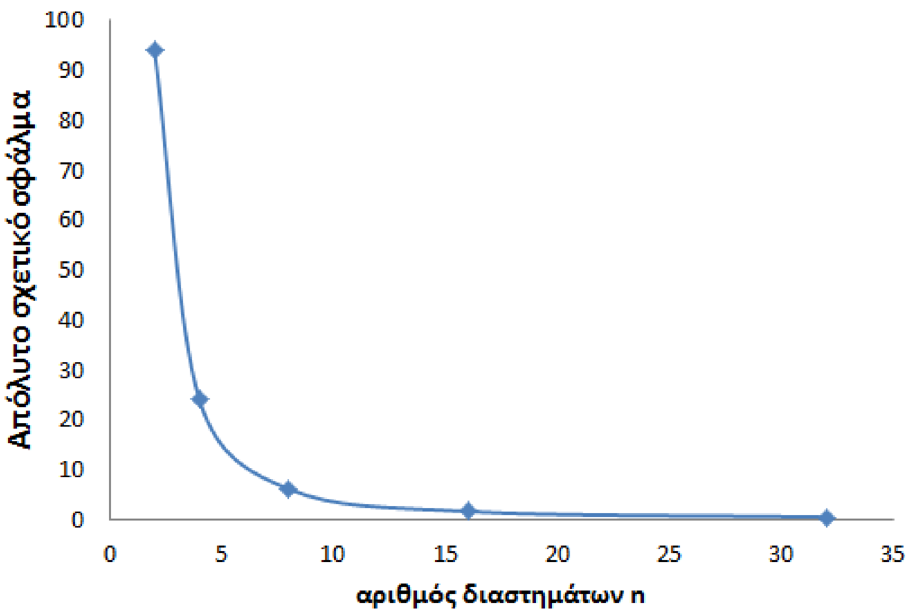
Για $n = 32$ χρειαζόμαστε 33 σημεία, οπότε έχουμε:

```
>> x=linspace(0,1,33)

x =

  Columns 1 through 11
        0    0.0313    0.0625    0.0938    0.1250    0.1563    0.1875
0.2188    0.2500    0.2813    0.3125
  Columns 12 through 22
 0.3438    0.3750    0.4063    0.4375    0.4688    0.5000    0.5313
0.5625    0.5938    0.6250    0.6563
  Columns 23 through 33
 0.6875    0.7188    0.7500    0.7813    0.8125    0.8438    0.8750
0.9063    0.9375    0.9688    1.0000

>> y=3*x.^2+16*x.^3-40*x.^4+12*x.^5

y =

  Columns 1 through 11
       0    0.0034    0.0150    0.0365    0.0687    0.1116    0.1643
0.2255    0.2930    0.3641    0.4355
  Columns 12 through 22
 0.5035    0.5636    0.6111    0.6409    0.6475    0.6250    0.5673
0.4681    0.3209    0.1190   -0.1443
  Columns 23 through 33
-0.4759   -0.8825   -1.3711   -1.9483   -2.6206   -3.3947   -4.2767
-5.2727   -6.3884   -7.6291   -9.0000

>> trapezc(x,y)
ans =
   -1.0037
```

Μπορούμε να υπολογίσουμε το σφάλμα δεδομένου ότι η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος όπως είδαμε είναι -1:

$$|E_t(n = 32)| = | - 1.0037 - (-1)| = 0.0037.$$

ενώ το απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι:



Σχήμα 3.8.: Μεταβολή του απόλυτου σφάλματος συναρτήσει του αριθμού των διαστημάτων για το παράδειγμα 3.5.

$$|\epsilon_t(n=32)| = |E_t(n=32)/1| = |0.0037/1| = 0.0037 \ \Rightarrow 0.37\%.$$

Το Σχήμα 3.8 παρουσιάζει τη μεταβολή του σφάλματος συναρτήσει του αριθμού των διαστημάτων.

Παράδειγμα 3.6: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης x^2 για το διάστημα $[0,\ 2]$ για αριθμό διαστημάτων $n = 2, 4, 8, 16, 32$ και να υπολογίσουμε και το αντίστοιχο απόλυτο σφάλμα.

Λύση

Στην περίπτωση που έχουμε γνωστή συνάρτηση με αναλυτική μορφή όπου μπορούμε να καθορίσουμε τον αριθμό των διαστημάτων τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ρουτίνα $trapezcf$. Τα αποτελέσματα της χρήσης σε περιβάλλον Matlab όπου έχουμε κάνει χρήση $handler$ προκειμένου να ορίσουμε τη συνάρτηση φαίνονται παρακάτω: