

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Γ. ΜΑΡΚΕΤΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

ΑΘΗΝΑ, 1998

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 3ης Έκδοσης

Στο διάστημα που μεσολάβησε από την προηγούμενη έκδοση μέχρι σήμερα, διαπιστώθηκε η ανάγκη να γίνουν ορισμένες συμπληρώσεις στο περιεχόμενο του βιβλίου. Πολλές απ' αυτές είχαν ως αφετηρία ερωτήματα σπουδαστών που διατυπώθηκαν στον συγγραφέα κατά τη διδασκαλία του σχετικού μαθήματος. Η έκδοση αυτή συνεπώς περισσότερο ολοκληρωμένη, θα καλύψει πληρέστερα το αντικείμενο του μαθήματος «**Τεχνική Μηχανική - Αντοχή των Υλικών**», στα πλαίσια πάντοτε των προγραμμάτων διδασκαλίας.

Το βιβλίο περιλαμβάνει είκοσι κεφάλαια. Καθένα απ' αυτά καλύπτει συγκεκριμένο θέμα και συνεπώς παρουσιάζει κάποια αυτοτέλεια, χωρίς αυτό να γίνεται σε βάρος της ενότητας, της ομαλής ροής και της συνέχειας της ύλης. Στο εισαγωγικό κεφάλαιο δίνονται βασικοί ορισμοί εννοιών και αρχών καθώς και η μεθοδολογία και οι υποθέσεις που διέπουν τους υπολογισμούς. Στη συνέχεια έπονται τα κεφάλαια που αναφέρονται σε βασικά είδη καταπονήσεων και ακολούθως κεφάλαια που καλύπτουν σύνθετες καταπονήσεις καθώς και επιλεγμένα θέματα ειδικότερου τεχνικού ενδιαφέροντος. Στα τελευταία κεφάλαια αναπτύσσονται αντικείμενα της θεωρίας Ελαστικότητας. Για τη βαθύτερη κατανόηση της θεωρίας, όλα τα κεφάλαια συμπληρώνονται με αντιπροσωπευτικές εφαρμογές που δίνουν στον σπουδαστή, τη μεθοδολογία πρόσβασης, χειρισμού και εύστοχης αξιοποίησής της.

Η ανάπτυξη της ύλης γίνεται με εύληπτο τρόπο, χωρίς αυτό να αποβαίνει σε βάρος της αυστηρότητας της ανάλυσης, με σκοπό να δοθεί η δυνατότητα στον σπουδαστή για την ευχερή αφομοίωσή της μέσα στα διατιθέμενα χρονικά περιθώρια του προγράμματος σπουδών. Σ' όλα τα στάδια της ανάπτυξης καταβλήθηκε προσπάθεια για τη διατήρηση της συνεχούς διασύνδεσης του σπουδαστή με τις φυσικές έννοιες και αρχές που διέπουν τα αντικείμενα του Μηχανικού, που είναι η διαστασιολόγηση και ο έλεγχος των κατασκευών.

Προσδοκία του συγγραφέα είναι να προσφέρει μ' αυτό το βιβλίο στον προπτυχιακό σπουδαστή, ολοκληρωμένη γνώση, όσο τούτο είναι δυνατόν, πάνω στο περιεχόμενο του κλάδου της Τεχνικής Μηχανικής, «**Αντοχή των Υλικών**», που αποτελεί βασικό υπόβαθρο της επιστήμης του Μηχανικού κάθε κατεύθυνσης. Προϋπόθεση όμως για την ολοκλήρωση της γνώσης αποτελεί η παρακολούθηση της προφορικής διδασκαλίας και γενικότερα η άμεση επικοινωνία διδάσκοντος και διδασκόμενου μέσα και έξω από την τάξη.

Τελειώνοντας, θέλω να ευχαριστήσω τους σπουδαστές εκείνους που έχοντας συλλάβει το νόημα ότι η μάθηση είναι μια συνεχής διαδικασία αναζήτησης, μου

έδωσαν το κίνητρο με την ενεργό συμμετοχή τους στις εκπαιδευτικές διαδικασίες, για τις συμπληρώσεις που έγιναν στο βιβλίο.

Στον εκδότη «Σ. Αθανασόπουλος - Σ. Παπαδάμης - Γ. Ζαχαρόπουλος Ο.Ε.» εκφράζονται ευχαριστίες για την επιμελημένη έκδοση.

Αθήνα, Οκτώβριος 1985

Ε.Γ. Μαρκέτος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 2ης έκδοσης

Το βιβλίο αυτό αποτελεί τον δεύτερο τόμο της σειράς των βιβλίων της Τεχνικής Μηχανικής και είναι επανέκδοση του προηγούμενου που είχε τίτλο «Μαθήματα Αντοχής των Υλικών». Η έκδοση αυτή, που έχει επηρεασθεί από την εμπειρία που αποκτήθηκε από τη διδασκαλία του σχετικού μαθήματος, είναι αισθητά ενισχυμένη από την άποψη περιεχομένου σε σχέση με την προηγούμενη, παρουσιάζει βελτιώσεις στη διάρθρωση της ύλης και περιλαμβάνει ικανό πρόσθετο αριθμό λυμένων παραδειγμάτων για την υποβοήθηση της κατανόησης της ύλης. Καταβλήθηκε και εδώ προσπάθεια για τη διατήρηση των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων του προηγούμενου βιβλίου, που αναφέρονται στην αυτοδυναμία του και στην απλότητα παρουσίασεως των διαφόρων θεμάτων, σε βαθμό που η εκμάθησή τους να μην προϋποθέτει εκτός από τη Στατική των Στερεών Σωμάτων, άλλες ειδικές γνώσεις πέραν των παρεχομένων στα βασικά μαθήματα των Αν. Μαθηματικών και της Φυσικής.

Το περιεχόμενο του βιβλίου καλύπτει κεφάλαια της Αντοχής των Υλικών σε έκταση και βάθος που προσδιορίζονται από τα προγράμματα διδασκαλίας των Σχολών στις οποίες διδάσκει ο συγγραφέας. Η επιλογή της ύλης έγινε με γνώμονα την παροχή στον σπουδαστή βασικών γνώσεων επί της μηχανικής συμπεριφοράς των σωμάτων σε απλές ή σύνθετες καταπονήσεις, που του δίνουν παράλληλα τη δυνατότητα υπολογισμού συνήθων κατασκευών· οι γνώσεις αυτές θα του επιτρέψουν επίσης την παρακολούθηση άλλων εφαρμοσμένων μαθημάτων, που έχουν ως υπόβαθρο την Αντοχή των Υλικών και θα του δώσουν την ευχέρεια εφόσον το επιθυμεί, για εμβάθυνση σε συνθετότερα προβλήματα της Μηχανικής.

Το βιβλίο αυτό πρέπει να θεωρηθεί διδακτικό βοήθημα-μνημόνιο και όχι υποκατάστατο της προφορικής διδασκαλίας· η εμπέδωση της ύλης του συντελείται κατά μεγάλο βαθμό με την επίλυση λογιστικών ασκήσεων και ολοκληρώνεται με τη συμμετοχή στα Εργαστηριακά πειράματα.

Τέλος, επιθυμώ να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν με οποιοδήποτε τρόπο στην εμφάνιση αυτού του βιβλίου.

Αθήνα, Ιούνιος 1981

Ε.Γ. Μαρκέτος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελ.
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή	
1.1. Αντικείμενο της Αντοχής των Υλικών	1
1.2. Εσωτερικές δυνάμεις	2
1.2.1. Γενικότητες	2
1.2.2. Συνθήκες ισορροπίας	3
1.2.3. Ανάλυση συνισταμένης εσωτερικών δυνάμεων	4
1.3. Τάση	5
1.3.1. Έννοια της τάσης	5
1.3.2. Ανάλυση της τάσης	6
1.3.3. Ολοκλήρωση εσωτερικών δυνάμεων	7
1.4. Βασικές ιδιότητες των υλικών	8
1.4.1. Ελαστικότητα - Πλαστικότητα	8
1.4.2. Αναλογία φορτίων-παραμορφώσεων	8
1.5. Βασικές υποθέσεις	9
1.6. Αρχή της επαλληλίας	10
1.7. Ασφάλεια κατασκευών	11
1.7.1. Αβεβαιότητες	11
1.7.2. Εύρος ασφαλείας	14
1.7.3. Συντελεστής ασφαλείας	14
1.7.4. Σχόλια	15
Κεφάλαιο 2: Εφελκυσμός - Θλίψη	
2.1. Τάσεις - ανηγμένες παραμορφώσεις	17
2.1.1. Ορισμοί	17
2.1.2. Εφαρμογή	18
2.2. Διαγράμματα τάσεων - αν. παραμορφώσεων	19
2.3. Όγκιμα υλικά	20
2.3.1. Πείραμα εφελκυσμού	20
2.3.2. Πείραμα θλίψης	25
2.4. Ψαθυρά υλικά	26
2.5. Εγκάρσια παραμόρφωση	27
2.5.1. Λόγος Poisson	27
2.5.2. Ισόογκος μεταβολή	27
2.6. Αξονική παραμόρφωση	29
2.6.1. Σχέση φορτίων-παραμορφώσεων	29
2.6.2. Εφαρμογές	29
2.7. Τριαξονικός εφελκυσμός - θλίψη	33
2.7.1. Σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων	34
2.7.2. Μεταβολή όγκου	34
2.7.3. Εφαρμογές	35

2.8. Τάσεις υπολογισμού	37
2.8.1. Τάση αστοχίας	37
2.8.2. Επιτρεπόμενη τάση	38
2.9. Ιδιότητες δομικών υλικών	39

Κεφάλαιο 3: Ανάλυση της έντασης

3.1. Τριαξονική ένταση	40
3.1.1. Γενικές συνθήκες ισορροπίας	40
3.1.2. Πλάγια ένταση	43
3.1.3. Οκτάεδρες τάσεις	45
3.2. Διαξονική ένταση	47
3.2.1. Συνθήκες ισορροπίας	47
3.2.2. Πλάγια ένταση	47
3.2.3. Μέγιστες, ελάχιστες τάσεις - Διερεύνηση	49
3.2.4. Τροχιές τάσεων	52
3.3. Μονοαξονική ένταση	54
3.4. Γραφικός υπολογισμός της έντασης	56
3.4.1. Κύκλος Mohr	56
3.4.2. Πίνακες	62
3.4.3. Εφαρμογή	62
3.5. Διατμητική καταπόνηση	63
3.6. Γενίκευση του νόμου αναλογίας	66

Κεφάλαιο 4: Κάμψη

4.1. Στατική ροπή επιφάνειας	68
4.1.1. Στατική ροπή - πρωτοβάθμια ροπή	68
4.1.2. Εφαρμογή	69
4.2. Ροπές αδρανείας επιφανειών	69
4.2.1. Ροπή αδρανείας - δευτεροβάθμια ροπή	69
4.2.2. Πολική ροπή αδρανείας	72
4.2.3. Γινόμενο αδρανείας - φυγόκεντρη ροπή	73
4.2.4. Κύριοι άξονες αδρανείας	74
4.2.5. Έλλειψη αδρανείας	76
4.2.6. Εφαρμογές	77
4.3. Επίπεδη καθαρή κάμψη	79
4.3.1. Υποθέσεις	79
4.3.2. Ένταση - Παραμόρφωση	80
4.3.3. Γενικές παρατηρήσεις	85
4.3.4. Εφαρμογές	86
4.4. Λοξή καθαρή κάμψη	87
4.4.1. Γενική περίπτωση	87
4.4.2. Ειδική περίπτωση - Διατομή (Γ)	89
4.4.3. Εφαρμογή	90

Κεφάλαιο 5: Διάτμηση

5.1. Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων	92
5.2. Τμήση (ψαλιδισμός)	93

5.3. Κάμψη με τέμνουσα	95
5.3.1. Γενικότητες	95
5.3.2. Διατμητική δύναμη	96
5.3.3. Διατμητική τάση	97
5.4. Δοκός με συμμετρική διατομή	98
5.4.1. Ορθογωνική διατομή	98
5.4.2. Γενική περίπτωση	100
5.4.3. Κυκλική διατομή	102
5.4.4. Επάλληλες δοκοί	103
5.4.5. Εφαρμογή	105
5.5. Δοκός με λεπτά τοιχώματα	106
5.5.1. Διπλό ταυ	106
5.5.2. Ανοικτή συμμετρική διατομή	107
5.5.3. Κλειστή συμμετρική διατομή	109
5.5.4. Ασύμμετρη διατομή - Κέντρο διάτμησης	110
5.5.5. Εφαρμογή	112

Κεφάλαιο 6: Στρέψη

6.1. Εισαγωγή	114
6.2. Ράβδος με κυκλική διατομή	114
6.2.1. Σταθερή διατομή	114
6.2.2. Μεταβλητή διατομή	117
6.3. Ράβδος με κοίλη διατομή	118
6.3.1. Διατομή δακτύλιου	118
6.3.2. Τυχαία κοίλη διατομή	119
6.4. Ράβδος με ορθογωνική διατομή	121
6.4.1. Γενική περίπτωση	121
6.4.2. Διατομή λεπτού πάχους	124
6.5. Ράβδος με ανοικτή διατομή	124
6.5.1. Γενικότητες	124
6.5.2. Πολυγωνικός άξονας	125
6.5.3. Καμπύλος άξονας	126
6.5.4. Σύγκριση ανοικτής - κλειστής διατομής	127
6.6. Ράβδος με κυψελωτή διατομή	127
6.7. Κύριες τάσεις - θραύση κυλινδρικής ράβδου	129
6.8. Εφαρμογές	131

Κεφάλαιο 7: Σύνθετη κάμψη - Έκκεντρη φόρτιση

7.1. Εισαγωγή	133
7.2. Επίπεδη σύνθετη κάμψη - απλή εκκεντρότητα	134
7.2.1. Γενική περίπτωση	134
7.2.2. Ορθογωνική διατομή	136
7.3. Λοξή σύνθετη κάμψη - διπλή εκκεντρότητα	137
7.3.1. Γενική περίπτωση	137
7.3.2. Ορθογωνική διατομή	138
7.4. Πυρήνας διατομής	139
7.4.1. Γενική περίπτωση	139
7.4.2. Εφαρμογές	141

7.5. Αδρανής περιοχή	143
7.5.1. Παραδοχές υπολογισμού	143
7.5.2. Συμμετρική διατομή-φόρτιση	144
7.5.3. Ασύμμετρη διατομή-φόρτιση	145
7.5.4. Εφαρμογές	147

Κεφάλαιο 8: Έργο παραμόρφωσης

8.1. Βασικές έννοιες	151
8.1.1. Έργο εξωτερικών δυνάμεων	151
8.1.2. Έργο παραμόρφωσης	152
8.2. Ανηγμένο έργο παραμόρφωσης	153
8.2.1. Μονοαξονική καταπόνηση	153
8.2.2. Διατμητική καταπόνηση	154
8.2.3. Τριαξονική καταπόνηση	155
8.3. Έργο συμμόρφου & συνόγκου παραμόρφωσης	156
8.3.1. Αποκλίνουσα - υδροστατική ένταση	156
8.3.2. Ανάλυση του έργου παραμόρφωσης	157
8.4. Έργο παραμόρφωσης ράβδου	158
8.4.1. Έργο αξονικών δυνάμεων (N)	158
8.4.2. Έργο ροπών κάμψης (M_b)	159
8.4.3. Έργο τεμνουσών δυνάμεων (Q)	160
8.4.4. Έργο ροπών στρέψης (M_t)	162
8.4.5. Έργο ($N + M_b + Q + M_t$)	163
8.5. Μετακίνηση σημείου συστήματος	164
8.6. Εφαρμογές	165

Κεφάλαιο 9: Ελαστική γραμμή

9.1. Εισαγωγή	167
9.2. Εξίσωση ελαστικής γραμμής	168
9.3. Ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης	170
9.3.1. Σταθερή ροπή αδρανείας	170
9.3.2. Μεταβλητή ροπή αδρανείας - Γεν. συνθήκες	171
9.3.3. Εφαρμογή της μεθόδου	172
9.4. Παραμόρφωση από ροπές κάμψης - Εφαρμογές	174
9.4.1. Αμφιέριστη δοκός	174
9.4.2. Πρόβολος	177
9.5. Συμβολή της τέμνουσας δύναμης	180
9.6. Παραμόρφωση από τέμνουσες δυνάμεις - Εφαρμογές	181
9.6.1. Αμφιέριστη δοκός	181
9.6.2. Πρόβολος	182

Κεφάλαιο 10: Υπερστατικά συστήματα

10.1. Βάσεις υπολογισμού	183
10.2. Υπερστατικά προβλήματα - Εφαρμογές	184
10.2.1. Αξονική καταπόνηση	184
10.2.2. Στρεπτική καταπόνηση	187
10.3. Πλεονάζουσες στηρίξεις δοκών	189
10.4. Υπερστατικές δοκοί - Εφαρμογές	190

10.4.1. Συνεχής δοκός	190
10.4.2. Πακτωμένη - εδραζόμενη δοκός	191
10.5. Υποχωρήσεις στηρίξεων - Εφαρμογές	193
10.5.1. Πακτωμένη-εδραζόμενη δοκός	193
10.5.2. Διασταυρούμενες δοκοί	194
10.5.3. Φορείς επί ελαστικών στηριγμάτων	196
10.6. Το Θεώρημα του Castigliano	198
10.6.1. Υπολογισμός μετακινήσεων	198
10.6.2. Συστήματα εξωτερικώς υπερστατικά	201
10.6.3. Συστήματα εσωτερικώς υπερστατικά	202
10.6.4. Εφαρμογές	204

Κεφάλαιο 11: Θερμική ένταση

11.1. Εισαγωγικές έννοιες	210
11.2. Σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων-θερμοκρασίας	211
11.3. Ένταση, παραμόρφωση από θερμοκρασία	213
11.3.1. Γενικότητες	213
11.3.2. Ισοστατική δοκός	213
11.3.3. Υπερστατικά συστήματα	215
11.3.4. Σύνθετα στοιχεία	215
11.4. Εφαρμογές	219

Κεφάλαιο 12: Λυγισμός

12.1. Εισαγωγή	222
12.2. Παραδοχές υπολογισμού	224
12.3. Λυγισμός ράβδου αξονικώς θλιβόμενης	225
12.3.1. Εισαγωγικές έννοιες	225
12.3.2. Φορτίο λυγισμού αμφιαρθρωτής ράβδου	226
12.3.3. Φορτίο λυγισμού μονόπακτης ράβδου	228
12.3.4. Φορτίο λυγισμού αμφίπακτης ράβδου	229
12.3.5. Φορτίο λυγισμού πακτ.-αρθρωτής ράβδου	230
12.4. Επιτρεπόμενη φόρτιση λυγισμού	231
12.4.1. Επιτρεπόμενο φορτίο	231
12.4.2. Τάση λυγισμού - Λυγηρότητα	233
12.4.3. Καμπύλη λυγισμού	234
12.4.4. Επιτρεπόμενη τάση	235
12.5. Αστοχία ράβδου εκκέντρως θλιβόμενης	236
12.5.1. Φορτίο λυγισμού	236
12.5.2. Φορτίο, τάση αστοχίας	237
12.6. Παραμόρφωση - Σχόλια	239
12.7. Μέθοδος των συντελεστών λυγισμού « ω »	241
12.7.1. Συντελεστής ω	241
12.7.2. Εφαρμογή μεθόδου	241
12.8. Εφαρμογή	243

Κεφάλαιο 13: Αντοχή σε σύνθετη ένταση

13.1. Κριτήρια αστοχίας	246
13.1.1. Γενικότητες	246

13.1.2. Επιφάνειες αστοχίας - Ισοδύναμη τάση	247
13.2. Συμπέριφορά σε σύνθετη ένταση	248
13.3. Θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσης	249
13.3.1. Υπόθεση αστοχίας	249
13.3.2. Αστοχία υπό επίπεδη ένταση	250
13.3.3. Αστοχία υπό τριαξονική ένταση	252
13.3.4. Ισοδύναμη ένταση	254
13.4. Θεωρία της οκτάεδρης διατμητικής τάσης	255
13.4.1. Υπόθεση αστοχίας - Κριτήριο το έργο	255
13.4.2. Υπόθεση αστοχίας - Κριτήριο η τάση	257
13.4.3. Γραφική παράσταση κριτηρίου	258
13.4.4. Ισοδύναμη ένταση	260
13.5. Σύγκριση των θεωριών της διατμητικής τάσης	261
13.6. Θεωρία της εσωτερικής τριβής	261
13.6.1. Γενικότητες	261
13.6.2. Κριτήριο Mohr	263
13.6.3. Κατασκευή περιβάλλουσας αστοχίας	265
13.6.4. Σύστημα αναφοράς, κύριες τάσεις	267
13.6.5. Εξίσωση Coulomb	270
13.6.6. Εφαρμογή	272

Κεφάλαιο 14: Σύνθετες καταπονήσεις

14.1. Εισαγωγή	274
14.2. Κάμψη και διάτμηση	275
14.2.1. Κύριες τάσεις	275
14.2.2. Έλεγχος αντοχής	278
14.3. Στρέψη, κάμψη και διάτμηση	279
14.3.1. Κύριες τάσεις	279
14.3.2. Έλεγχος αντοχής	280
14.4. Στρέψη και αξονική δύναμη	281
14.4.1. Κύριες τάσεις	281
14.4.2. Έλεγχος αντοχής	281
14.5. Εφαρμογές	282

Κεφάλαιο 15: Κελυφωτοί φορείς

15.1. Εισαγωγή	284
15.1.1. Γενικότητες	284
15.1.2. Υποθέσεις	284
15.2. Λεπτοί κυλινδρικοί σωλήνες	285
15.3. Κυλινδρικά δοχεία	287
15.4. Σφαιρικά κελύφη	289
15.5. Κελύφη διπλής καμπυλότητας	290
15.5.1. Γενικότητες	290
15.5.2. Υπολογισμός τάσης σ_θ	290
15.5.3. Υπολογισμός τάσης σ_ϕ	292
15.6. Εφαρμογές	292

Κεφάλαιο 16: Σύνθετες δοκοί

16.1. Εισαγωγή	296
16.2. Γενικές αρχές υπολογισμού	297
16.3. Δοκοί ενισχυμένες παράπλευρα	297
16.4. Δοκοί ενισχυμένες στα πέλματα	299
16.5. Δοκοί ενισχυμένες ασύμμετρα	301
16.5.1. Ορθές τάσεις	301
16.5.2. Διατμητικές τάσεις	302
16.6. Εφαρμογή	304

Κεφάλαιο 17: Καμπύλες δοκοί

17.1. Γενικότητες	306
17.2. Εφαπτομενικές τάσεις	306
17.3. Ακτινικές τάσεις	309
17.4. Σύνθετη κάμψη	310
17.5. Θέση ουδέτερου άξονα	311
17.5.1. Διατομή ορθογωνική	311
17.5.2. Διατομή τραπέζιου	312
17.5.3. Διατομή κυκλική	313
17.5.4. Διατομή δακτύλιου	314
17.5.5. Διατομή ταυ, διπλού ταυ	314
17.6. Εφαρμογές	315

Κεφάλαιο 18: Κόπωση

18.1. Εισαγωγή	318
18.2. Αντοχή κόπωσης	319
18.2.1. Περίγραμμα δοκιμών	319
18.2.2. Καμπύλη Wöhler	321
18.3. Επίδραση της μέσης τάσης	323
18.4. Μηχανισμός θραύσης	326

Κεφάλαιο 19: Συνθήκες Ελαστικότητας

19.1. Ανάλυση της έντασης	329
19.1.1. Εξισώσεις ισορροπίας - πλάγια ένταση	329
19.1.2. Κύριες τάσεις	330
19.1.3. Αναλλοίωτες του τανυστή των τάσεων	331
19.1.4. Μέγιστες διατμητικές τάσεις	331
19.2. Ανάλυση της παραμόρφωσης	334
19.2.1. Ορθές, διατμητικές παραμορφώσεις	334
19.2.2. Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων	336
19.3. Πολικές συντεταγμένες	338
19.3.1. Εξισώσεις ισορροπίας	338
19.3.2. Ορθές, διατμητικές παραμορφώσεις	340
19.3.3. Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων	342
19.4. Γενικές συνθήκες-Ανακεφαλαίωση	342
19.4.1. Γενικότητες	342
19.4.2. Επίλυση προβλημάτων Ελαστικότητας	343

19.4.3. Ορθογώνιες συντεταγμένες	343
19.4.4. Πολικές συντεταγμένες	344
Κεφάλαιο 20: Προβλήματα Ελαστικότητας	
20.1. Επίπεδη Ελαστικότητα	346
20.1.1. Γενικότητες	346
20.1.2. Επίπεδη ένταση	347
20.1.3. Επίπεδη παραμόρφωση	349
20.1.4. Σχόλια	351
20.2. Επίλυση επιπέδων προβλημάτων	351
20.2.1. Τασικό πεδίο	351
20.2.2. Τασική συνάρτηση (Airy)	352
20.2.3. Πολικές συντεταγμένες	353
20.3. Εφαρμογές θεωρίας Ελαστικότητας	354
20.3.1. Αρχή του Saint-Venant	354
20.3.2. Δακτύλιος με παχέα τοιχώματα	354
20.3.3. Ημιάπειρος δίσκος με συγκεντρωμένο φορτίο	358
20.3.4. Ημιάπειρος δίσκος με διανεμημένο φορτίο	364
20.3.5. Δίσκος κυκλικής διατομής	366
Κεφάλαιο 21: Γενικές εφαρμογές	369

Εισαγωγή

1.1. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Η *Αντοχή των Υλικών* έχει ως αντικείμενο την ανάπτυξη των εννοιών, αρχών και μεθόδων που διέπουν τους υπολογισμούς μόρφωσης των φορέων των κατασκευών.

Η αναζήτηση και ο καθορισμός του καταλληλότερου σχήματος και η διαστασιολόγηση των φορέων, πραγματοποιείται με την προϋπόθεση ότι θα είναι σε θέση να αναλάβουν με ασφάλεια, και κατά τον οικονομικότερο δυνατό τρόπο,

α) τις εξωτερικές δυνάμεις που προορίζονται να υποβαστάσουν και που οφείλονται σε μόνιμα και κινητά φορτία (λ.χ. ωφέλιμο φορτίο, πίεση ατμού, σεισμική επιβάρυνση, ωθήσεις γαιών, βάρη επιστρώσεων κλπ.),

β) διάφορες καταπονήσεις που μπορεί να οφείλονται σε μεταβολές θερμοκρασίας, υποχωρήσεις στηρίξεων κλπ., και

γ) το βάρος τους.

Η επίδραση όλων αυτών των παραγόντων έχει σαν αποτέλεσμα την εκδήλωση στους φορείς, έντασης αφ' ενός και παραμόρφωσης αφ' ετέρου. Αναλυτικότερα σε κάθε φορέα έχουμε:

α) ανάπτυξη αντιδράσεων, που εξασφαλίζουν τη διατήρηση της ισορροπίας του, καθώς και εσωτερικών δυνάμων στη μάζα του φορέα, και

β) εκδήλωση μετακινήσεων και στροφών των επί μέρους στοιχείων, με αποτέλεσμα την παραμόρφωση του φορέα.

Οι άγνωστες αντιδράσεις των στηρίξεων υπολογίζονται με τη βοήθεια των έξη εξισώσεων ισορροπίας στον χώρο, που δίνονται από τη Στατική του στερεού σώματος, εφόσον η κατασκευή είναι ισοστατική. Για τον υπολογισμό των αντιδράσεων υπερστατικών συστημάτων, η Αντοχή των Υλικών παρέχει τις επί πλέον εξισώσεις που απαιτούνται για την εξάλειψη της στατικής αοριστίας του προβλήματος. Οι εξισώσεις αυτές στηρίζονται στους περιορισμούς που επιβάλλουν οι πρόσθετες στηρίξεις στην παραμόρφωση του φορέα.

Η λεπτομερής γνώση της διανομής της εσωτερικής έντασης των φορέων επιτρέπει την εκτίμηση, τόσο της αντοχής τους λ.χ. έναντι θραύσης, όσο και του μεγέθους της παραμόρφωσής τους, που μπορεί να είναι απαγορευτική παρά το γεγονός ότι η συμπεριφορά τους από την άποψη αντοχής έχει ελεγχθεί ως ικανοποιητική.

1.2

Ο υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων (ανά μονάδα επιφάνειας) καθώς και των παραμορφώσεων, όταν δίνονται οι διαστάσεις και η εξωτερική φόρτιση των φορέων, πραγματοποιείται με τη βοήθεια της θεωρίας της Αντοχής των Υλικών, ξεκινώντας από τα αντιπροσωπευτικά μεγέθη της εσωτερικής έντασης που είναι γνωστά από τη Στατική. Υπενθυμίζεται ότι τα μεγέθη αυτά είναι, η ροπή κάμψης M , η τέμνουσα δύναμη Q , η αξονική δύναμη N και η ροπή στρέψης M_t που εισάγεται κυρίως σ' αυτό το βιβλίο.

Ανάλογη πορεία ακολουθείται για τον υπολογισμό των διαστάσεων της κατασκευής όταν δίνονται τα άλλα στοιχεία.

Στις απλές περιπτώσεις υπολογισμού συνήθων φορέων τίθεται ως προϋπόθεση ότι οι εσωτερικές δυνάμεις και οι παραμορφώσεις δεν υπερβαίνουν προκαθορισμένα όρια, που φέρονται συνήθως ως επιτρεπόμενα, καθώς επίσης ότι ο φορέας υπόκειται σε πολύ μικρές μεταβολές σχήματος. Σε συνθετότερα προβλήματα γίνεται εφαρμογή ειδικών κριτηρίων για τη διαστασιολόγηση των φορέων ή για τον προσδιορισμό οριακών καταπονήσεων.

Ο υπολογισμός των φορέων όπως σκιαγραφείται παραπάνω επιτρέπει τον έλεγχο της ασφάλειάς τους έναντι αστοχίας, που μπορεί να επέλθει εν γένει είτε εξαιτίας απαράδεκτης παραμόρφωσης είτε λόγω θραύσης.

Αντίθετα λοιπόν με την απλοποίηση που γίνεται στη Στατική των στερεών σωμάτων (βλ. Τεχν. Μηχανική - Τόμος Ι - Στατική), στην Αντοχή των Υλικών τα σώματα θεωρούνται παραμορφώσιμα.

1.2. ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

1.2.1. Γενικότητες

Η μελέτη των εσωτερικών δυνάμεων και των παραμορφώσεων των σωμάτων γίνεται με την προϋπόθεση ότι αυτά βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας υπό την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων και των αντιδράσεων.

Για να προσδιορίσουμε τη διανομή των εσωτερικών δυνάμεων σε τυχαία διατομή σώματος είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε επακριβώς το σύνολο των εξωτερικών δυνάμεων, δηλ. την ένταση, τη φορά και το πραγματικό σημείο εφαρμογής κάθε δύναμης· το ίδιο βάρος του σώματος πρέπει να εισάγεται διανεμημένο όπως πράγματι είναι και όχι συγκεντρωμένο και διερχόμενο από το κέντρο βάρους του.

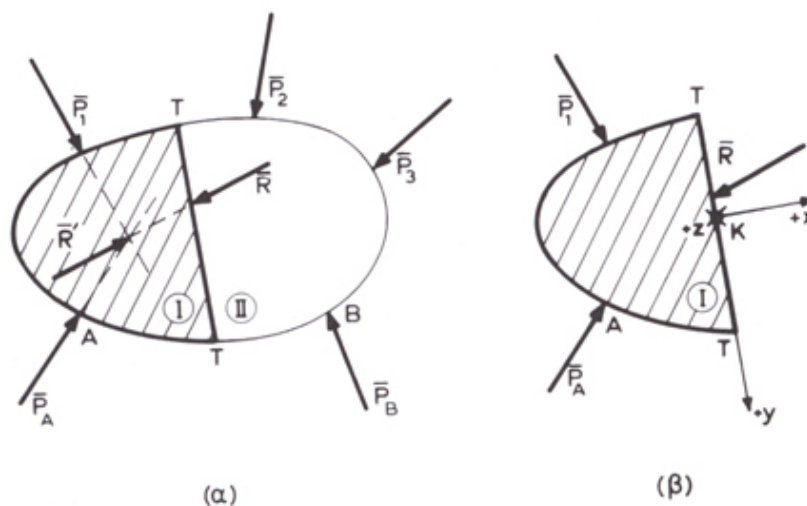
Όταν το σώμα βρίσκεται σε κίνηση με επιτάχυνση εξαιτίας μη ισορροπούντος συστήματος εξωτερικών δυνάμεων, ο υπολογισμός ακολουθεί την ίδια πορεία σαν να επρόκειτο για σώμα που ισορροπεί, αρκεί να ληφθούν υπόψη οι δυνάμεις αδρανείας (μάζα \times επιτάχυνση) επί πλέον των άλλων δυνάμεων. Και στην περίπτωση αυτή οι δυνάμεις πρέπει να εισάγονται διανεμημένες και όχι συγκεντρωμένες στο κέντρο βάρους του σώματος, εφόσον στόχος μας είναι η αναζήτηση της διανομής των εσωτερικών δυνάμεων.

1.2.2. Συνθήκες ισορροπίας

Όλα τα τμήματα σώματος που ισορροπεί βρίσκονται και αυτά προφανώς σε κατάσταση ισορροπίας. Συνεπώς, κατά την εξέταση υποθετικά αποχωρισμένων τμημάτων του σώματος, με σκοπό τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γνωστές συνθήκες ισορροπίας στον χώρο.

Ας εξετάσουμε το σώμα που φαίνεται στο σχ. 1.1α, που ισορροπεί με τις εξωτερικές δυνάμεις \bar{P}_i και τις αντιδράσεις στα σημεία A και B. Θεωρούμε το σώμα διαχωρισμένο με νοητή τομή T-T, στα τμήματα I και II που ισορροπούν και αυτά. Το τμήμα II ασκεί στο τμήμα I μέσα από τη διατομή T-T, εσωτερικές δυνάμεις, που η συνισταμένη τους \bar{R} οφείλει να ισορροπεί με τη συνισταμένη \bar{R}' των εξωτερικών δυνάμεων και των αντιδράσεων που ασκούνται στο τμήμα I.

Από τις εξισώσεις ισορροπίας μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνισταμένη \bar{R} , υποθέτοντας αποχωρισμένο το τμήμα II από το υπόλοιπο σώμα. Το τμήμα I (σχ. 1.1β) θα ισορροπεί τότε κάτω από την επίδραση της εξωτερικής δύναμης \bar{P}_1 , της αντίδρασης \bar{P}_A και της συνισταμένης των εσωτερικών δυνάμεων \bar{R} , που θεωρείται τώρα σαν εξωτερική δύναμη. Το ίδιο βάρος του σώματος θεωρείται εδώ αμελητέο σε σχέση με τα μεγέθη των δυνάμεων.



Σχ. 1.1

Στη διατομή T-T (σχ. 1.1β) θεωρούμε τρισσορθόγωνιο σύστημα συντεταγμένων, του οποίου η αρχή συμπίπτει με το κέντρο βάρους K της διατομής. Ο άξονας x λαβαίνεται κάθετος στη διατομή, οπότε οι y και z ορίζουν το επίπεδο της διατομής. Η φορά των αξόνων καθορίζεται έτσι ώστε το σύστημα των x, y, z να είναι δεξιόστροφο.

Αν (X_i, Y_i, Z_i) , (M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}) είναι οι συνιστώσες δυνάμεις και ροπές ως προς τους άξονες x, y, z, της δύναμης \bar{P}_i , και (X_R, Y_R, Z_R) , (M_{xR}, M_{yR}, M_{zR}) ,

τα ίδια μεγέθη αντίστοιχα, της συνισταμένης \bar{R} των εσωτερικών δυνάμεων, η ισορροπία του τμήματος I του σώματος απαιτεί ($i = 1, A$):

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X_i + X_R = 0 & \quad , \quad \Sigma M_{xi} + M_{xR} = 0 \\ \Sigma Y_i + Y_R = 0 & \quad , \quad \Sigma M_{yi} + M_{yR} = 0 \\ \Sigma Z_i + Z_R = 0 & \quad , \quad \Sigma M_{zi} + M_{zR} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Από τις εξισώσεις αυτές προσδιορίζονται οι συνιστώσες της συνισταμένης \bar{R} των εσωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στη διατομή T-T· οι εξισώσεις όμως αυτές και μόνο δεν επαρκούν για τον καθορισμό της κατανομής αυτών των δυνάμεων πάνω στη διατομή.

Με βάση την αρχή της ισότητας δράσης και αντίδρασης, η συνισταμένη \bar{R}' (σχ. 1.1α) των εσωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στη διατομή T-T από το τμήμα I στο II, είναι ίση και αντίθετη με την \bar{R} . Αυτό συνάγεται προφανώς και από το γεγονός ότι οι εσωτερικές δυνάμεις, που ενεργούν εκατέρωθεν τυχαίας τομής σώματος πρέπει να ισορροπούν ($\bar{R}' + \bar{R} = 0$). Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε επίσης, αν διατυπώσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας και στο τμήμα II του σώματος.

Η μέθοδος που περιγράφηκε για τον υπολογισμό των συνιστωσών των εσωτερικών δυνάμεων με τη βοήθεια τομών, μπορεί να επεκταθεί και στη μελέτη της ισορροπίας οποιουδήποτε στοιχείου που αποχωρίζεται νοερά με επίπεδες τομές από το εσωτερικό του σώματος, με σχήμα λ.χ. παραλληlepίπεδο, πυραμίδα, οκτάεδρο κ.ά.

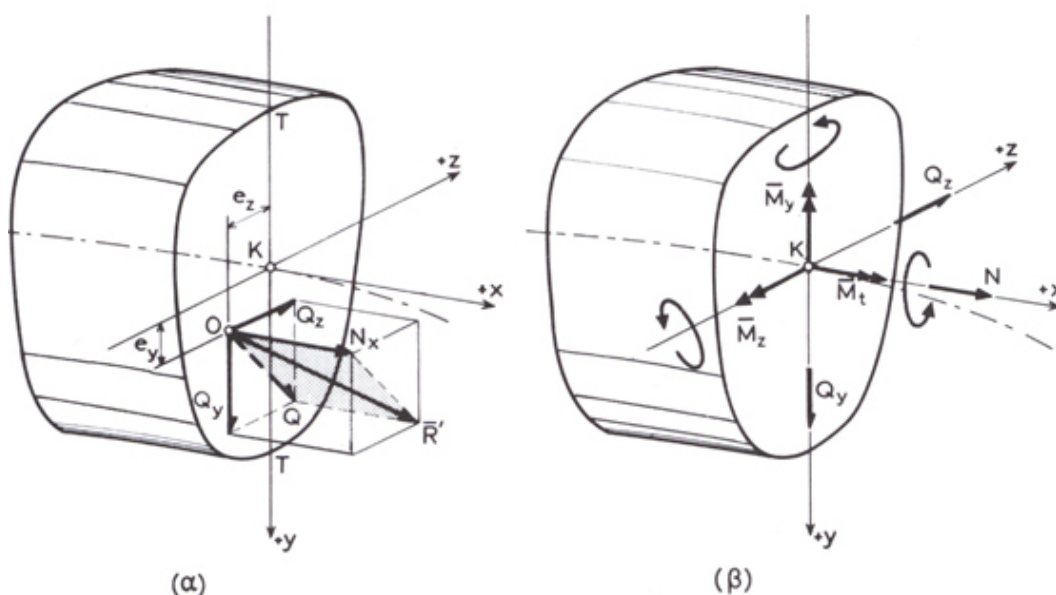
Από τις εξισώσεις ισορροπίας (1.1) εξάγεται ότι οι εξωτερικές δυνάμεις ($\Sigma \bar{P}_i$) αριστερά της διατομής, μπορεί να υποκατασταθούν από ισοδύναμο στατικώς σύστημα, που συνίσταται από τα αθροίσματα των προβολών τους κατά τους άξονες x, y, z , τα $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$, και τα αθροίσματα των ροπών τους ως προς τους ίδιους άξονες, $\Sigma M_x, \Sigma M_y$, και ΣM_z . Έτσι η μελέτη των εσωτερικών δυνάμεων που οφείλονται σε τυχαία καταπόνηση, μπορεί να αναχθεί στη μελέτη απλών περιπτώσεων, σε καθεμιά από τις οποίες το πρόβλημα εξετάζεται χωριστά· με υπέρθεση των αποτελεσμάτων όλων των μερικών καταπονήσεων (βλ. εδ. 1.6), προσδιορίζεται τελικά το αποτέλεσμα της συνισταμένης τους.

1.2.3. Ανάλυση συνισταμένης εσωτερικών δυνάμεων

Θεωρούμε διατομή T-T κάθετη στον άξονα σώματος, όπως φαίνεται στο σχ. 1.2α. Υποθέτουμε ότι η συνισταμένη \bar{R}' , των δυνάμεων που ενεργούν αριστερά της διατομής T-T, διέρχεται από το σημείο O. Αναλυόμενη η \bar{R}' στο επίπεδο που ορίζεται από τον άξονα ενεργείας της και την κάθετη ευθεία πάνω στη διατομή, παρέχει συνιστώσες την κάθετη δύναμη N_x και τη δύναμη Q πάνω στη διατομή. Η τελευταία αναλυόμενη στη συνέχεια κατά τις διευθύνσεις των αξόνων y, z , παρέχει τις συνιστώσες Q_y, Q_z .

Αν μεταφέρουμε τις συνιστώσες N_x, Q_y, Q_z , έτσι ώστε οι άξονες ενεργείας τους να διέρχονται από το κέντρο βάρους K της διατομής, η

συνισταμένη \bar{R}' καθορίζεται τότε από τις δυνάμεις N_x, Q_y, Q_z και τις ροπές M_x, M_y, M_z (σχ. 1.2β). Ειδικότερα αυτά τα εσωτερικά μεγέθη είναι:



Σχ. 1.2

$N_x = N = \sum X_i$, η **κάθετη** ή **αξονική** δύναμη κατά τον άξονα x' η δύναμη αυτή εφελκύει ή θλίβει τη διατομή.

$Q_y = \sum Y_i, Q_z = \sum Z_i$, οι **τέμνουσες** δυνάμεις κατά τους άξονες y και z αντίστοιχα· οι δυνάμεις αυτές τείνουν να διατμήσουν το σώμα κατά το επίπεδο T-T.

$M_x = \sum M_{xi} = M_t (= |Q_y e_z + Q_z e_y|)$, η **ροπή στρέψης** με παραστατικό διάνυσμα \bar{M}_t κατά τον άξονα x' η ροπή αυτή τείνει να στρέψει τον φορέα περί τον άξονα x , και

$M_y = \sum M_{yi} (= |N e_z|), M_z = \sum M_{zi} (= |N e_y|)$, οι **ροπές κάμψης** με παραστατικά διανύσματα \bar{M}_y, \bar{M}_z · οι ροπές κάμψης τείνουν να κάμψουν τον φορέα περί τους άξονες y και z αντίστοιχα.

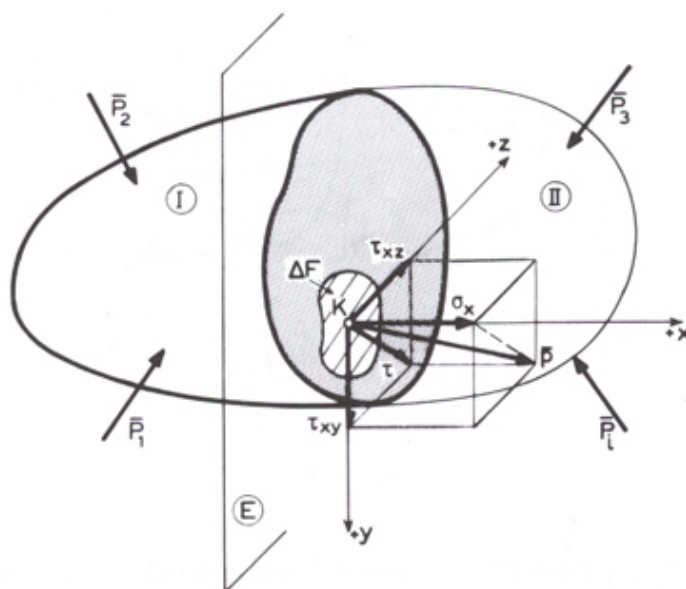
Όταν ένα μόνο από τα μεγέθη N, Q, M_t, M_y (ή M_z) είναι διάφορο του μηδενός, τότε η ένταση ονομάζεται **απλή**, ενώ όταν δύο τουλάχιστο από τα μεγέθη αυτά δεν είναι μηδέν, τότε η ένταση ονομάζεται **σύνθετη**.

1.3. ΤΑΣΗ

1.3.1. Έννοια της τάσης

Εξετάζουμε σώμα που ισορροπεί και πάνω στο οποίο ενεργεί σύστημα εξωτερικών δυνάμεων \bar{P}_i (σχ. 1.3). Θεωρούμε επίπεδο E, που τέμνει και

διαχωρίζει το σώμα σε δύο τμήματα I και II. Επειδή το σώμα στο σύνολό του ισορροπεί, και το τμήμα II (όπως και το I) θα ισορροπεί και αυτό (εδ. 1.2.1), υπό την επίδραση όμως των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν πάνω σ' αυτό το τμήμα και των εσωτερικών δυνάμεων που διαβιβάζονται μέσω της επιφάνειας F της τομής, από το τμήμα I στο II (και αντίστροφα). Οι εσωτερικές αυτές δυνάμεις έχουν ενγένει ανομοιομόρφη διανομή πάνω στην επιφάνεια F .



Σχ. 1.3

Σε τυχαίο στοιχειώδες εμβαδό ΔF της επιφάνειας τομής που περικλείει σημείο K , ασκείται από το τμήμα I στο II του σώματος πλάγια ενγένει δύναμη $\Delta \bar{P}$. Η μέση δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας είναι ίση με $\Delta \bar{P} : \Delta F$. Αν το εμβαδό ΔF τείνει στο μηδέν, το πηλίκο $\Delta \bar{P} : \Delta F$ τείνει σε όριο που ονομάζεται *τάση* εφαρμοσμένη στο σημείο K . Η τάση λοιπόν δίνεται από την έκφραση:

$$\bar{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta F} = \frac{d\bar{P}}{dF} \quad (1.2)$$

Αντιστρόφως, η συνισταμένη των δυνάμεων $\bar{p} dF$, είναι ίση με την εσωτερική δύναμη που διαβιβάζεται από το ένα τμήμα του σώματος στο άλλο. Θα έχουμε τότε:

$$\bar{R} = \int \bar{p} dF \quad (1.3)$$

1.3.2. Ανάλυση της τάσης

Οι υπολογισμοί διευκολύνονται με την ανάλυση της τάσης στις συνιστώσες της. Η προβολή της τάσης \bar{p} πάνω στην ευθεία την κάθετη στο

στοιχείο dF , παρέχει την *κάθετη* ή *ορθή* τάση σ . Η τάση αυτή μπορεί να είναι θλιπτική ή εφελκυστική, που σημαίνει αντίστοιχα ότι τα τμήματα I και II συνθλίβονται ή εφελκύνονται δια μέσου του στοιχείου dF . Η προβολή της τάσης \bar{p} στο επίπεδο της επιφάνειας dF , παρέχει τη *διατμητική* ή *εφαπτομενική* τάση τ . Όπως οι δυνάμεις έτσι και οι τάσεις, σ , τ , μεταβάλλονται ενγένη από σημείο σε σημείο της διατομής F .

Για διευκόλυνση της αναγνώρισης των τάσεων επιλέγουμε συνήθως τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων x, y, z , του οποίου ο άξονας x είναι κάθετος στο επίπεδο της τομής (σχ. 1.3), ενώ οι y και z ορίζουν αυτό το επίπεδο. Η ολική πλάγια τάση \bar{p} αναλύεται τότε στην κάθετη συνιστώσα σ_x κατά τον άξονα x , και τη διατμητική τ πάνω στο επίπεδο (y, z) . Η τελευταία αναλύεται περαιτέρω σε δύο συνιστώσες τ_{xy} και τ_{xz} κατά τις διευθύνσεις των αξόνων y και z αντίστοιχα.

Ο χαρακτηρισμός των τάσεων ακολουθεί συνήθως την εξής σήμανση: **α)** οι κάθετες τάσεις σ συνοδεύονται από ένα δείκτη που υποδηλώνει τον άξονα κατά τον οποίο ενεργούν (π.χ. σ_x), και **β)** οι διατμητικές τάσεις τ συνοδεύονται από δύο δείκτες, από τους οποίους ο πρώτος υποδηλώνει τον άξονα πάνω στον οποίο είναι κάθετο το επίπεδο στο οποίο ενεργούν και ο δεύτερος, τον άξονα κατά τον οποίο διευθύνονται (π.χ. τ_{xy} , τ_{xz} — βλ. σχ. 1.3).

Συνοψίζοντας, κάθε πλάγια τάση μπορεί να αναλυθεί σε μία ορθή συνιστώσα και σε δύο κάθετες μεταξύ τους διατμητικές συνιστώσες, που ενεργούν σε επίπεδο κάθετο στην ευθεία ενεργείας της ορθής τάσης.

1.3.3. Ολοκλήρωση εσωτερικών δυνάμεων

Αν dF είναι απειροστό στοιχείο διατομής F του σώματος, τότε πάνω σ' αυτό ασκούνται εν γένει στοιχειώδεις δυνάμεις σdF και τdF . Οι δυνάμεις αυτές κατανέμονται με κάποιο νόμο πάνω στη διατομή F , άγνωστο προς το παρόν.

Τα εσωτερικά μεγέθη $N_x, Q_y, Q_z, M_y, M_z, M_t$ που διατυπώνονται στο εδάφιο 1.2.3, εκφράζουν τη συνισταμένη των στοιχειωδών εσωτερικών δυνάμεων ή των ροπών των στοιχειωδών εσωτερικών δυνάμεων αντίστοιχα, που αναφέρουμε στην προηγούμενη παράγραφο. Οι συνισταμένες αυτές (1.3.1) προκύπτουν με ολοκλήρωση (1.3) κατά τις επόμενες σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int \sigma_x dF & , & & M_x &= \int (z\tau_{xy} - y\tau_{xz}) dF \\ Q_y &= \int \tau_{xy} dF & , & & M_y &= \int z\sigma_x dF \\ Q_z &= \int \tau_{xz} dF & , & & M_z &= \int y\sigma_x dF \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Υπενθυμίζεται ότι τα παραπάνω εσωτερικά μεγέθη που ασκούνται σε τυχαία νοητή τομή του σώματος, πρέπει να βρίσκονται σε ισορροπία με τις δυνάμεις που ενεργούν στο ένα από τα δύο τμήματα στα οποία διαχωρίζεται το σώμα απ' αυτή την τομή.

1.4. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

1.4.1. Ελαστικότητα - Πλαστικότητα

Όταν πάνω σ' ένα σώμα ασκηθούν βραδέως και προοδευτικώς εξωτερικές δυνάμεις, τότε το σώμα παραμορφώνεται. Η παραμόρφωση συνεχίζεται μέχρι ν' αποκατασταθεί η ισορροπία μεταξύ των εξωτερικών και των αναπτυσσόμενων εσωτερικών δυνάμεων. Μετά τη βαθμιαία αποφόρτιση, το σώμα επανέρχεται μερικώς ή ολικώς στις αρχικές διαστάσεις του.

Η ιδιότητα των σωμάτων να επανέρχονται πλήρως στην αρχική τους μορφή μετά από αποφόρτιση, ονομάζεται *ελαστικότητα*. Τα σώματα αυτά ονομάζονται *ελαστικά* και οι παραμορφώσεις τους *ελαστικές*.

Αν η παραμόρφωση που οφείλεται στις εξωτερικές δυνάμεις δεν αποδίδεται στο σύνολό της μετά την αποφόρτιση, τότε το σώμα είναι μερικώς ελαστικό. Η ολική παραμόρφωση αποτελείται από δύο συνιστώσες, την ελαστική παραμόρφωση που εξαφανίζεται μαζί με τη φόρτιση που την προκάλεσε, και την παραμένουσα στο σώμα παραμόρφωση μετά την αποφόρτιση. Η τελευταία παραμόρφωση ονομάζεται *μόνιμη* ή *πλαστική*. Τα σώματα που συμπεριφέρονται μ' αυτό τον τρόπο ονομάζονται *ελαστοπλαστικά*.

Τα δομικά υλικά έχουν εν γένει ελαστοπλαστικές ιδιότητες. Τα περισσότερα όμως απ' αυτά συμπεριφέρονται ελαστικά, εφόσον κατά την καταπόνησή τους δεν προκαλείται υπέρβαση κάποιου ορίου που ονομάζεται *όριο ελαστικότητας*. Την ιδιότητα αυτή των υλικών εκμεταλλευόμαστε για τον υπολογισμό και τη μόνωση των κατασκευών, των οποίων η συμπεριφορά επιζητείται κατά κανόνα να είναι ελαστική. Σε μερικές περιπτώσεις δεχόμαστε για διάφορους λόγους την εκδήλωση στις κατασκευές, και σε περιορισμένη κλίμακα, πλαστικών παραμορφώσεων.

1.4.2. Αναλογία φορτίων - παραμορφώσεων

Πολλά υλικά, όπως λ.χ. ο χάλυβας, καταπονούνται με φόρτιση που αυξάνει προοδευτικά, παραμορφώνονται ανάλογα με το μέγεθος της εξωτερικής δύναμης. Η γραμμική αυτή συνάρτηση που συνδέει φορτία-παραμορφώσεις, ισχύει μέχρι κάποιο όριο για κάθε υλικό, το *όριο αναλογίας*. Το όριο αυτό είναι διαφορετικό από το όριο ελαστικότητας και έχει εν γένει μικρότερη τιμή απ' αυτό. Τα υλικά αυτά ονομάζονται *γραμμικώς ελαστικά*.

Ο νόμος που εκφράζει την αναλογία δυνάμεων - παραμορφώσεων διατυπώθηκε αρχικά από τον R. Hooke και γι' αυτό είναι γνωστός ως *νόμος του Hooke*. Για τον υπολογισμό των συνήθων κατασκευών αποδεχόμαστε εν γένει την ισχύ του και γι' αυτό ο νόμος αυτός αποτελεί τη βάση της Αντοχής των Υλικών και γενικότερα της θεωρίας *Ελαστικότητας*.

Στα υλικά που δεν συμπεριφέρονται στην πραγματικότητα γραμμικά, στα *μη γραμμικώς ελαστικά*, όπως ο χυτοσίδηρος, το σκυρόδεμα κ.ά. δεχόμαστε συνήθως και σ' αυτά την ισχύ του νόμου του Hooke μέχρι κάποιο όριο, με σκοπό την απλοποίηση των υπολογισμών.

Όταν, όπως αναφέρουμε στο προηγούμενο εδάφιο, δεχόμαστε εκδήλωση πλαστικών παραμορφώσεων σ' ένα σώμα, τότε δεν έχει εφαρμογή ο νόμος του Hooke· ο υπολογισμός των κατασκευών στηρίζεται σ' αυτή την περίπτωση στη θεωρία *Πλαστικότητας* (βλ. Τεχνική Μηχανική - τόμος III - Ειδικά Κεφάλαια).

1.5. ΒΑΣΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Η διατύπωση των αναλυτικών σχέσεων που εκφράζουν την *ελαστική* συμπεριφορά των κατασκευών, στηρίζεται σε υποθέσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες των συνήθων υλικών που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές.

Προϋποτίθεται ότι η ταχύτητα επιβολής ή αφαίρεσης των φορτίων ή των παραμορφώσεων είναι πολύ μικρή κι' αυτό για να αποκλείσουμε κατά το δυνατό την εκδήλωση δυναμικών φαινομένων· η φόρτιση των σωμάτων μ' αυτό τον τρόπο ονομάζεται *στατική*.

Εφεξής, και εφόσον σαφώς δεν αναφέρεται το αντίθετο, υποθέτουμε ότι τα δομικά υλικά έχουν τις επόμενες ιδιότητες.

- α. Συνίστανται από *συνεχή* ύλη: οι ποσότητες που περιγράφουν τα πεδία των μετακινήσεων, των τάσεων και των παραμορφώσεων, είναι συνεχείς συναρτήσεις των συντεταγμένων.
- β. Είναι *ομοιογενή*: έχουν τις ίδιες ιδιότητες σε κάθε σημείο του σώματος.
- γ. Είναι *ισότροπα*: έχουν ιδιότητες ανεξάρτητες από τη διεύθυνση· στην αντίθετη περίπτωση τα σώματα ονομάζονται ανισότροπα (τέτοιο είναι λ.χ. το ξύλο).
- δ. Είναι *γραμμικώς ελαστικά*, δηλ. υπακούουν στον νόμο του Hooke: οι παραμορφώσεις είναι ανάλογες των δυνάμεων στην ελαστική περιοχή.
- ε. Υφίστανται κατά τη φόρτιση πολύ μικρές παραμορφώσεις: η υπόθεση αυτή επιτρέπει την εφαρμογή στους υπολογισμούς, τάσεων και παραμορφώσεων που αναφέρονται στις αρχικές διαστάσεις των σωμάτων (*συμβατικά* μεγέθη), και όχι στις εκάστοτε πραγματικές (*πραγματικά* μεγέθη), πράγμα που περιπλέκει τα προβλήματα· το σφάλμα απ' αυτή την απλοποίηση είναι ασήμαντο στις συνήθεις περιπτώσεις.
- στ. Φέρουν σταθερά φορτία επί μακρό χρονικό διάστημα, χωρίς μεταβολή της αρχικής παραμόρφωσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο· διαφορετικά έχουμε εκδήλωση του φαινομένου του *ερπυσμού*.
- ζ. Αποκρίνονται αμέσως στην επιβολή ή αφαίρεση των φορτίων, χωρίς εμφάνιση στη συνέχεια άλλης παραμόρφωσης· στην αντίθετη περίπτωση έχουμε το φαινόμενο *υστέρησης*.

Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν κατασκευαστικά υλικά, που να έχουν αυτές τις ιδιότητες. Χρησιμοποιούνται όμως οι παραπάνω υποθέσεις σαν βάση για τη μελέτη των συνήθων κατασκευών, διότι απλοποιούν και διευκολύνουν σημαντικά τους υπολογισμούς. Από την εμπειρία που έχει αποκτηθεί αποδεικνύεται ότι οι υποθέσεις αυτές, γνωστές ως *βασικές υποθέσεις*, περιγράφουν με επαρκή ασφάλεια τη γενική συμπεριφορά μεγάλου αριθμού υλικών που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές.

1.6. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ

Θεωρούμε σώμα-φορέα που βρίσκεται υπό την επίδραση τυχαίας εξωτερικής φόρτισης.

Υποθέτουμε τώρα, επί πλέον από τις βασικές υποθέσεις που διατυπώθηκαν στο προηγούμενο εδάφιο, ότι οι μετακινήσεις των διαφόρων σημείων του σώματος εξ αιτίας της φόρτισης είναι αρκετά μικρές, ώστε να μην επηρεάζεται αισθητά από το μέγεθός τους, ο τρόπος ενεργείας των εφαρμοσμένων δυνάμεων. Μπορούμε σ' αυτή την περίπτωση να αγνοήσουμε τις ελαστικές μετακινήσεις και να υποθέσουμε με ικανοποιητική προσέγγιση ότι οι εξωτερικές δυνάμεις επιβάλλονται σε απαραμόρφωτο ιδεατό σώμα (Θεωρία I τάξης - βλ. Σημείωση).

Για τον υπολογισμό συνεπώς των φορέων γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας αναφερόμενοι στο γεωμετρικό σχήμα που έχουν πριν από τη φόρτισή τους. Επειδή δε οι εξισώσεις ισορροπίας είναι γραμμικές σχέσεις, οι αντιδράσεις, οι εσωτερικές δυνάμεις, οι τάσεις και οι παραμορφώσεις (νόμος του Hooke) είναι και αυτές γραμμικές συναρτήσεις της εξωτερικής φόρτισης. Συνεπώς καθένα από αυτά τα μεγέθη εκφράζεται στον υπολογισμό σαν γραμμική συνάρτηση των εφαρμοσμένων εξωτερικών φορτίων.

Μετά από τα προηγούμενα μπορούμε να διατυπώσουμε την *αρχή της επαλληλίας* ή την *αρχή της υπέρθεσης* καταστάσεων ισορροπίας, ως εξής:

Το αποτέλεσμα (αντίδραση, τάση, παραμόρφωση κτλ.) το παραγόμενο από δύο ή περισσότερες δυνάμεις που ενεργούν ταυτόχρονα σε ένα σώμα, είναι ίσο με το άθροισμα των αποτελεσμάτων που παράγονται από κάθε μία δύναμη χωριστά.

Στην έννοια της δύναμης περιλαμβάνεται εδώ και η ροπή.

Σύμφωνα λοιπόν μ' αυτή την αρχή μπορούμε να αναλύσουμε τα σύνθετα προβλήματα σε απλά και στη συνέχεια να συνθέσουμε τις απλές περιπτώσεις για να καταλήξουμε στο ζητούμενο. Έτσι π.χ. διαχωρίζουμε τα φορτία που ενεργούν σε ένα σώμα σε ομάδες φορτίων, με τρόπο που να διευκολύνεται ο υπολογισμός· έπειτα προσθέτουμε τα μερικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τις μεμονωμένες επενέργειες των ομάδων των φορτίων και παίρνουμε το ολικό αποτέλεσμα.

Άλλη περίπτωση εφαρμογής της αρχής της επαλληλίας είναι η εξής: Οι εξισώσεις που παρέχουν τις τάσεις σε συνάρτηση με τις παραμορφώσεις, παρέχουν εξαγόμενα που αναφέρονται σε μηδενική αρχική εντατική κατάσταση του σώματος· αυτό σημαίνει ότι οι τάσεις και οι παραμορφώσεις είναι μηδενικές απουσία εξωτερικών δυνάμεων. Όταν όμως η αρχική εντατική κατάσταση δεν είναι μηδενική μπορούμε σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας να την προσθέσουμε στην οφειλόμενη στις εξωτερικές δυνάμεις και να πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα. Τα μεγέθη που οφείλονται στην εξωτερική φόρτιση παρέχουν τότε τη μεταβολή της αρχικής εντατικής κατάστασης του σώματος, που μπορεί να οφείλεται σε μεταβολή της θερμοκρασίας του σώματος, συστολή, υποχωρήσεις στηριγμάτων, προένταση, ίδιο βάρος, προφόρτιση εν γένει κλπ.